ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2024–25

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4. Επίλυση συστημάτων – απαλοιφή

1. Με τη μέθοδο της απαλοιφής να επιλυθεί καθένα από τα συστήματα βρίσκοντας την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του αντίστοιχου επαυξημένου μητρώου

(α') $$\begin{aligned} x+3y-2z&=-1\\ 2x+y+z&=3\\ -x+2y+z&=-4 \end{aligned}$$

(β') $$\begin{aligned} 3x+y-z&=3\\ x+3y+z&=2\\ 5x-y-3z&=4 \end{aligned}$$

2. Δίνονται τα σημεία $P(1,2)$, $Q(-1,6)$, και $R(2,3)$ στο επίπεδο.

   (α') Να βρεθεί πολυώνυμο $p(x) = ax^2 + bx + c$ του οποίου το γράφημα περιέχει τα σημεία P, Q, και R.

   (β') Υπάρχουν πολυώνυμα $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ των οποίων το γράφημα περιέχει τα σημεία P, Q, και R;

3. Για το σύστημα

$$\begin{aligned} x+y+2z&=a\\ 2x+3y+3z&=b\\ x+2y+\mu z&=c \end{aligned}$$

   όπου a, b, c, μ είναι πραγματικές παράμετροι, βρείτε σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων ώστε το σύστημα να έχει (i) μοναδική λύση, (ii) άπειρες λύσεις, ή (iii) καμία λύση (**αδύνατο**).

4. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{aligned} x+2y+z&=a\\ 2x-2y+3z&=2\\ x+2y+a^2z&=b \end{aligned}$$

   όπου a και b είναι πραγματικές παράμετροι. Βρείτε συνθήκες για τις παραμέτρους ώστε το σύστημα να έχει (i) καμία λύση, (ii) μία μόνο λύση, ή (iii) άπειρες λύσεις.

5. ♠ ♣ Να βρεθούν τα στοιχειώδη μητρώα $E_1, E_2, \ldots$ που μετασχηματίζουν το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4\\ 3 & 8 & 14\\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

   στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του, καθώς και η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του μητρώου.

ΛΥΣΕΙΣ

1. (α΄) Ξεκινώντας από το αντίστοιχο επαυξημένο μητρώο με τη διαδικασία της απαλοιφής βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 + r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 + r_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_3 \to (1/4) r_3]{r_2 \to (-1/5) r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και το τελευταίο μητρώο είναι σε κλιμακωτή μορφή. Επιλύοντας το σύστημα που αντιστοιχεί στο τελευταίο μητρώο, το οποίο είναι ισοδύναμο του αρχικού συστήματος, βρίσκουμε με την προς τα πίσω αντικατάσταση

$$\left.\begin{aligned} x + 3y - 2z &= -1 \\ y - z &= -1 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &x = -3y + 2z - 1 = 2 \\ &y = z - 1 = -1 \\ &z = 0 \end{aligned}\right.$$

οπότε η λύση του συστήματος είναι η $x = 2$, $y = -1$, $z = 0$.

(β΄) Το μητρώο που αντιστοιχεί στο σύστημα είναι το

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Η διαδικασία της απαλοιφής αποκαλύπτει τους οδηγούς. Έτσι μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την πρώτη γραμμή με $1/3$, ή να μεταθέσουμε τις δύο πρώτες γραμμές ώστε στη θέση του οδηγού στη πρώτη γραμμή να εμφανιστεί το 1. **Η επιλογή που θα κάνουμε, λογικά, θα οδηγήσει σε διαφορετικές κλιμακωτές μορφές.** Ας μεταθέσουμε τις δύο πρώτες γραμμές του μητρώου, τότε βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \to r_2]{r_2 \to r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 5r_1]{r_2 \to r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & -4 & -3 \\ 0 & -16 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[r_3 \to r_3 - 2r_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to (-1/8) r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και το τελευταίο μητρώο είναι σε κλιμακωτή μορφή. Επιλύοντας το σύστημα που αντιστοιχεί στο τελευταίο μητρώο, το οποίο είναι ισοδύναμο του αρχικού συστήματος, βρίσκουμε με την προς τα πίσω αντικατάσταση

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + z &= 2 \\ y + \frac{1}{2} z &= \frac{3}{8} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &x = 2 - 3y - z = \frac{7 + 4t}{8} \\ &y = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} z = \frac{3 - 4t}{8} \\ &z = t \end{aligned}\right.$$

οπότε οι άπειρες σε πλήθος λύσεις του συστήματος είναι οι $x = (7 + 4t)/8$, $y = (3 - 4t)/8$, $z = t$ όπου το t διατρέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

2. Οι συντελεστές των πολυωνύμων είναι οι άγνωστοι.

