

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 8η σειρά (Διάλεξη 15+16)

Ανασκόπηση

- ◆ **Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt:** Αν σε χώρο X με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$ το $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ είναι ένα σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων, τότε η ακολουθία των διανυσμάτων που ορίζονται με τη σχέση

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} \\ \mathbf{w}_k &= \frac{\mathbf{u}_k - \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 - \dots - \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_{k-1} \rangle \mathbf{w}_{k-1}}{\|\mathbf{u}_k - \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 - \dots - \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_{k-1} \rangle \mathbf{w}_{k-1}\|}, \end{aligned} \quad (1)$$

$k = 2, \dots, n$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο στο X το οποίο παράγει τον ίδιο υπόχωρο με το S . Ειδικά αν το S είναι μια βάση του X , το $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση για τον X .

- ◆ Ένα τετραγωνικό μητρώο Q λέγεται **ορθογώνιο** αν

$$Q^T Q = Q Q^T = I$$

ισοδύναμα αν $Q^T = Q^{-1}$

ισοδύναμα αν οι στήλες του είναι ορθοκανονικά διανύσματα.

Ασκήσεις

1. Αν

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

να βρεθεί μία ορθοκανονική βάση για τον $W = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

2. Εξετάστε αν το άθροισμα ορθογωνίων μητρώων είναι ορθογώνιο.
3. Εξετάστε αν το γινόμενο ορθογωνίων μητρώων είναι ορθογώνιο.
4. Αν $\mathbf{q} = (\cos \theta \quad \sin \theta)^T$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα ορίζουμε το μητρώο $Q = I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T$. Για το Q δείξτε ότι
- (α) Οι στήλες του αποτελούν μια ορθοκανονική βάση για το \mathbb{R}^2 .
- (β) Ικανοποιεί τη σχέση $Q Q^T = I$ είναι δηλαδή ορθογώνιο.
- (γ) Ικανοποιεί τη σχέση $Q^2 = I$.
- (δ) Ανακλά κάθε διάνυσμα ως προς την ευθεία η οποία είναι ορθογώνια στο \mathbf{q} , δηλαδή κατά μήκος του $\mathbf{q}^\perp = (-\cos \theta \quad \sin \theta)^T$.