ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

CEID

Διάλεξη 22

18 Δεκεμβρίου 2023

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

Υπενθύμιση: Συζητάμε το **Αλγεβρικό Πρόβλημα Ιδιοτιμών (ΑΠΙ)**

1. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα
2. Τι είναι και γιατί ασχολούμαστε
3. Χαρακτηριστικό πολυώνυμο & θεώρημα Cayley-Hamilton
4. Μετασχηματισμοί ομοιότητας, ορθογώνιοι μετασχηματισμοί ομοιότητας
5. Διαγωνιοποίηση μητρώου και φασματικό ανάπτυγμα.

Σήμερα θα συζητήσουμε:

1. Ομοιότητα μητρώων.
2. Φασματικές ιδιότητες συμμετρικών πραγματικών και ερμιτιανών μητρώων.
3. Υπολογισμός δυνάμεων μητρώου, πολυωνύμων μητρώου και ιδιοτιμών τους.
4. Μέθοδος δύναμης για τον υπολογισμό ιδιοδιανυσμάτων (και ιδιοτιμών)
5. Ιδιοτιμές γινομένου μητρώων.
6. Επίλυση συστημάτων μέσω φασματικού αναπτύγματος.

Ανακεφαλαίωση

Βασικός ορισμός

Για ένα μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και μεταβλητή λ, η ορίζουσα $p(\lambda) = \det\left(\lambda I - \right)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n. Λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο και αν το γράψουμε

$$p(\lambda) \quad = \quad \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_1\lambda + \gamma_0$$

τότε $\gamma_{n-1} = -\mathrm{trace}\left(A\right)$ και $\gamma_0 = (-1)^n \det(A)$.

Προσοχή:

- Το πολυώνυμο έχει ακριβώς n ρίζες $\lambda_1, \cdots \lambda_n \in \mathbb{C}^n$ που αποκαλούμε **ιδιοτιμές** του .
- Για κάθε ιδιοτιμή λ, υπάρχει **ιδιοδιάνυσμα** $x \in \mathbb{C}^n$ τ.ώ. $Ax = \lambda x$.
- Ισχύει ότι $p(A) = 0$ **(θεώρημα Cayley-Hamilton)**.
- τα ιδιοζεύγη (ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα) μητρώων παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο σε πληθώρα εφαρμογών.

Ιδιοτιμές (επανάληψη και συνέχεια)

- Ιδιοτιμές του A είναι οι n ρίζες του χ.π.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

- Φάσμα είναι το σύνολο των ιδιοτιμών. Συχνά συμβολίζεται $\sigma(A)$ ή $\Lambda(A)$.
- Μπορούμε να γράψουμε

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\mu_2}\cdots(\lambda - \lambda_k)^{\mu_k}$$

όπου οι τιμές $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ είναι όλες διαφορετικές. Τότε

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = n$$

και η τιμή μ_j ονομάζεται αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_j.

Διαγωνιοποίηση μητρώου (επανάληψη) I

Έστω ότι γνωρίζουμε n ιδιοζεύγη (λ_j, x_j) του $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1, Ax_2 = \lambda_2 x_2, \ldots, Ax_n = \lambda_n x_n$$

Συλλέγουμε τους όρους και διατυπώνουμε τις σχέσεις με μητρώα:

$$A[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [x_1 \ldots, x_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

Επομένως

$$AX = X\Lambda,$$

όπου $\Lambda = \mathrm{diag}([\lambda_1, \ldots, \lambda_n])$ και $X = [x_1 \ldots, x_n]$.

<u>ΠΡΟΣΕΞΤΕ</u> Αν το X είναι αντιστρέψιμο,

$$X^{-1}AX = \Lambda,$$

δηλ. χρησιμοποιώντας τα μητρώα X (με στήλες τα δεξιά ιδιοδιανύσματα) και X^{-1} (με στήλες του X^{-*} τα αριστερά ιδιοδιανύσματα) διαγωνιοποιήσαμε το A.

> Κάθε μητρώο για το οποίο υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα χαρακτηρίζεται ως διαγωνιοποιήσιμο, ειδάλλως λέγεται μη διαγωνιοποιήσιμο.

