

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 2η σειρά (Διάλεξη 03+04)

Παρατήρηση: Μυστικά του πολλαπλασιασμού

Πέρα από τον μηχανιστικό τρόπο εκτέλεσης του πολλαπλασιασμού μητρώων μέσω της (3.11) (αρίθμηση από τις Σημειώσεις), η κατανόηση της δομής του γινομένου επιτρέπει την εξαγωγή ιδιαίτερα χρήσιμων συμπερασμάτων για το γινόμενο. Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα. Παριστώντας τις στήλες μητρώου ως μητρώα με μία στήλη, και τις γραμμές ως μητρώα με μία γραμμή, επειδή

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + bw + cy & av + bx + cz \\ du + ew + fy & dv + ex + fz \end{pmatrix},$$

βλέπουμε ότι αφενός

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} y \quad \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} z \right) \quad (1)$$

απ' όπου έπεται ότι οι στήλες του γινομένου είναι γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του πρώτου μητρώου, και αφετέρου

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u \ v)a + (w \ x)b + (y \ z)c \\ (u \ v)d + (w \ x)e + (y \ z)f \end{pmatrix} \quad (2)$$

απ' όπου έπεται ότι οι γραμμές του γινομένου είναι γραμμικοί συνδυασμοί των γραμμών του δεύτερου μητρώου. Για γενικά μητρώα ας επεκτείνουμε τον γνωστό συμβολισμό ως εξής: Για το $n \times m$ μητρώο Q γράφουμε, όπως πριν, \mathbf{q}_j για την j -στήλη του Q και \mathbf{q}^i για την i -γραμμή του Q , ως $1 \times m$ μητρώο, ώστε

$$Q = (\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \dots \ \mathbf{q}_m) = \begin{pmatrix} \mathbf{q}^1 \\ \mathbf{q}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}^n \end{pmatrix}.$$

Αν $A = (a_{ij})$ είναι ένα $n \times m$ μητρώο και $B = (b_{ij})$ είναι ένα $m \times k$ μητρώο, μια προσεκτική ανάγνωση των (3.7), (3.8), (3.9) αποκαλύπτει για το γινόμενο $C = AB$ τα εξής:

- (1) Κάθε στήλη του AB είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A με συντελεστές τα στοιχεία της αντίστοιχης στήλης του B , με άλλα λόγια αν

$$AB = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_m)(\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_k) = (\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \dots \ \mathbf{c}_k) = C$$

τότε

$$\mathbf{c}_j = \mathbf{a}_1 b_{1j} + \mathbf{a}_2 b_{2j} + \dots + \mathbf{a}_m b_{mj}, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (3)$$

- (2) Κάθε γραμμή του AB είναι γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του B με συντελεστές τα στοιχεία της αντίστοιχης γραμμής του A , με άλλα λόγια αν

$$AB = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_m) \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^1 \\ \mathbf{c}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^n \end{pmatrix} = C$$

τότε

$$\mathbf{c}^j = \mathbf{b}^1 a_{j1} + \mathbf{b}^2 a_{j2} + \cdots + \mathbf{b}^m a_{jm}, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (4)$$

(3) Παρατηρήστε ότι

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1 \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^1 \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}^1 \mathbf{b}_k \\ \mathbf{a}^2 \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^2 \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}^2 \mathbf{b}_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}^n \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^n \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}^n \mathbf{b}_k \end{pmatrix}.$$

Ασκήσεις

Οι ασκήσεις (1.-10.) που ακολουθούν αποσκοπούν στον έλεγχο κατανόησης των βασικών εννοιών και στοιχειωδών πράξεων σχετικών με μητρώα. Είναι της μορφής Σωστό/Λάθος (Σ Λ). Απαντάτε κυκλώνοντας κατάλληλα. Εκτιμήστε τη ρήση του Αϊνστάιν “Ο Θεός δεν παίζει ζάρια” και (ως κατ’ εικόνα και καθ’ ομοίωσιν πλάσματα) μην απαντάτε στην τύχη. Σκεφτείτε και επεξεργαστείτε τα δεδομένα πριν απαντήσετε. Ακόμα καλύτερα δικαιολογήστε την απάντησή σας.

1. (Σ Λ) Εάν A και B είναι μητρώα και $AB = BA$ τότε τα μητρώα είναι τετραγωνικά του ίδιου μεγέθους.
2. (Σ Λ) Εάν A, B, C είναι μητρώα του ίδιου μεγέθους και $A - C = B - C$, τότε $A = B$.
3. (Σ Λ) Εάν για τα μητρώα A και B είναι $AB = BA$, τότε $A = B$.
4. (Σ Λ) Εάν A, B, C είναι τετραγωνικά μητρώα του ίδιου μεγέθους και $AC = BC$, τότε $A = B$.
5. (Σ Λ) Εάν για τα μητρώα A και B το $AB + BA$ ορίζεται, τότε τα μητρώα A, B είναι τετραγωνικά του ίδιου μεγέθους.
6. (Σ Λ) Έστω ότι για τα μητρώα A και B το AB ορίζεται. Εάν το A έχει μια γραμμή με μηδέν παντού, τότε το AB έχει μια γραμμή με μηδέν παντού.
7. (Σ Λ) Έστω ότι για τα μητρώα A και B το AB ορίζεται. Εάν το A έχει μια στήλη με μηδέν παντού, τότε το AB έχει μια στήλη με μηδέν παντού.
8. (Σ Λ) Έστω ότι για τα μητρώα A και B το AB ορίζεται. Εάν το B έχει μια γραμμή με μηδέν παντού, τότε το AB έχει μια γραμμή με μηδέν παντού.
9. (Σ Λ) Έστω ότι για τα μητρώα A και B το AB ορίζεται. Εάν το B έχει μια στήλη με μηδέν παντού, τότε το AB έχει μια στήλη με μηδέν παντού.
10. (Σ Λ) Εάν A, B είναι τετραγωνικά μητρώα του ίδιου μεγέθους, τότε

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

11. ΚΥΚΛΩΣΤΕ ΑΝΑΛΟΓΑ. Εάν

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = (A \ B), \quad D = \begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix},$$

τότε η πράξη μεταξύ των εμπλεκόμενων μητρώων ορίζεται. Εκεί όπου ορίζεται εκτελέστε τη.

(α) (Σ Λ) $AA^T C$

(β) (Σ Λ) ACB

$$(\gamma) (\Sigma \Lambda) CAA^T$$

$$(\delta) (\Sigma \Lambda) ADB$$

12. Θεωρώντας τα μητρώα με αντίστοιχα μεγέθη

μητρώο:	A	B	C	D	E
μέγεθος:	3×5	5×2	3×5	3×2	2×3

υπολογίστε το μέγεθος ή γράψτε “δο” (δεν ορίζεται) για κάθε ένα από τα μητρώα

AB	BA	$A - C$	$A^T B$	$A^T C$	$D^T A$	$CB + D$	DE	$DD^T + E^T E$	$(A + C)BE$

13. Αν

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

δείξτε ότι $A^2 = O$, και $B^3 = O$.

14. Η ακολουθία των αριθμών **Fibonacci** ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3,$$

έτσι οι πρώτοι μερικοί όροι της ακολουθίας είναι

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

Έστω

$$F = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Θέτοντας $f_0 = 0$, δείξτε ότι για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$ ισχύει

$$F^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

15. Να βρεθούν όλα τα 2×2 μητρώα της μορφής

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad b \neq 0$$

τέτοια ώστε $M^2 = I$.