ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη 7

Ευθύ άθροισμα
Χώροι με εσωτερικό γινόμενο
Ορθογώνιο συμπλήρωμα

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

12 Νοεμβρίου 2024

1. Ευθύ άθροισμα υποχώρων

Εάν X είναι ένας διανυσματικός χώρος και V, W είναι υπόχωροι του X ορίζουμε το **άθροισμα** των υποχώρων V και W

$$V + W = \{\mathbf{v} + \mathbf{w} : \mathbf{v} \in V \text{ και } \mathbf{w} \in W\}.$$

Παρατηρούμε ότι $V + W \subseteq X$, επιπλέον δείχνουμε ότι το $V + W$ είναι υπόχωρος του X. Πράγματι αν $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V + W$, τότε $\mathbf{a} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ και $\mathbf{b} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}'$ για κάποια $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ και $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$, και για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} &= \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w} + \mu\mathbf{v}' + \mu\mathbf{w}' \\ &= (\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}') + (\lambda\mathbf{w} + \mu\mathbf{w}') \\ &= \mathbf{v}'' + \mathbf{w}'' \end{aligned}$$

με $\mathbf{v}'' = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}' \in V$ και $\mathbf{w}'' = \lambda\mathbf{w} + \mu\mathbf{w}' \in W$, οπότε $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \in V + W$, κατά συνέπεια το $V + W$ είναι υπόχωρος του X.

Έστω ότι V και W είναι υπόχωροι του X, και έστω ότι $X = V + W$. Αν $\mathbf{x} \in X$ και $\mathbf{x} = \mathbf{v}+\mathbf{w}$, με $\mathbf{v} \in V$ και $\mathbf{w} \in W$, τότε για $\mathbf{u} \in V \cap W$ ισχύει επίσης ότι $\mathbf{x} = \mathbf{v}+\mathbf{u}+\mathbf{w}-\mathbf{u}$, με $\mathbf{v}+\mathbf{u} \in V$ και $\mathbf{w}-\mathbf{u} \in W$, δηλαδή η αναπαράσταση ενός διανύσματος του X ως άθροισμα ενός διανύσματος του V και ενός του W δεν είναι μοναδική. Αν όμως $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$, τότε μια τέτοια αναπαράσταση είναι μοναδική. Πράγματι αν $\mathbf{x} = \mathbf{v}+\mathbf{w} = \mathbf{v}'+\mathbf{w}'$ με $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ και $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$, τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (\mathbf{v}+\mathbf{w}) - (\mathbf{v}'+\mathbf{w}') \\ &= (\mathbf{v}-\mathbf{v}') + (\mathbf{w}-\mathbf{w}') \Rightarrow \mathbf{v}-\mathbf{v}' = \mathbf{w}'-\mathbf{w} \end{aligned}$$

οπότε $\mathbf{v}-\mathbf{v}' \in V \cap W$ και $\mathbf{w}'-\mathbf{w} \in V \cap W$, έτσι από την υπόθεση έπεται ότι $\mathbf{v}-\mathbf{v}' = \mathbf{0}$ και $\mathbf{w}'-\mathbf{w} = \mathbf{0}$, δηλαδή $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ και $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$.

Ορισμός 1

Αν V και W είναι υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου X, θα λέμε ότι ο X είναι **ευθύ άθροισμα** (direct sum) των V και W εάν

$$X = V + W \qquad \text{και} \qquad V \cap W = \{\mathbf{0}\}$$

Εάν ο X είναι ευθύ άθροισμα των V και W γράφουμε $X = V \oplus W$.

Το Θεώρημα επέκτασης της βάσης υπόχωρου (Θ.8, διάλεξη 7) μπορεί να διατυπωθεί και ως

Θεώρημα 1

Εάν ο X είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και V είναι ένας υπόχωρος του X, τότε υπάρχει υπόχωρος W του X ώστε $X = V \oplus W$.

Άσκηση 1

Έστω

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x+y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Δείξτε ότι

1. Το V με τις πράξεις του $\mathbb{R}^3$ αποτελεί υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$.
2. $\dim V = 2$.
3. Να βρεθεί υπόχωρος W του $\mathbb{R}^3$, ώστε $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.
4. Ποια είναι η διάσταση του W ($\dim W = ;$);
5. Είναι ο W ο μοναδικός υπόχωρος για τον οποίο $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

2. Εσωτερικό γινόμενο

Εάν $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ το γινόμενο $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ ορίζεται ως γινόμενο μητρώων και

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Το γινόμενο αυτό το γνωρίζουμε ως το **εσωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, και το συμβολίζουμε με $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, ή $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

Ορισμός 2

Εάν X είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος μια πραγματική συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ θα λέγεται **εσωτερικό γινόμενο** (inner product) εάν:

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ και $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$.
3. $\langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$.

Ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ συμβολίζεται και ως $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Λέγεται, έτσι, και **στικτό γινόμενο** (dot product), ή **βαθμωτό γινόμενο** (scalar product).

Παρατηρούμε ότι εάν $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}, \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} \rangle &= \langle \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle && \text{(από την (4))} \\
&= \lambda\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \mu\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle && \text{(από τις (2) και (3))} \\
&= \lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \mu\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle && \text{(από την (4)).}
\end{aligned}$$

Ορισμός 3

Ένας διανυσματικός χώρος X στον οποίο έχει οριστεί ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ λέγεται **χώρος με εσωτερικό γινόμενο** και γράφουμε $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Παράδειγμα 1 (Το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο)

Ο $\mathbb{R}^n$ με $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

1. $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$ και $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v})^{\mathrm{T}}\mathbf{w} = (\mathbf{u}^{\mathrm{T}} + \mathbf{v}^{\mathrm{T}})\mathbf{w} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{w} + \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}$.
3. $(\lambda\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \lambda u_1 v_1 + \lambda u_2 v_2 + \cdots + \lambda u_n v_n = \lambda(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n) = \lambda\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$.
4. $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}$ λόγω μεταθετικότητας του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{R}$.

Κατά συνέπεια η σχέση $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση 1

Εάν το A είναι ένα $n \times m$ μητρώο και το B ένα $m \times k$ μητρώο, με το γνωστό συμβολισμό για τις γραμμές και τις στήλες, από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού μητρώων έπεται ότι

$$AB = \begin{pmatrix} A_{1*}^{\mathrm{T}} B_{*1} & A_{1*}^{\mathrm{T}} B_{*2} & \cdots & A_{1*}^{\mathrm{T}} B_{*k} \\ A_{2*}^{\mathrm{T}} B_{*1} & A_{2*}^{\mathrm{T}} B_{*2} & \cdots & A_{2*}^{\mathrm{T}} B_{*k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n*}^{\mathrm{T}} B_{*1} & A_{n*}^{\mathrm{T}} B_{*2} & \cdots & A_{n*}^{\mathrm{T}} B_{*k} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \langle A_{1*}, B_{*1} \rangle & \langle A_{1*}, B_{*2} \rangle & \cdots & \langle A_{1*}, B_{*k} \rangle \\ \langle A_{2*}, B_{*1} \rangle & \langle A_{2*}, B_{*2} \rangle & \cdots & \langle A_{2*}, B_{*k} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle A_{n*}, B_{*1} \rangle & \langle A_{n*}, B_{*2} \rangle & \cdots & \langle A_{n*}, B_{*k} \rangle \end{pmatrix},$$

έτσι

$$AB = \left(A_{i*} \cdot B_{*j} \right) = \left(\langle A_{i*}, B_{*j} \rangle \right) = \left(A_{i*}^{\mathrm{T}} B_{*j} \right)$$

με $i = 1, 2, \ldots, n$ και $j = 1, 2, \ldots, k$.

Άσκηση 2

1. Δείξτε ότι η σχέση
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3. \tag{1}$$
ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$.
2. Δείξτε ότι
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{v}. \tag{2}$$

Άσκηση 3

Εάν A είναι ένα αντιστρέψιμο 3×3 μητρώο, δείξτε ότι η σχέση
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}, \tag{3}$$
όπου ``$\cdot$'' είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, ορίζει ένα εσωτρικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$. Σημειώνουμε ότι
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = (A\mathbf{u})^{\mathrm{T}} A\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A\mathbf{v}.$$

Παρατήρηση 2

Υπό το πρίσμα του αποτελέσματος της Άσκησης 3 βλέπουμε ότι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$ υλοποιείται και ως

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = I\mathbf{u} \cdot I\mathbf{v}$$

όπου I είναι το 3×3 ταυτοτικό μητρώο. Επιπλέον το εσωτερικό γινόμενο στην Άσκηση 2 δίνεται από τη σχέση (3) με

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Τα αποτελέσματα των Ασκήσεων 2 και 3 γενικεύονται και ισχύουν στον $\mathbb{R}^n$. Ειδικά αν A είναι ένα αντιστρέψιμο $n \times n$ μητρώο, τότε η σχέση

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A \mathbf{v}$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$.