<u>Θεώρημα</u>: Ένα μητρώο είναι διαγωνιοποιήσιμο αν και μόνον αν το ελάχιστο πολυώνυμο του μητρώου έχει απλές ρίζες.
<u>Μετασχηματισμός ομοιότητας</u>: (υπενθύμιση) Για οποιοδήποτε αντιστρέψιμο X, ο μετασχηματισμός $A \rightarrow X^{-1}AX$ αποκαλείται μετασχηματισμός ομοιότητας.

Ομοιότητα μητρώων και ιδιότητες I

Ομοιότητα μητρώων

Δύο μητρώα $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ λέγονται όμοια αν υπάρχει αντιστρέψιμο $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιο ώστε $P^{-1}AP = B$.

Αν τα μητρώα A, B είναι όμοια τότε έχουν ίδια:

- τάξη
- ορίζουσα και ίχνος
- χαρακτηριστικό πολυώνυμο, ιδιοτιμές και γεωμετρική τους πολλαπλότητα.
- ελάχιστο πολυώνυμο

Ενδιαφέρουσα ιδιότητα: Αν $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τότε τα γινόμενα $F = AB$ και $G = BA$ θα έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Απόδειξη: Αν ένα από τα , B είναι αντιστρέψιμο, έστω το A, τότε τα F, G είναι όμοια ($A^{-1}(AB)A = BA$).. Αν κανένα από τα μητρώα δεν είναι αντιστρέψιμα, έστω ότι $x \neq 0$ για το οποίο $Bx = 0$. Άρα $ABx = 0$ άρα το 0 είναι ιδιοτιμή του AB. Επίσης υπάρχει $y \neq 0$ τ.ώ. $Ay = 0$. Άρα $(BA)y = 0$, άρα το 0 είναι ιδιοτιμή και του BA. Προσοχή: Οι ιδιοτιμές του γινομένου δεν είναι ίσες με τα γινόμενα των ιδιοτιμών.

Πολλαπλές ιδιοτιμές και ελλειμματικά μητρώα

- Σε κάθε απλή ιδιοτιμή (αλγ. πολλ/τας ίσης με 1) αντιστοιχούν ένα δεξιό και ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα.
- Τι γίνεται όταν μια ιδιοτιμή, π.χ. λ_j, έχει αλγ. πολλ/τα $\mu_j > 1$?
- Το κρίσιμο ερώτημα είναι κατά πόσον υπάρχουν μ_j γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα[1]
- Είναι κρίσιμο γιατί αν για κάθε ιδιοτιμή υπάρχουν τόσα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα όσα και η αλγεβρική της πολλαπλότητα, τότε το μητρώο δεν είναι ελλειμματικό, άρα είναι διαγωνιοποιήσιμο.
- Επίσης τότε μπορούμε με τα ιδιοδιανύσματα να κατασκευάσουμε βάση για όλον το διανυσματικό χώρο ($\mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{C}^n$) που μπορεί να έχει πλεονεκτήματα συγκριτικά με την τυπική βάση.

[1] Στη συνέχεια θα εννοούμε τα δεξιά ιδιοδιανύσματα, αλλά το ίδιο ισχύει για τα αριστερά.

Τα πραγματικά συμμετρικά $(A = A^\top)$ καθώς και τα μιγαδικά ερμιτιανά $(A = \bar{A}^\top)$ μητρώα έχουν πολλές ευχάριστες ιδιότητες που διευκολύνουν σημαντικά σε πολλές περιπτώσεις.

Αν το μητρώο είναι ερμιτιανό, $A^\top = A$ και τότε αν λ είναι ιδιοτιμή,

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x, A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow x^* A^\top = \bar{\lambda} x^* \\ \Rightarrow (x^* A)x &= \bar{\lambda}\|x\|^2 = x^*(Ax) = \lambda\|x\|^2 \end{aligned}$$

Αν το μητρώο είναι ερμιτιανό, $A^* = A$ και τότε αν λ είναι ιδιοτιμή,

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x, A = A^* \in \mathbb{C}^{n\times n} \Rightarrow x^* A^* = \bar{\lambda} x^* \\ \Rightarrow (x^* A)x &= \|x\|^2\bar{\lambda} = x^*(Ax) = \lambda\|x\|^2 \end{aligned}$$

άρα, επειδή $\|x\| \neq 0$,

$$\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξαμε ότι:

Οι ιδιοτιμές των ερμιτιανών και των πραγματικών συμμετρικών μητρώων είναι όλες πραγματικές. Επίσης, αν το μητρώο είναι πραγματικό και συμμετρικό, $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε και τα ιδιοδιανύσματα είναι πραγματικά.

