

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 3η σειρά (Διάλεξη 05+06)

Οι ασκήσεις (1.-6.) που ακολουθούν αποσκοπούν στον έλεγχο κατανόησης των βασικών εννοιών και στοιχειωδών πράξεων σχετικών με μητρώα. Είναι της μορφής Σωστό/Λάθος (Σ Λ). Απαντάτε κυκλώνοντας κατάλληλα. Μην απαντάτε στην τύχη, σκεφτείτε και επεξεργαστείτε τα δεδομένα πριν απαντήσετε.

1. (Σ Λ) Εάν A, B είναι μητρώα του ίδιου μεγέθους και r είναι μια σταθερά, τότε

$$(rA + B)^T = rA^T + B^T.$$

2. (Σ Λ) Εάν A, B είναι αντιστρέψιμα μητρώα του ίδιου μεγέθους, τότε και το $A + B$ είναι αντιστρέψιμο.
3. (Σ Λ) Εάν το A είναι ένα αντιστρέψιμο μητρώο, τότε και το A^T είναι αντιστρέψιμο.
4. (Σ Λ) Εάν για τα μητρώα A και B το $A + B^T$ ορίζεται, τότε τα A και B είναι του ίδιου μεγέθους.
5. (Σ Λ) Εάν για τα μητρώα A και B το B είναι αντιστρέψιμο και το $A + B^{-1}$ ορίζεται, τότε τα A και B είναι του ίδιου μεγέθους.
6. (Σ Λ) Εάν για τα τετραγωνικά μητρώα A και B ισχύει $AB = O$, τότε $A = O$ ή $B = O$.

7. Αν

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{με} \quad ad - bc \neq 0,$$

τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

8. Έστω ότι το τετραγωνικό μητρώο A ικανοποιεί τη σχέση $A^2 - 4A + I = O$, όπου O είναι το μηδενικό μητρώο. Δείξτε το A αντιστρέφεται και ότι $A^{-1} = 4I - A$.
9. Εάν το A είναι τετραγωνικό μητρώο ώστε $A^{k+1} = O$, για κάποιο θετικό ακέραιο k , δείξτε ότι

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^k.$$

10. Εάν A και B είναι τετραγωνικά μητρώα ώστε $AB = O$ και το A είναι αντιστρέψιμο, δείξτε ότι $B = O$.
11. Έστω ότι το A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο. Αν $A^2 = O$, δείξτε ότι το A δεν αντιστρέφεται.

12. Θεωρούμε το διαγώνιο μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

με $a_i \neq 0$ για $i = 1, 2, \dots, n$. Δείξτε ότι το A είναι αντιστρέψιμο και βρείτε το A^{-1} .

13. Για τα 3×3 μητρώα μετάθεσης δείξτε ότι

(α) $M_k^{-1} = M_k^T$, για $k = 0, 1, \dots, 5$.

(β) Εφοδιασμένα με την πράξη του πολλαπλασιασμού αποτελούν ομάδα.

14. Εάν

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 \\ 0 & 1 & c_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ορίζουμε $N = C - I$. Δείξτε ότι $N^3 = O$. Δείξτε επίσης ότι το C αντιστρέφεται και ότι

$$C^{-1} = I - N + N^2 - N^3.$$

Υπόδειξη: $C = I + N$.

15. Έστω J_n το $n \times n$ μητρώο του οποίου όλα τα στοιχεία είναι 1. Δείξτε ότι

(α) $J_n^2 = nJ_n$

(β) $(I - J_n)^{-1} = I - \frac{1}{n-1}J_n$.