ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2. Μητρώα

Παρατήρηση: Μυστικά του πολλαπλασιασμού

Πέρα από τον μηχανιστικό τρόπο εκτέλεσης του πολλαπλασιασμού μητρώων μέσω της (12) (διαφάνεια 10, Διάλεξη 2), η κατανόηση της δομής του γινομένου επιτρέπει την εξαγωγή ιδιαίτερα χρήσιμων συμπερασμάτων για το γινόμενο. Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα. Παριστώντας τις στήλες μητρώου ως μητρώα με μία στήλη, και τις γραμμές ως μητρώα με μία γραμμή, επειδή

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au+bw+cy & av+bx+cz \\ du+ew+fy & dv+ex+fz \end{pmatrix},$$

βλέπουμε ότι αφενός

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} y \quad \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} z \right) \tag{1}$$

απ' όπου έπεται ότι *οι στήλες του γινομένου είναι γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του πρώτου μητρώου*, και αφετέρου

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} w & x \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} y & z \end{pmatrix} c \\ \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} d + \begin{pmatrix} w & x \end{pmatrix} e + \begin{pmatrix} y & z \end{pmatrix} f \end{pmatrix} \tag{2}$$

απ' όπου έπεται ότι *οι γραμμές του γινομένου είναι γραμμικοί συνδυασμοί των γραμμών του δεύτερου μητρώου*. Για γενικά μητρώα ας επεκτείνουμε τον γνωστό συμβολισμό ως εξής: Για το $n \times m$ μητρώο Q γράφουμε, όπως πριν, $\mathbf{q}_j$ για την j-στήλη του Q και $\mathbf{q}^i$ για την i-γραμμή του Q, ως $1 \times m$ μητρώο, ώστε

$$Q = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{q}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}^1 \\ \mathbf{q}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}^n \end{pmatrix}.$$

Αν $A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}$ είναι ένα $n \times m$ μητρώο και $B = \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix}$ είναι ένα $m \times k$ μητρώο, μια προσεκτική ανάγνωση των (3.7), (3.8), (3.9) αποκαλύπτει για το γινόμενο $C = AB$ τα εξής:

(1) Κάθε στήλη του AB είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A με συντελεστές τα στοιχεία της αντίστοιχης στήλης του B, με άλλα λόγια αν

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_k \end{pmatrix} = C$$

τότε

$$\mathbf{c}_j = \mathbf{a}_1 b_{1j} + \mathbf{a}_2 b_{2j} + \cdots + \mathbf{a}_m b_{mj}, \qquad j = 1, 2, \dots, k \tag{3}$$

(2) Καθε γραμμή του AB είναι γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του B με συντελεστές τα στοιχεία της αντίστοιχης γραμμής του A, με άλλα λόγια αν

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^1 \\ \mathbf{c}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^n \end{pmatrix} = C$$

τότε

$$\mathbf{c}^i = \mathbf{b}^1 a_{i1} + \mathbf{b}^2 a_{i2} + \cdots + \mathbf{b}^m a_{im}, \qquad j = 1, 2, \ldots, k \tag{4}$$

(3) Παρατηρήστε ότι

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^1\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}^1\mathbf{b}_k \\ \mathbf{a}^2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^2\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}^2\mathbf{b}_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}^n\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^n\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}^n\mathbf{b}_k \end{pmatrix}.$$

Ασκήσεις

1. Αν

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

δείξτε ότι $A^2 = O$, και $B^3 = O$.

2. Να βρεθούν όλα τα 2×2 μητρώα της μορφής

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \qquad b \neq 0$$

τέτοια ώστε $M^2 = I$.

3. Να βρεθούν όλα τα 2×2 πραγματικά μητρώα που ικανοποιούν την εξίσωση $I + A^2 = O$, όπου O είναι τη μηδενικό μητρώο.