Έστω ότι $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και ότι $\lambda \neq \mu$ είναι δύο διακριτές ιδιοτιμές του και ότι

$$
\begin{aligned}
Ax = \lambda x, \quad Ay &= \mu y\\
y^\top Ax = \lambda y^\top x &= y^\top A^\top x\\
(Ay)^\top x = \mu y^\top x \Rightarrow \mu(y^\top x) &= \lambda(y^\top x)
\end{aligned}
$$

οπότε είτε $\lambda = \mu$ ή $y^\top x = 0$. Αποδείξαμε ότι

Τα ιδιοδιανύσματα ενός πραγματικού συμμετρικού μητρώου που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι πάντοτε ορθογώνια μεταξύ τους.

Τι μπορούμε να πούμε για τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε πολλαπλές ιδιοτιμές?

Περιοριζόμαστε στην πραγματική περίπτωση, $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Έστω ότι $Aq_1 = \lambda_1 q_1$ όπου επιλέξαμε το q_1 να είναι μοναδιαίο. Τότε μπορούμε να επιλέξουμε τις στήλες του μητρώου $Q_1 = [q_1, \star, \cdots, \star]$ ώστε $Q_1^\top Q_1 = I$. Δηλαδή, οι υπόλοιπες στήλες του Q_1 επελέγησαν ορθογώνιες στο q_1 (κάτι που μπορούμε να υλοποιήσουμε χωρίς μεγάλη δυσκολία, π.χ. με τη διαδικασία Gram-Schmidt).

Άρα

$$
\begin{aligned}
AQ_1 &= [\lambda_1 q_1, \star, \cdots, \star] = \overbrace{[q_1, \star, \cdots, \star]}^{Q_1}[\lambda_1 e_1, \star, \cdots, \star] \\
Q_1^\top A Q_1 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & \star & \star & \cdots & \star \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & \star & \star & \cdots & \star \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cccc} \lambda_1 & \star & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & \star & \star & \cdots & \star \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & \star & \star & \cdots & \star \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

όπου $A_2 \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Έστω ότι μία ιδιοτιμή του A_2 είναι η λ_2 (που μπορεί να είναι ίση ή διαφορετική του λ_1). Μπορούμε να κατασκευάσουμε το μητρώο

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \star & \cdots & \star \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε $A_2 q_2 = \lambda_2 q_2$ και το Q_2 είναι ορθογώνιο. Επομένως

$$(Q_1^\top A Q_1)Q_2 = Q_2 \left(\begin{array}{cc|ccc} \lambda_1 & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_3 & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right)$$

άρα

$$Q_2^\top(Q_1^\top A Q_1)Q_2 = \left(\begin{array}{cc|ccc} \lambda_1 & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_3 & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right)$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, ανεξαρτήτως των πολλαπλοτήτων των ιδιοτιμών, θα έχουμε υπολογίσει ορθογώνια μητρώα $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ τέτοια ώστε

$$Q_{n-1}^\top \cdots Q_2^\top Q_1^\top A Q_1 Q_2 \cdots Q_{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & 0 & \lambda_3 & \star & \cdots \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ιδιότητες ιδιοζευγών συμμετρικών/ερμιτιανών μητρώων VI

Όπως γνωρίζουμε, το γινόμενο ορθογώνιων μητρώων είναι και αυτό ορθογώνιο, επομένως το $Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_{n-1}$ είναι ορθογώνιο.