(α΄) Το ζητούμενο πολυώνυμο είναι ένα $p(x) = ax^2 + bx + c$, οπότε λύνουμε το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} p(1) &= 2 \\ p(-1) &= 6 \\ p(2) &= 3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ a - b + c &= 6 \\ 4a + 2b + c &= 3 \end{aligned}\right\} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

απ΄ όπου με απαλοιφή παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & -3 & -21 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

με αντίστοιχο σύστημα

$$\left.\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ b &= -2 \\ c &= 3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &a = 1 \\ &b = -2 \\ &c = 3 \end{aligned}\right.$$

κατά συνέπεια το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το $p(x) = x^2 - 2x + 3$.

(β΄) Το ζητούμενο πολυώνυμο είναι ένα $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, οπότε και πάλι λύνουμε το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} q(1) &= 2 \\ q(-1) &= 6 \\ q(2) &= 3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} a + b + c + d &= 2 \\ -a + b - c + d &= 6 \\ 8a + 4b + 2c + d &= 3 \end{aligned}\right\} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Περιμένουμε απειρία λύσεων. Πράγματι με απαλοιφή παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & -13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

με αντίστοιχο σύστημα

$$\left.\begin{aligned} a + b + c + d &= 2 \\ b + d &= 4 \\ c + \frac{1}{2}d &= -\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} a + c &= -2 \\ b &= 4 - d \\ c &= -\frac{1+d}{2} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &a = \frac{d-3}{2} \\ &b = 4 - d \\ &c = -\frac{1+d}{2} \end{aligned}\right.$$

Για $d = \lambda$, μια πραγματική παράμετρος, τα πολυώνυμα τρίτου βαθμού που περιέχουν τα σημεία P, Q, R είναι τα

$$q_\lambda(x) = \frac{\lambda - 3}{2}x^3 + (4 - \lambda)x^2 - \frac{1 + \lambda}{2}x + \lambda.$$

.

3. Θεωρώντας το αντίστοιχο επαυξημένο μητρώο με τη διαδικασία της απαλοιφής βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 3 & b \\ 1 & 2 & \mu & c \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & b - 2a \\ 0 & 1 & \mu - 2 & c - a \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & b - 2a \\ 0 & 0 & \mu - 1 & c - b + a \end{pmatrix}.$$

Η τελευταία γραμμή καθορίζει την ύπαρξη, ή μη ύπαρξη λύσης/λύσεων, αφού η τρίτη εξίσωση του συστήματος που αντιστοιχεί στο κλιμακωτό μητρώο είναι η

$$(\mu - 1)z = c - b + a. \tag{1}$$

Η εξίσωση αυτή είτε έχει μοναδική λύση είτε έχει άπειρες λύσεις (είναι αόριστη). Διακρίνουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

(i) Αν $\mu - 1 \neq 0$, τότε το z υπολογίζεται μοναδικά ως

$$z = \frac{c - b + a}{\mu - 1}$$

και τα y και x υπολογίζονται με προς τα πίσω αντικατάσταση. Έτσι έχουμε μοναδική λύση αν και μόνο αν $\mu \neq 1$.

(ii) Αν $\mu - 1 = 0$ και $c - b + a = 0$, τότε κάθε πραγματική τιμή του z είναι λύση της (1) κατά συνέπεια για κάθε $t \in \mathbb{R}$ η

$$z = t, \qquad y = t + b - a, \qquad x = -3t + 2a - b$$

είναι λύση του συστήματος, συνεπώς έχουμε άπειρες λύσεις αν και μόνο αν $\mu = 1$ και $c = b - a$.

