Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2023–24

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 7η σειρά (Διάλεξη 13+14)

## Ανασκόπηση

- **Η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz** Εάν $X$ είναι ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και νόρμα που ορίζεται με τη σχέση $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$ (**επαγόμενη νόρμα**), τότε

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

για όλα τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ του $X$. Ισότητα ισχύει στην ανισότητα αν και μόνο αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα

- **Το Πυθαγόρειο Θεώρημα.** Έστω $X$ ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$. Εάν $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n$ είναι διανύσματα του $X$ ανά δύο κάθετα μεταξύ τους, δηλαδή $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j\rangle = 0$, αν $i \neq j$, τότε

$$\|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_n\|^2 = \|\mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_2\|^2 + \cdots \|\mathbf{u}_n\|^2.$$

- **Ο νόμος του παραλληλογράμμου.** Έστω $X$ ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$. Δείξτε ότι

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\big(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\big)$$

για όλα τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ στο $X$.

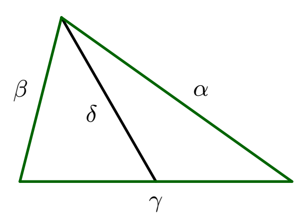
## Ασκήσεις

1. Εάν $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$, και $A$ είναι ένα αντιστρέψιμο $3\times 3$ μητρώο δείξτε ότι η σχέση
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = A\mathbf{u}\cdot A\mathbf{v}$$
ορίζει ένα εσωτρικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$. Σημειώνουμε ότι
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = A\mathbf{u}\cdot A\mathbf{v} = (A\mathbf{u})^{\mathrm{T}}A\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\mathbf{v}.$$

2. Αποδείξτε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\mathbb{R}^3$.

3. Αποδείξτε το νόμο του παραλληλογράμμου.

4. Για το τρίγωνο του σχήματος χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο αποδείξτε το Θεώρημα του




Απολλωνίου:
$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\gamma^2}{2} + 2\delta^2,$$
όπου $\delta$ είναι το μήκος της διαμέσου.

5. Εάν σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ τα **μη μηδενικά** διανύσματα $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$, είναι ανά δύο ορθογώνια, δηλαδή $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ για $i \neq j$, τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

6. Έστω ότι το $\mathbf{a}$ είναι ένα τυχαίο αλλά σταθερό διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$.

   (α΄) Να δειχθεί ότι $\|\mathbf{a}\|_2 \leq \|\mathbf{a}\|_1$.

   (β΄) Να δειχθεί ότι $\|\mathbf{a}\|_\infty \leq \|\mathbf{a}\|_p \leq n^{1/p}\|\mathbf{a}\|_\infty$ για $p = 1, 2$.

7. Σε χώρο $X$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\| \cdot \|$ δείξτε ότι για $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ ισχύει $\|a\mathbf{u} + b\mathbf{v}\| = \|b\mathbf{u} + a\mathbf{v}\|$ για όλα τα $a, b \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$.

8. Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα του υποσυνόλου του $\mathbb{R}^2$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

9. Έστω $0 < \alpha < 1$.

   (α΄) Δείξτε ότι το

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \alpha x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

   είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

   (β΄) Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $S$.

   (γ΄) Δείξτε ότι $\mathbb{R}^2 = S \oplus S^\perp$, επιβεβαιώνοντας το Θεώρημα 5.

   (δ΄) Επιβεβαιώστε το Πόρισμα 1.