4. Οι ερωτήσεις που ακολουθούν αποσκοπούν στον έλεγχο κατανόησης των βασικών εννοιών και στοιχειωδών πράξεων σχετικών με μητρώα. Είναι της μορφής Σωστό/Λάθος (Σ Λ). Απαντάτε κυκλώνοντας κατάλληλα. Εκτιμήστε τη ρήση του Αϊνστάιν "Ο Θεός δεν παίζει ζάρια" και (ως κατ΄ εικόνα και καθ΄ ομοίωσιν πλάσματα) μην απαντάτε στην τύχη. Σκεφτείτε και επεξεργαστείτε τα δεδομένα πριν απαντήσετε. Ακόμα καλύτερα δικαιολογήστε την απάντησή σας.

   (α΄) (Σ Λ) Εάν A και B είναι μητρώα και $AB = BA$ τότε τα μητρώα είναι τετραγωνικά του ιδίου μεγέθους.

   (β΄) (Σ Λ) Εάν A, B, C είναι μητρώα του ιδίου μεγέθους και $A - C = B - C$, τότε $A = B$.

   (γ΄) (Σ Λ) Εάν για τα μητρώα A και B είναι $AB = BA$, τότε $A = B$.

   (δ΄) (Σ Λ) Εάν A, B, C είναι τετραγωνικά μητρώα του ιδίου μεγέθους και $AC = BC$, τότε $A = B$.

   (ε΄) (Σ Λ) Εάν για τα μητρώα A και B το $AB + BA$ ορίζεται, τότε τα μητρώα A, B είναι τετραγωνικά του ιδίου μεγέθους.

(ϛ΄) (Σ Λ) Έστω ότι για τα μητρώα A και B το AB ορίζεται. Εάν το A έχει μια γραμμή με μηδέν παντού, τότε το AB έχει μια γραμμή με μηδέν παντού.

(ζ΄) (Σ Λ) Έστω ότι για τα μητρώα A και B το AB ορίζεται. Εάν το A έχει μια στήλη με μηδέν παντού, τότε το AB έχει μια στήλη με μηδέν παντού.

(η΄) (Σ Λ) Έστω ότι για τα μητρώα A και B το AB ορίζεται. Εάν το B έχει μια γραμμή με μηδέν παντού, τότε το AB έχει μια γραμμή με μηδέν παντού.

(θ΄) (Σ Λ) Έστω ότι για τα μητρώα A και B το AB ορίζεται. Εάν το B έχει μια στήλη με μηδέν παντού, τότε το AB έχει μια στήλη με μηδέν παντού.

(ι΄) (Σ Λ) Εάν A, B είναι τετραγωνικά μητρώα του ιδίου μεγέθους, τότε

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

5. ΚΥΚΛΩΣΤΕ ΑΝΑΛΟΓΑ. Εάν

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

τότε η πράξη μεταξύ των εμπλεκομένων μητρώων ορίζεται. Εκεί όπου ορίζεται εκτελέστε τη.

(α΄) (Σ Λ) $AA^{\mathrm{T}}C$

(β΄) (Σ Λ) ACB

(γ΄) (Σ Λ) CAA^{T}

(δ΄) (Σ Λ) ADB

6. Θεωρώντας τα μητρώα με αντίστοιχα μεγέθη

μητρώο:	A	B	C	D	E
μέγεθος:	3×5	5×2	3×5	3×2	2×3

υπολογίστε το μέγεθος ή γράψτε “δο” (δεν ορίζεται) για κάθε ένα από τα μητρώα

AB	BA	$A-C$	$A^{\mathrm{T}}B$	$A^{\mathrm{T}}C$	$D^{\mathrm{T}}A$	$CB+D$	DE	$DD^{\mathrm{T}}+E^{\mathrm{T}}E$	$(A+C)BE$

7. Η ακολουθία των αριθμών **Fibonacci** ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3,$$

έτσι οι πρώτοι μερικοί όροι της ακολουθίας είναι

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Έστω

$$F = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Θέτοντας $f_0 = 0$, δείξτε ότι για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$ ισχύει

$$F^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

ΛΥΣΕΙΣ

2. Θέλουμε

$$
\begin{aligned}
M^2 = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & (a+c)b \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = c^2 = 1 \\ a + c = 0, \quad \text{αφού } b \neq 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ c = \mp 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