Άσκηση 4

Εάν p και q είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ δύο με $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ και $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ ορίζουμε

$$\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Δείξτε ότι η σχέση αυτή είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{P}_2$.

Παράδειγμα 2

Στο χώρο $\mathscr{C}[a,b]$ των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a,b]$ η σχέση

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο. Πράγματι αν $f, g, h \in \mathscr{C}[a,b]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

- $$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

  από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος αφού $f^2(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)

Επιπλέον από τις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων και του ολοκληρώματος έπεται ότι

$$\langle f,f\rangle = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0 \overset{*}{\Leftrightarrow} f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b] \Leftrightarrow f = 0.$$

* *Αν η h είναι συνεχής στο $[a,b]$, $h(x) \geq 0$ και $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0$, τότε $h(x) = 0$ στο $[a,b]$.*

- Από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος

$$\langle f+g,h\rangle = \int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(f(x)h(x)+g(x)h(x)\big)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle.$$

-

$$\langle \lambda f,g\rangle = \int_a^b \lambda f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\langle f,g\rangle.$$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)

- Τέλος

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \langle g,f\rangle.$$

Κατά συνέπεια η (4) ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο $\mathscr{C}[a,b]$.

Ορισμός 4

Έστω ότι X είναι ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Θα λέμε ότι τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ του X είναι **ορθογώνια** (orthogonal) ή **κάθετα** (perpendicular) μεταξύ τους αν $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$. Αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι ορθογώνια γράφουμε $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$.

Για παράδειγμα αν $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ και $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, τότε

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (1)(-2)+(2)(1)+(3)(0) = -2+2 = 0,$$

επομένως τα δύο διανύσματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους, $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$.

Παράδειγμα 3

Ας συμβολίσουμε με $\mathbb{P}_n[-1,1]$ τον χώρο των πολυωνύμων βαθμού έως n περιορισμένων στο διάστημα $[-1,1]$. Μια βάση για τον χώρο αυτό είναι η $\mathscr{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Παρατηρούμε ότι

$$\langle x^i, x^j \rangle = \int_{-1}^{1} x^i x^j \, \mathrm{d}x = \frac{1}{i+j+1} x^{i+j+1} \Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{i+j+1} \left[1 - (-1)^{i+j+1}\right]$$

$i, j = 0, 1, \ldots, n$ ($x^0 = 1$). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\langle x^i, x^j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{αν } i+j \text{ είναι περιττός} \\ \dfrac{2}{i+j+1} & \text{αν } i+j \text{ είναι άρτιος} \end{cases}$$

Έτσι αν $i+j$ είναι περιττός αριθμός, τότε τα x^i και x^j είναι ορθογώνια μεταξύ τους στο διάστημα $[-1,1]$.

Στην περίπτωση μιγαδικού διανυσματικού χώρου, δηλαδή ενός διανυσματικού χώρου πάνω στο σώμα των μιγαδικών αριθμών, έχουμε

Ορισμός 5

Εάν X είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος μια συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ θα λέγεται **εσωτερικό γινόμενο** (inner product) εάν ισχύουν τα παρακάτω:

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ και $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$.
3. $\langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}$, για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$.

Όπου στην (4) με $\bar{z}$ συμβολίζουμε τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού z.

Παρατηρούμε ότι εάν $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$ και $\zeta, \xi \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}, \zeta \mathbf{v} + \xi \mathbf{w} \rangle &= \overline{\langle \zeta \mathbf{v} + \xi \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle} && \text{(από την (4))} \\
&= \overline{\zeta \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} + \overline{\xi \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle} && \text{(από τις (2) και (3))} \\
&= \bar{\zeta} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \bar{\xi} \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle && \text{(από την (4)).}
\end{aligned}$$

´Ασκηση 5

Αν $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ και $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ είναι διανύσματα στο $\mathbb{C}^n$ δείξτε ότι η σχέση

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := a_1 \overline{b_1} + a_2 \overline{b_2} + \dots + a_n \overline{b_n}$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο.

3. Νόρμα διανύσματος

Ορισμός 6

Εάν X είναι ένας διανυσματικός χώρος μια συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ λέγεται **νόρμα** (norm) εάν για κάθε $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ στο X ικανοποιούνται οι σχέσεις

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$ και $\|\mathbf{u}\| = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
2. $\|\lambda \mathbf{u}\| = |\lambda| \|\mathbf{u}\|$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$).
3. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Για $\mathbf{u} \in X$ ο (μη αρνητικός) πραγματικός αριθμός $\|\mathbf{u}\|$ λέγεται νόρμα του $\mathbf{u}$.

