ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2023–24

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 11η σειρά: Ορίζουσες

Επισκόπηση

- **Οι ιδιότητες της ορίζουσας** Έστω A ένα τετραγωνικό μητρώο.

  (Ο1) Εάν $A = I$, τότε $\det A = 1$, η ορίζουσα του ταυτοτικού μητρώου είναι ίση με 1.

  (Ο2) Εάν το μητρώο A' προκύπτει από το A με εναλλαγή δύο γραμμών του, τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο, δηλαδή $\det A' = -\det A$.

  (Ο3) Η ορίζουσα μητρώου ως συνάρτηση είναι γραμμική ξεχωριστά ως πρός κάθε γραμμή κρατώντας τις άλλες γραμμές σταθερές.

  (Ο4) $\det A^{\mathrm{T}} = \det A$, η ορίζουσα του ανάστροφου μητρώου είναι ίση με την ορίζουσα του μητρώου.

  (Ο5) Εάν οι δύο γραμμές του A είναι ίσες, τότε $\det A = 0$.

  (Ο6) Εάν οι δύο γραμμές του A είναι γραμμικά εξαρτημένες, τότε $\det A = 0$.

  (Ο7) Εάν σε μια γραμμή του A προστεθεί το πολλαπλάσιο άλλης γραμμής, η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει.

  Η αντίστοιχη εκδοχή για στήλη ή στήλες καθεμιάς από τις ιδιότητες (Ο2) – (Ο3) και (Ο5) – (Ο7) ισχύει επίσης.

- **Η ορίζουσα γινομένου** Εάν A και B είναι $n \times n$ μητρώα, τότε $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

- **Ορίζουσα και αντιστροφή** Εάν A είναι ένα $n \times n$ μητρώο, τότε

$$\boxed{\text{Το } A^{-1} \text{ υπάρχει} \;\Leftrightarrow\; \det A \neq 0 \;\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = n.}$$

- **Το ανάπτυγμα της ορίζουσας** Εάν $A = \left(a_{ij}\right)$ είναι ένα $n \times n$ μητρώο με $n \geq 2$, τότε η ορίζουσα του A δίνεται από τη σχέση

  1. **ως προς γραμμή** για $1 \leq i \leq n$
$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}.$$
  2. **ως προς στήλη** για $1 \leq j \leq n$
$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \det A_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj}.$$

Ασκήσεις

1. Άσκηση 25 §5.1 Stang. Εάν $A = \left(a_{ij}\right)$ είναι $n \times n$, $n > 1$, και $a_{ij} = ij$, δείξτε ότι $\det A = 0$.

2. Να βρεθεί η τιμή του k για την οποία
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1 - 3a_1 & 2b_2 - 3a_2 & 2b_3 - 3a_3 \\ 3c_1 - 4b_1 & 3c_2 - 4b_2 & 3c_3 - 4b_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3. Εάν
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = m,$$
υπολογίστε τις ορίζουσες

(α′) $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ (γ′) $\begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix}$ (ε′) $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$

(β′) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 3a_3 \\ b_1 & b_2 & 3b_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 9c_3 \end{vmatrix}$ (δ′) $\begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_2 \\ a_1 & a_3 & a_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}$ (ϛ′) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+a_1 & b_2+a_2 & b_3+a_3 \\ b_1-c_1 & b_2-c_2 & b_3-c_3 \end{vmatrix}$.

4. Εάν A είναι ένα 3×3 μητρώο και $\det A = -2$ να υπολογισθούν οι ορίζουσες

(α′) $\det(-3A)$ (γ′) $\det((2A)^{-1})$ (ε′) $\det(2A(3A)^{-1})$

(β′) $\det(2A^{-1})$ (δ′) $\det(2A(3A^{-1}))$ (ϛ′) $\det(2A(3A)^{\mathrm{T}})$.