Αποδείξαμε ότι για κάθε συμμετρικό μητρώο A, υπάρχει ορθογώνιο μητρώο Q τέτοιο ώστε το $Q^\top AQ = T$ να είναι άνω τριγωνικό και να περιέχει τις ιδιοτιμές του A στη διαγώνιο. Λόγω συμμετρίας του , $(Q^\top AQ)^\top = T^\top = Q^\top AQ = T$ επομένως το T είναι τριγωνικό και συμμετρικό άρα θα είναι διαγώνιο!

Επομένως, ανεξάρτητα από τις ενδεχόμενες πολλαπλότητες των ιδιοτιμών:

$$\boxed{\text{κάθε πραγματικό συμμετρικό μητρώο είναι διαγωνιοποιήσιμο.}}$$

Παρατηρήσεις:

- Στην παραπάνω απόδειξη, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ορθομοναδιαία μητρώα αντί για ορθογώνια, δηλ. $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοια ώστε $U^* U = I$. Τότε δεν χρειάζεται να υποθέσουμε ότι το μητρώο είναι συμμετρικό και μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε μητρώο A, υπάρχει ορθομοναδιαίο μητρώο U τέτοιο ώστε το $U^* AU = T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ να είναι άνω τριγωνικό.

Ιδιότητες ιδιοζευγών συμμετρικών/ερμιτιανών μητρώων VII

Κάθε συμμετρικό πραγματικό ή ερμιτιανό μητρώο διαθέτει ακριβώς n ιδιοδιανύσματα που είναι κάθετα μεταξύ τους. Δηλαδή διαθέτει πλήρες σύνολο ορθογώνιων ιδιοδιανυσμάτων.

$$A[q_1, \ldots, q_n] = [q_1, \ldots, q_n]\Lambda \Leftrightarrow [q_1, \ldots, q_n]^\top A[q_1, \ldots, q_n] = \Lambda$$

$$Q^\top A Q = \Lambda$$

Φασματικό ανάπτυγμα πραγματικού συμμετρικού/μιγαδικού ερμιτιανού μητρώου

- Αν $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με ιδιοζεύγη $\{(\lambda_i, q_i), i = 1, .., n\}$ τότε $A = \lambda_1 q_1 q_1^\top + \cdots \lambda_n q_n q_n^\top$
- Αν $A = A^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με ιδιοζεύγη $\{(\lambda_i, q_i), i = 1, .., n\}$ τότε $A = \lambda_1 q_1 q_1^* + \cdots \lambda_n q_n q_n^*$

Σύνοψη ιδιοτήτων πραγματικών συμμετρικών και ερμιτιανών μητρώων

Αν $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ή $A = A^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τότε

- όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές,
- υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, $\{q_1, \ldots, q_n\}$, που είναι βάση για τον χώρο,
- τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους, άρα $Q^* Q = I$,
- τα ιδιοδιανύσματα είναι πραγματικά αν το μητρώο είναι πραγματικό,
- το μητρώο είναι διαγωνιοποιήσιμο,
- $Q^* A Q = \Lambda$.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα δυνάμεων μητρώου

- Για κάθε A, αν $Ax = \lambda x$ τότε $A^k x = \lambda^k x$
- ομοίως $\gamma A^j x + \delta A^k x = \gamma \lambda^j x + \delta \lambda^k x$
- άρα αν οι ιδιοτιμές του A είναι $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ τότε οι ιδιοτιμές του πολυωνύμου $q(A) = \gamma_s A^s + \cdots + \gamma_0 I$, είναι

$$\begin{array}{rcl} q(\lambda_1) & = & \gamma_s \lambda_1^s + \cdots + +\gamma_1 \lambda_1 + \gamma_0 I \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q(\lambda_n) & = & \gamma_s \lambda_n^s + \cdots + \gamma_1 \lambda_n + \gamma_0 I \end{array}$$

δηλ. οι ιδιοτιμές του $q(A)$ είναι οι τιμές $\{q(\lambda_1), \ldots., q(\lambda_n)\}$.

Συμπεράσματα

- Επομένως αν γνωρίζουμε τις ιδιοτιμές του A μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές για οποιοδήποτε πολυώνυμο $q(A)$.
- Τα ιδιοδιανύσματα του $q(A)$ είναι ίδια με τα ιδιοδιανύσματα του A.