Η ιδιότητα (3) είναι η **τριγωνική ανισότητα**.

Παράδειγμα 4

Το μέτρο του $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ είναι νόρμα. Οι ιδιότητες (1) και (2) έπονται από την

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2} = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

όπου $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Για την (3) υπολογίζουμε,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \left(\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|\right)^2 \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται η (3) παίρνοντας ρίζες. Τη νόρμα (μέτρο) του $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ τη λέμε **$\boldsymbol{\ell}_2$-νόρμα** στο $\mathbb{R}^n$ και τη συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$, έτσι

$$\|\mathbf{a}\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right)^{1/2}. \tag{5}$$

Παράδειγμα 5

Αν $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\|\mathbf{a}\| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα. Πράγματι $\|\mathbf{a}\| \geq 0$, σαν άθροιμα μη αρνητικών ποσοτήτων, ενώ $\|\mathbf{a}\| = 0$ αν και μόνο αν $|a_k| = 0$, για όλα τα k, άρα ο νόμος (1) στον ορισμό της νόρμας ικανοποιείται. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\|\lambda\mathbf{a}\| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

από την οποία προκύπτει η (2). Η (3), η τριγωνική ανισότητα είναι άμεση συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας της απόλυτης τιμής

$$|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Τη νόρμα αυτή λέμε **$\boldsymbol{\ell_1}$-νόρμα** στο $\mathbb{R}^n$ και τη συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_1$.

Παράδειγμα 6

Αν $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\|\mathbf{a}\| = \max_{1 \le k \le n} |a_k|.$$

Οι συνθήκες (1) και (2) του ορισμού της νόρμας ικανοποιούνται η δε (3), η τριγωνική ανισότητα, έπεται από το γεγονός ότι για $k = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} |a_k + b_k| &\le |a_k| + |b_k| \\ &\le \max_{1 \le k \le n} |a_k| + \max_{1 \le k \le n} |b_k|, \end{aligned}$$

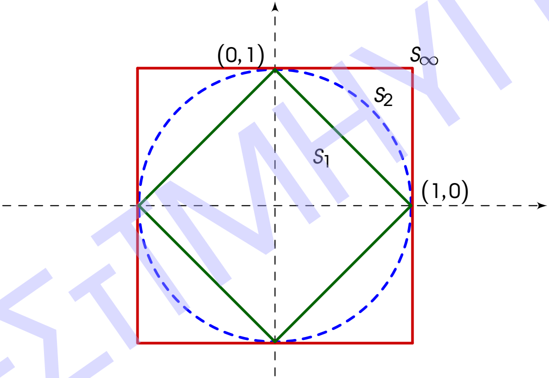
επομένως

$$\max_{1 \le k \le n} |a_k + b_k| \le \max_{1 \le k \le n} |a_k| + \max_{1 \le k \le n} |b_k|.$$

Η $\|\cdot\|$ λοιπόν είναι νόρμα. Συνήθως τη συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_\infty$ και τη λέμε **maximum-νόρμα** ή ℓ_∞**-νόρμα** στο $\mathbb{R}^n$.

Οι μοναδιαίες (ως προς τις τρεις διαφορετικές νόρμες) σφαίρες στο $\mathbb{R}^2$

$$S_1 = \{\mathbf{x} : \|x\|_1 = 1\}, \qquad S_2 = \{\mathbf{x} : \|x\|_2 = 1\}, \qquad S_\infty = \{\mathbf{x} : \|x\|_\infty = 1\}$$



Σχήμα: Οι μοναδιαίες σφαίρες S_1, S_2, S_∞ στο $\mathbb{R}^2$

Άσκηση 6

Έστω ότι το $\mathbf{a}$ είναι ένα τυχαίο αλλά σταθερό διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$.

1. Να δειχθεί ότι $\|\mathbf{a}\|_2 \leq \|\mathbf{a}\|_1$.
2. Να δειχθεί ότι $\|\mathbf{a}\|_\infty \leq \|\mathbf{a}\|_p \leq n^{1/p}\|\mathbf{a}\|_\infty$ για $p = 1, 2$.