(iii) Αν $\mu - 1 = 0$ και $c - b + a \neq 0$, η εξίσωση (1) δεν έχει λύση, είναι αδύνατη, συνεπώς το σύστημα δεν έχει λύσεις αν και μόνο αν $\mu = 1$ και $c \neq b - a$.

4. Όπως προηγούμενα υπολογίζουμε μια κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου μητρώου του συστήματος

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & a^2 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -6 & 1 & 2 - 2a \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & b - a \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη γραμμή περιέχει οδηγό, είναι το 1 στη πρώτη στήλη, και η δεύτερη γραμμή περιέχει οδηγό, είναι το -6 στη δεύτερη στήλη με αποτέλεσμα αν υπάρχει μηδενική γραμμή αυτή θα είναι η τρίτη. Μπορούμε επομένως να σταματήσουμε τη διαδικασία της απαλοιφής στο σημείο αυτό έστω κι αν το μητρώο δεν είναι σε κλιμακωτή μορφή, (στη θέση του οδηγού στη δεύτερη γραμμή είναι το -6 και όχι το 1) και να μελετήσουμε την τρίτη γραμμή όπως στην προηγούμενη άσκηση. Έτσι

(i) Το σύστημα δεν έχει λύση αν η εξίσωση $(a^2 - 1)z = b - a$ δεν έχει λύση, και αυτό συμβαίνει αν $a = \pm 1$ και $a \neq b$.

(ii) Το σύστημα έχει μοναδική λύση αν η κλιμακωτή μορφή περιέχει οδηγό σε κάθε γραμμή, οπότε οι άγνωστοι προσδιορίζονται με μοναδικό τρόπο. Η πρώτη και η δεύτερη γραμμή περιέχουν οδηγούς, άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση αν η εξίσωση $(a^2 - 1)z = b - a$ έχει μοναδική λύση, και αυτό συμβαίνει αν $a \neq \pm 1$.

(ii) Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις αν η εξίσωση $(a^2 - 1)z = b - a$ έχει άπειρες λύσεις και αυτό συμβαίνει αν $a = \pm 1$ και $a = b$.

5.

$$E_1A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&4\\3&8&14\\2&6&11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&2&2\\2&6&11\end{pmatrix}$$

$$E_2E_1A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&2&2\\2&6&11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&2&2\\0&2&3\end{pmatrix}$$

$$E_3E_2E_1A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&2&2\\0&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&2&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_4E_3E_2E_1A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&2&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_5E_4E_3E_2E_1A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_6E_5E_4E_3E_2E_1A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Παρατήρηση 1. Αν $B=E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1$, τότε $BA=I$. Μπορεί να δειχθεί ότι $AB=I$, κατά συνέπεια το B είναι το αντίστροφο του A. Πράγματι

$$E_2E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_1E_2=E_2E_1$$

$$E_3E_2E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$E_4E_3E_2E_1=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1&0\\-3&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$E_5E_4E_3E_2E_1=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-1&0\\-3&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\-3&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$E_6E_5E_4E_3E_2E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-2\\-3&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\-5&3&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-2\\-5&3&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\-5/2&3/2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=B$$

και

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -5/2 & 3/2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -5/2 & 3/2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Στην τάξη δείξαμε (Παράδειγμα 4) πως ξεκινώντας από το δοσμένο μητρώο A με τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών βρίσκουμε μια κλιμακωτή μορφή R:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -8 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & -18 & 21 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -18 & 21 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 39 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -13/2 \end{pmatrix} = R.$$

Παρακάτω δείχνουμε πως μπορούμε να καταλήξουμε στην ίδια κλιμακωτή μορφή εκτελώντας διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς με τα στοιχειώδη μητρώα που αντιστοιχούν στις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών.

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -8 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix} = A_1$$

$$E_2 A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix} = A_2$$

$$E_3 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & -6 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & -18 & 21 \end{pmatrix} = A_3$$

$$E_4 A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & -18 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -18 & 21 \end{pmatrix} = A_4$$

$$E_5 A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -18 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 39 \end{pmatrix} = A_5$$

$$E_6 A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -13/2 \end{pmatrix} = R$$

έτσι

$$E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 A = R$$