Διαχείριση δυνάμεων μητρώου μέσω διαγωνιοποίησης

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και ότι γνωριζουμε X, Λ όπως πριν, δηλ. $X^{-1}AX = \Lambda$.

$$\begin{aligned} A &= X\Lambda X^{-1} \\ A^k &= (X\Lambda X)^k = (X\Lambda X^{-1})(X\Lambda X^{-1})\cdots(X\Lambda X^{-1}) \\ &= X\Lambda(X^{-1}X)\Lambda(X^{-1}X)\Lambda\cdots(X^{-1}X)\Lambda X^{-1} \\ &= X\Lambda^k X^{-1}. \end{aligned}$$

<u>Παρατήρηση:</u> Ο υπολογισμός του A^k ανάγεται στον εύκολο υπολογισμό του Λ^k και σε δύο επιμέρους πολλαπλασιασμούς μητρώων, π.χ. $X\Lambda^k \to (X\Lambda^k)X^{-1}$.

Πέραν του υπολογισμού του A^k, η διάσπαση του μητρώου σε $A = X\Lambda X^{-1}$ διευκολύνει στην διερεύνηση του παρακάτω ζητήματος.

Πώς συμπεριφέρεται το A^k για μεγάλες τιμές του k?

- Υπάρχει κάτι το ιδιαίτερο?
- Υπάρχει όριο, δηλ. κάποιο B τ.ω. $\lim_k A^k = B$ υπό την έννοια ότι $\forall \epsilon > 0, \exists \hat{k}$ τ.ώ. $\|A^k - B\| < \epsilon, \forall k > \hat{k}$?
- Ποιό είναι αυτό?

Παράδειγμα Ι

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{-k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό για οποιοδήποτε k επιθυμούμε, προκύπτει το ζητούμενο, αφού στρογγυλέψουμε

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0.5062 & -0.4938 & 0 \\ -0.4938 & 0.5062 & 0 \\ -0.4938 & 0.4938 & 0.0123 \end{pmatrix}, A^{10} = \begin{pmatrix} 0.5000 & -0.5000 & 0 \\ -0.5000 & 0.5000 & 0 \\ -0.5000 & 0.5000 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

Οι τιμές έχουν υποστεί στρογγύλευση.

Παράδειγμα II

Καθώς $k \longrightarrow \infty$,

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{-k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

οι όροι στο διαγώνιο μητρώο Λ^k που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές $|\lambda| < 1$ τείνουν στο 0, επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{k\longrightarrow\infty} A^k &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> Τα παραπάνω αποτελέσματα ισχύουν μόνον όταν έχουμε ένα εμπλεκόμενο μητρώο και δυνάμεις του.

Γενικά - δύο αρνητικά αποτελέσματα και ένα που θα εξετάσουμε:

- $\Lambda(A+B) \neq \Lambda(A) + \Lambda(B)$
- υπάρχουν $\lambda \in \Lambda(AB)$ τέτοια ώστε $\lambda \neq \lambda_i(A)\lambda_j(B)$ για κανένα i, j

Το πρώτο δεν εκπλήσσει, εξάλλου $\det(A) + \det(B) \neq \det(A+B)$.

Σχετικά με το γινόμενο: Θυμηθείτε ότι $\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$. Για τις ιδιοτιμές δεν ισχύει κάτι αντίστοιχο με την 1η ισότητα. Υπάρχει όμως κάτι αντίστοιχο με τη δεύτερη ισότητα.

Στη συνέχεια εξετάζουμε πως συνδέονται οι ιδιοτιμές $\Lambda(AB)$ με τις ιδιοτιμές $\Lambda(BA)$.