Παρατήρηση 3

Για το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$ παρατηρούμε ότι

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\||\cos\theta| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \tag{6}$$

ισοδύναμα

$$|u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n| \leq \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}\sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} \tag{7}$$

(προσπαθήστε να την αποδείξετε). Στην πραγματικότητα η (6) είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz.

Θεώρημα 2 (Η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)

Εάν X είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$, τότε

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle^2 \leq \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$$

για όλα τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ του X. Ισότητα ισχύει στην ανισότητα αν και μόνο αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Απόδειξη. Για $t \in \mathbb{R}$ από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \mathbf{u}-t\mathbf{v},\mathbf{u}-t\mathbf{v}\rangle \\ &= \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle - 2t\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + t^2\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle. \end{aligned}$$

Αν $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ η προς απόδειξη ανισότητα ισχύει σαν ισότητα με τα δύο μέλη ίσα με μηδέν. Για $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ και $t=\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle/\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$ από την τλευταία ανισότητα παίρνουμε

$$0 \leq \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle - \frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle^2}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle} \Rightarrow \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle^2 \leq \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$$

που είναι το ζητούμενο. Ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν $\langle \mathbf{u}-t\mathbf{v},\mathbf{u}-t\mathbf{v}\rangle = 0$, ισοδύναμα, από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου $\mathbf{u}-t\mathbf{v}=\mathbf{0}$, ή $\mathbf{u}=t\mathbf{v}$, δηλαδή τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. $\square$

Θεώρημα 3

Σε ένα διανυσματικό χώρο X με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ η σχέση $\|\mathbf{u}\| = \langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle^{1/2}$, $\mathbf{u} \in X$ ορίζει νόρμα. Τη νόρμα αυτή λέμε **επαγόμενη νόρμα**.

Υπό το πρίσμα του τελευταίου αποτελέσματος επαναδιατυπώνουμε

Θεώρημα 4 (Η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)

Εάν X είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και νόρμα που ορίζεται με τη σχέση $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$, τότε

$$|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$$

για όλα τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ του X. Ισότητα ισχύει στην ανισότητα αν και μόνο αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Σημείωση. Στη περίπτωση μιγαδικού διανυσματικού χώρου με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ισχύει και πάλι η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz

$$|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|^2 \leq \langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle.$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν της πραγματικής περίπτωσης.

Άσκηση 7

Κατά την απόδειξη της ανισότητας Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz δείξαμε ότι $\|\mathbf{u}\|^2 - 2t\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + t^2\|\mathbf{v}\|^2 \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Από το συμπέρασμα που εξάγεται για την διακρίνουσα αυτού του τριωνύμου (ποιό;) προκύπτει μια άλλη απόδειξη της ανισότητας (πώς;).

Άσκηση 8

Αν με $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{C})$ συμβολίσουμε τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a,b]$ οι οποίες παίρνουν μιγαδικές τιμές, δείξτε ότι η σχέση

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο. Συμπεράνατε ότι η σχέση

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\int_a^b f(x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \tag{9}$$

είναι μια νόρμα στο $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{C})$.

4. Ορθογώνιο συμπλήρωμα

Ορισμός 7

Αν S είναι ένα υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου X με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το σύνολο όλων των διανυσμάτων του X τα οποία είναι ορθογώνια σε κάθε διάνυσμα του S λέγεται **ορθογώνιο συμπλήρωμα** (orthogonal complement) του S και συμβολίζεται με $S^{\perp}$, έτσι

$$S^{\perp} = \{\mathbf{x} \in X : \langle \mathbf{x}, \mathbf{s} \rangle = 0 \text{ για κάθε } \mathbf{s} \in S\}.$$

Αν το S είναι υποσύνολο του X, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^{\perp}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{s} \in S$, τότε

$$\begin{aligned} \langle \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \mathbf{s} \rangle &= \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{s} \rangle + \langle \mu \mathbf{y}, \mathbf{s} \rangle \\ &= \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{s} \rangle + \mu \langle \mathbf{y}, \mathbf{s} \rangle = 0 \end{aligned}$$

από τον ορισμό του $S^{\perp}$, κατά συνέπεια $\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \in S^{\perp}$. Δείξαμε λοιπόν ότι

Θεώρημα 5

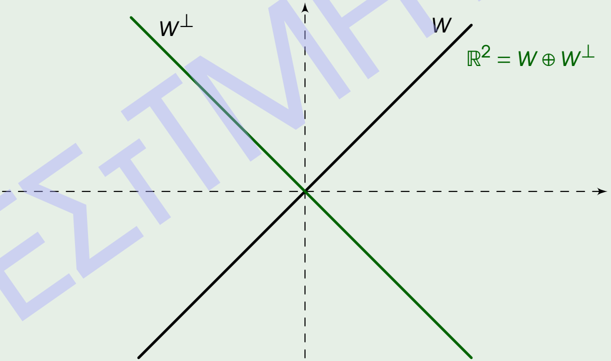
Αν το S είναι υποσύνολο του διανυσματικού χώρου X με εσωτερικό γινόμενο, το ορθογώνιο συμπλήρωμα $S^{\perp}$ του S είναι υπόχωρος του X.