5. Άσκηση 29 §5.1 Strang. Ποιο είναι το λάθος στην ακόλουθη απόδειξη ότι τα μητρώα προβολής P έχουν $\det P = 1$;

$$P = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}} \qquad \text{άρα} \qquad |P| = |A|\frac{1}{|A||A^{\mathrm{T}}|}|A^{\mathrm{T}}| = 1.$$

6. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της ορίζουσας μόνο, δίχως να αναπτύξετε, υπολογίσετε την

$$\begin{vmatrix} 111 & 211 & 311 & 411 \\ 112 & 212 & 312 & 412 \\ 113 & 213 & 313 & 413 \\ 114 & 214 & 314 & 414 \end{vmatrix}$$

7. Δείξτε ότι η ορίζουσα ενός μητρώου είναι ίση με το γινόμενο των οδηγών του μητρώου. **Υπόδειξη:** Βλέπε Παρατήρηση 4.4 Σημειώσεις.

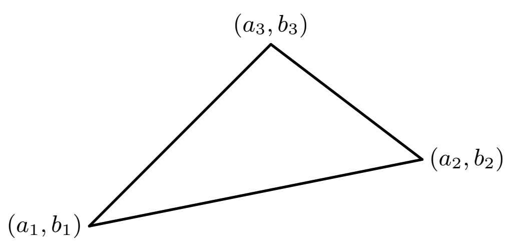
8. Εάν τα σημεία του επιπέδου (x_1, y_1), (x_2, y_2) και (x_3, y_3) είναι συνευθειακά, δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Αποδείξτε ότι η εξίσωση της ευθείας η οποία περιέχει τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) δίνεται με τη σχέση

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

10. Εάν (a_1, b_1), (a_2, b_2) και (a_3, b_3) είναι σημεία του θετικού ημιεπιπέδου ($y \geq 0$) όπως στο σχήμα δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία αυτά δίνεται από τη σχέση



$$E = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

11. **Η ορίζουσα Vandermonde.** Εάν x_1, x_2, x_3 είναι πραγματικοί αριθμοί δείξτε ότι

$$V_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1).$$

Γενικότερα αν $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι αριθμοί, αποδείξτε με επαγωγή ότι

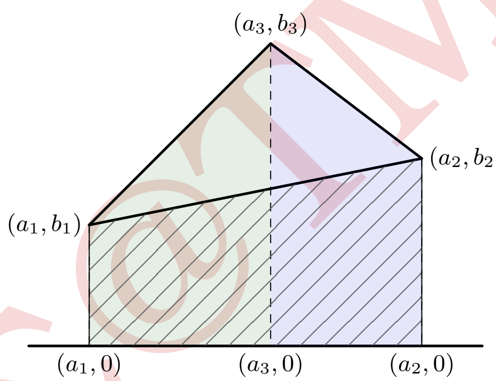
$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

Το σύμβολο $\prod$, είναι το αντίστοιχο του $\sum$, και δηλώνει το γινόμενο (product). Έτσι η ποσότητα στο δεξί μέλος της ισότητας είναι το γινόμενο των πρωτοβάθμιων όρων $(x_j - x_i)$ με $i < j$, βλέπε την 3×3 περίπτωση.
Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε κάθε στήλη με x_1 και αφαιρέστε την από την επόμενη στήλη στα δεξιά. Δείξτε ότι

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) = (x_n - x_1)\cdots(x_2 - x_1)V_{n-1}(x_2, \ldots, x_n).$$

ΛΥΣΕΙΣ μερικών από τις Ασκήσεις

10. Η Άσκηση 10 είναι το ¨κλειδί¨ για τις 8 και 9.



Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο σκιασμένων τραπεζίων μείον το εμβαδόν του τραπεζίου κάτω από το τρίγωνο. Έτσι

$$\begin{aligned} E &= \frac{(b_1+b_3)(a_3-a_1)}{2} + \frac{(b_3+b_2)(a_2-a_3)}{2} - \frac{(b_1+b_2)(a_2-a_1)}{2} \\ &= \frac{b_1a_3 - b_1a_1 + b_3a_3 - b_3a_1 + b_3a_2 - b_3a_3 + b_2a_2 - b_2a_3 - b_1a_2 + b_1a_1 - b_2a_2 + b_2a_1}{2} \\ &= \frac{a_1(b_2-b_3) - b_1(a_2-a_3) + (a_2b_3 - a_3b_2)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[a_1\begin{vmatrix} b_2 & 1 \\ b_3 & 1 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & 1 \\ a_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Σημείωση. Στο τρίγωνο του σχήματος η κορυφή (a_3, b_3) είναι πάνω από την ευθεία δια των σημείων (a_1, b_1) και (a_2, b_2). Αν η κορυφή (a_3, b_3) είναι κάτω από αυτή την ευθεία, τότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \frac{(b_1+b_2)(a_2-a_1)}{2} - \frac{(b_1+b_3)(a_3-a_1)}{2} - \frac{(b_3+b_2)(a_2-a_3)}{2}.$$

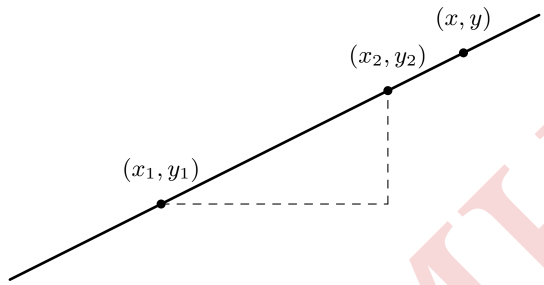
Έτσι, επειδή το εμβαδόν τριγώνου είναι ανεξάρτητο της θέσης του, στη γενική περίπτωση το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα (a_1, b_1), (a_2, b_2) και (a_3, b_3) είναι

$$E = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}\right|,$$

όπου $|\cdot|$ είναι η απόλυτη τιμή.

9. Αν (x, y) είναι τυχαίο σημείο της ευθείας η οποία διέρχεται δια των σημείων (x_1, y_1) και (x_2, y_2), τότε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές αυτά τα σημεία είναι ίσο με μηδέν, κατά συνέπεια το ζητούμενο έπεται από το αποτέλεσμα της Άσκησης 10. Βλέπε και Άσκηση 8.

   Διαφορετικά. **Γεωμετρική απόδειξη.**



   Για το τυχαίο σημείο (x, y) της ευθείας η οποία διέρχεται δια των σημείων (x_1, y_1) και (x_2, y_2) ισχύει

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Leftrightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

   ισοδύναμα

$$\begin{gathered}
(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1) \Leftrightarrow \\
y(x_2 - x_1) - y_1(x_2 - x_1) - x(y_2 - y_1) + x_1(y_2 - y_1) = 0 \Leftrightarrow \\
x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0 \Leftrightarrow \\
x\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\
\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0
\end{gathered}$$

   Γραμμοαλγεβρική απόδειξη. Αν (x, y) είναι τυχαίο σημείο της ευθείας, έστω $y = ax + b$, η οποία διέρχεται δια των σημείων (x_1, y_1) και (x_2, y_2), τότε

$$\left.\begin{aligned} ax - y + b = 0 \\ ax_1 - y_1 + b = 0 \\ ax_2 - y_2 + b = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   δηλαδή το σύστημα έχει μη μηδενική λύση, κατά συνέπεια το μητρώο των συντελεστών είναι μη αντιστρέψιμο, ισοδύναμα

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

   Για μια ανάλογη Γραμμοαλγεβρική απόδειξη στη 10 βλέπε την Παρατήρηση σελ. 26 της Διάλεξης 12.

8. Αν τα τρία σημεία είναι συνευθειακά, τότε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές αυτά τα σημεία είναι ίσο με μηδέν, κατά συνέπεια το ζητούμενο έπεται από το αποτέλεσμα της Άσκησης 10. Βλέπε και Άσκηση 9.