επομένως (τα άπειρα σε πλήθος) μητρώα που ικανοποιούν την $M^2 = I$ είναι της μορφής

$$
M_1 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{ή} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b_1, b_2 \neq 0.
$$

3. Θέλουμε

$$
\begin{aligned}
A^2 = -I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d)b \\ (a+d)c & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = d^2 + bc = -1 \\ (a+d)b = (a+d)c = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = d^2 & (1) \\ a^2 = -1 - bc & (2) \\ a + d = 0, \text{ ή } b = 0 & (3) \\ a + d = 0, \text{ ή } c = 0 & (4) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Αν $b = 0$, ή $c = 0$, τότε από την (2) έπεται ότι $a^2 = d^2 = -1$, το οποίο δεν ισχύει για πραγματικούς αριθμούς, κατά συνέπεια είναι $b \neq 0$ και $c \neq 0$, οπότε είναι $a + d = 0 \Rightarrow a = -d$, που είναι συμβατή με την (1), κατά συνέπεια καταλήγουμε ότι

$$
d = -a, \qquad \text{και} \qquad c = -\frac{1 + a^2}{b}
$$

επομένως (τα άπειρα σε πλήθος) μητρώα που ικανοποιούν την $A^2 = I$ είναι της μορφής

$$
A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\dfrac{1 + a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0.
$$

4. (α΄) Σ Λ Εάν A και B είναι μητρώα και $AB = BA$ τότε τα μητρώα είναι τετραγωνικά του ιδίου μεγέθους.

Το AB ορίζεται άρα αν το A είναι $n \times m$ το B θα πρέπει να είναι $m \times k$ και το AB είναι $n \times k$. Αφού το BA ορίζεται θα πρέπει $k = n$. Έτσι το AB είναι $n \times n$ και το BA είναι $m \times m$. Επειδή $AB = BA$ τα δύο μητρώα είναι του ιδίου μεγέθους άρα $n = m$, οπότε το A είναι $n \times n$ και το B είναι $n \times n$.

(β') Σ Λ Εάν A, B, C είναι μητρώα του ιδίου μεγέθους και $A - C = B - C$, τότε $A = B$.

$$\begin{aligned} A - C = B - C &\Rightarrow (A - C) + C = (B - C) + C \\ &\Rightarrow A + (-C + C) = B + (-C + C) \\ &\Rightarrow A + O = B + O \\ &\Rightarrow A = B. \end{aligned}$$

(γ') Σ Λ Εάν για τα μητρώα A και B είναι $AB = BA$, τότε $A = B$.

Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, τότε $AB = O$ και $BA = O$.

(δ') Σ Λ Εάν A, B, C είναι τετραγωνικά μητρώα του ιδίου μεγέθους και $AC = BC$, τότε $A = B$.

Αν $A \neq B$ και $C = O$, τότε $AC = BC = O$.

(ε') Σ Λ Εάν για τα μητρώα A και B το $AB + BA$ ορίζεται, τότε τα μητρώα A, B είναι τετραγωνικά του ιδίου μεγέθους.

Όπως στο (α').

(ϛ') Σ Λ Έστω ότι για τα μητρώα A και B το AB ορίζεται. Εάν το A έχει μια γραμμή με μηδέν παντού, τότε το AB έχει μια γραμμή με μηδέν παντού.

Εάν $\mathbf{a}^k$ είναι η k-γραμμή του A με μηδέν παντού, και $B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{pmatrix}$ (βλέπε Παρατήρηση στην εισαγωγή), τότε τα στοιχεία της k-γραμμής του γινομένου AB είναι τα γινόμενα

$$\mathbf{a}^k\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{a}^k\mathbf{b}_2, \quad \ldots, \quad \mathbf{a}^k\mathbf{b}_m$$

που είναι τα εσωτερικά γινόμενα

$$(\mathbf{a}^k)^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{b}_1, \quad (\mathbf{a}^k)^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{b}_2, \quad \ldots, \quad (\mathbf{a}^k)^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{b}_m$$

καθένα από τα οποία είναι ίσο με μηδέν αφού το $(\mathbf{a}^k)^{\mathrm{T}}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα.