Παράδειγμα 7

Η ευθεία με εξίσωση $y = x$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Να βρεθεί ο υπόχωρος $W^{\perp}$.



Παράδειγμα 7 (συνέχεια)

Αν $\begin{pmatrix} y & z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in W^{\perp}$, τότε

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = xy + xz = x(y+z) = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως $z = -y$. Κατά συνέπεια, ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, το ορθογώνιο συμπλήρωμα του W είναι το

$$W^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

δηλαδή η ευθεία με εξίσωση $y = -x$.

ʼΑσκηση 9

Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα του υποσυνόλου του $\mathbb{R}^2$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Παρατήρηση 4

Σε σχέση με το Παράδειγμα 7 παρατηρούμε ότι οι υπόχωροι W και $W^{\perp}$ αποτελούν ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων και

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-y \\ y-x \end{pmatrix},$$

δηλαδή το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ γράφεται σαν το άθροισμα $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$, όπου $\mathbf{w} \in W$ και $\mathbf{w}' \in W^{\perp}$. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται.

Θεώρημα 6

Αν το W είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου X πεπερασμένης διάστασης, με εσωτερικό γινόμενο, τότε $X = W \oplus W^{\perp}$, δηλαδή ο X είναι το ευθύ άθροισμα των W και $W^{\perp}$.

Πόρισμα 1

Αν το W είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου X διάστασης n, με εσωτερικό γινόμενο, τότε $\dim W^{\perp} = n - \dim W$.

Πρόταση 1

Αν το W είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου X διάστασης n, με εσωτερικό γινόμενο, τότε $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

Αναρωτιόμαστε αν θα μπορούσε να είναι διαφορετικό το συμπέρασμα αφού

$$X = W \oplus W^{\perp} \qquad \text{και} \qquad X = W^{\perp} \oplus (W^{\perp})^{\perp},$$

ως συνέπεια του Θεωρήματος 5.

Απόδειξη.

Δείχνουμε πρώτα ότι $(W^{\perp})^{\perp} \subseteq W$. Αν $\mathbf{x} \in (W^{\perp})^{\perp}$, τότε ως στοιχείο του χώρου X γράφεται ως $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$, όπου $\mathbf{w} \in W$ και $\mathbf{z} \in W^{\perp}$, βλέπε Θεώρημα 9.4. Έτσι υπολογίζουμε

$$\mathbf{0} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{w} + \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \|\mathbf{z}\|^2$$

αφού $\mathbf{w} \perp \mathbf{z}$, συνεπώς, από τον ορισμό της νόρμας, παίρνουμε $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, ισοδύναμα $\mathbf{x} = \mathbf{w} \in W$, δηλαδή $(W^{\perp})^{\perp} \subseteq W$. Απομένει να δείξουμε ότι $W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}$. Πράγματι αν $\mathbf{x} \in W$, τότε $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ για κάθε $\mathbf{y} \in W^{\perp}$, επομένως $\mathbf{x} \in (W^{\perp})^{\perp}$, που είναι το ζητούμενο. □

Ερώτημα: Αν X είναι διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και V, W είναι υπόχωροι του X τέτοιοι ώστε

$$X = V \oplus V^{\perp}, \qquad \text{και} \qquad X = V \oplus W,$$

είναι αλήθεια ότι $W = V^{\perp}$;

Παράδειγμα 8 (ή αντιπαράδειγμα)

Στο $\mathbb{R}^2$ θέτουμε

$$L_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}, \qquad L_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}, \qquad L_3 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Τότε $L_2 = L_1^{\perp}$ (γιατί;), $\mathbb{R}^2 = L_1 \oplus L_2$ και $\mathbb{R}^2 = L_1 \oplus L_3$, αφού

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix},$$

αλλά κάθε άλλο παρά $L_2 = L_3$.