(ζ') Σ Λ Έστω ότι για τα μητρώα A και B το AB ορίζεται. Εάν το A έχει μια στήλη με μηδέν παντού, τότε το AB έχει μια στήλη με μηδέν παντού.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

(η') Σ Λ Έστω ότι για τα μητρώα A και B το AB ορίζεται. Εάν το B έχει μια γραμμή με μηδέν παντού, τότε το AB έχει μια γραμμή με μηδέν παντού.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(θ') Σ Λ Έστω ότι για τα μητρώα A και B το AB ορίζεται. Εάν το B έχει μια στήλη με μηδέν παντού, τότε το AB έχει μια στήλη με μηδέν παντού.

Αν το B έχει μια μηδενική στήλη, το B^{T} έχει μια μηδενική γραμμή, οπότε το

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$$

έχει σύμφωνα με το (στ') μια μηδενική γραμμή, κατά συνέπεια το AB έχει μηδενική την αντίστοιχη στήλη. Διαφορετικά, αν το B έχει την k-στήλη $\mathbf{b}_k = \mathbf{0}$ (το μηδενικό διάνυσμα), τότε η k-στήλη του γινομένου AB είναι, από τον ορισμό του γινομένου μητρώων, το το διάνυσμα $A\mathbf{b}_k$ που είναι ίσο με το μηδενικό.

(ι') Σ Λ Εάν A, B είναι τετραγωνικά μητρώα του ιδίου μεγέθους, τότε $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

$$
\begin{aligned}
(A+B)^2 = (A+B)(A+B) &= A(A+B) + B(A+B) \\
&= A^2 + AB + BA + B^2 \\
&\neq A^2 + 2AB + B^2
\end{aligned}
$$

αφού γενικά $AB \neq BA$.

5. Το AA^{T} είναι 3×3, το C είναι 3×2 και το $D = C^{\mathrm{T}}$ είναι 2×3, οπότε

(α') $AA^{\mathrm{T}}C$ $\quad (3 \times 3) \cdot (3 \times 2)$ Ορίζεται.

(β') ACB $\quad (3 \times 1) \cdot (3 \times 2) \cdot (3 \times 1)$ Δεν ορίζεται.

(γ') CAA^{T} $\quad (3 \times 2) \cdot (3 \times 3)$ Δεν ορίζεται.

(δ') ADB $\quad (3 \times 1) \cdot (2 \times 3) \cdot (3 \times 1) = (3 \times 1) \cdot (2 \times 1)$ Δεν ορίζεται.

6. Αν

μητρώο :	A	B	C	D	E
μέγεθος :	3×5	5×2	3×5	3×2	2×3

τότε

AB	BA	$A - C$	$A^{\mathrm{T}}B$	$A^{\mathrm{T}}C$	$D^{\mathrm{T}}A$	$CB + D$	DE	$DD^{\mathrm{T}} + E^{\mathrm{T}}E$	$(A+C)BE$
3×2	δο	3×5	δο	5×5	2×5	3×2	3×3	3×3	3×3

7. Αν

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3,$$

και

$$F = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

δείχνουμε με επαγωγή ότι

$$F^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad f_0 = 0. \tag{5}$$

Για $n = 1$ από την (5) υπολογίζουμε

$$F^1 = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} = F$$

που ισχύει από τον ορισμό του F, αφού $f_0 = 0$.

Υποθέτουμε τώρα ότι για τυχαίο k έχουμε

$$F^k = \begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix},$$

και δείχνουμε ότι

$$F^{k+1} = \begin{pmatrix} f_{k+2} & f_{k+1} \\ f_{k+1} & f_k \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Πράγματι

$$\begin{aligned} F^{k+1} = FF^k &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{k+1} + f_k & f_k + f_{k-1} \\ f_{k+1} & f_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{k+2} & f_{k+1} \\ f_{k+1} & f_k \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

από τον ορισμό της ακολουθίας, που είναι η (6), κατά συνέπεια ο ισχυρισμός αποδείχτηκε.