Ιδιοτιμές γινομένου μητρώων (προαιρετικό)

Θα επεκτείνουμε το αποτέλεσμα ότι πο ιδιοτιμές του AB είναι ίδιες με τις ιδιοτιμές του BA. Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Προσοχή, τα μητρώα A, B δεν είναι κατ' ανάγκη τετραγωνικά, το γινόμενό τους όμως πρέπει να είναι! Τότε αν

$$X = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \Rightarrow X^{-1} = \begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & 0_{m,n} \\ B & 0_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{m,m} & 0_{m,n} \\ B & BA \end{pmatrix}$$

Έστω ότι $m \geq n$, τότε

$$(\lambda_1(AB), \ldots, \lambda_n(AB), \lambda_{n+1}(AB), \ldots \lambda_m(AB), \overbrace{0, \ldots 0}^{n}) = (\lambda_1(BA), \ldots, \lambda_n(BA), \underbrace{0, \ldots 0}_{m})$$

επομένως οι ιδιοτιμές του AB είναι ίδιες με τις ιδιοτιμές του BA συν επιπλέον μία μηδενική ιδιοτιμή πολλαπλότητας $m - n$.

$$\Lambda(AB) = \Lambda(BA) \cup \{0\}$$

Υπολογισμός ιδιοζευγών (για πολύ μικρά προβλήματα)

1. Υπολογισμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Δαπανηρή και αριθμητικά προβληματική διαδικασία για μεγάλα προβλήματα.
2. Υπολογισμός των ριζών του (που είναι οι ιδιοτιμές). Αν $n \geq 5$ τότε δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος υπολογισμού των ριζών και πρέπει να χρησιμοποιηθεί (επαναληπτικός) αλγόριθμος προσέγγισης ριζών πολυωνύμου[2].
3. Για κάθε ιδιοτιμή, επίλυση του $(A - \lambda I)x = 0$ και επιλογή των ιδιοδιανυσμάτων (ανεύρεση των ειδικών λύσεων). Αλγόριθμος εύρεσης μηδενοχώρου. Η ΤΕΤΡΙΜΜΕΝΗ ΛΥΣΗ $x = 0$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑ

Για κάθε ιδιοτιμή λ_j, συνήθως ενδιαφέρει ένα σύνολο από γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που είναι βάση για το null$(\lambda_j I - A)$. Αυτά είναι ειδικές λύσεις του $(\lambda I - A)x = 0$. Συνήθως τα διανύσματα επιλέγονται κανονικοποιημένα.
Η μέθοδος που περιγράψαμε είναι μόνο για μικρά προβλήματα και δεν χρησιμοποιείται: Στην πράξη (π.χ. στη MATLAB) χρησιμοποιούνται ειδικοί αλγόριθμοι (συνάρτηση eig) για την εύρεση των ιδιοτιμών (πχ. αλγόριθμος QR). Μάλιστα, το χ.π. υπολογίζεται μετά από κλήση στην eig για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και με υπολογισμό των συντελεστών της δυναμομορφής από την παραγοντοποιημένη μορφή.
Δηλαδή, η διαδικασία που ακολουθείται έχει την αντίθετη φορά από αυτήν που χρησιμοποιούμε εδώ[3].

---

[2] Η αδυναμία αυτή αποτελεί ένα βασικό εύρημα των Μαθηματικών του 19ου αιώνα (Abel, Rufffini, και Galois)

[3] Η αριθμητική επίλυση του ΑΠΙ είναι ένα σημαντικό επιστημονικό αντικείμενο των περιοχών της Υπολογιστικής Γραμμικής Άλγεβρας και της Αριθμητικής Ανάλυσης.

Μέθοδος δύναμης

Πρόκειται για μια απλή μέθοδο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμα και για πολύ μεγάλα μητρώα (υπο περιορισμούς). Με τη μέθοδο περοσεγγίζουμε ένα ιδιοδιάνυσμα κάθε φορά (αυτό που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη σε απόλυτη τιμή ιδιοτιμή).

Αν η μέγιστη σε απόλυτη τιμή ιδιοτιμή, έστω $\lambda_{\max}$, ενός $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι μοναδική με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα q_1, και έστω $x \in \mathbb{C}^n$ τυχαίο, τ.ω. $x^* q_1 \neq 0$, τότε η ακολουθία των διανυσματων $\{Ax, A^2x, \ldots, A^kx, \ldots\}$ τείνει σε διάνυσμα του ιδιόχωρου του $\lambda_{\max}$.

Σε περίπτωση που η μέγιστη σε απόλυτη τιμή ιδιοτιμή είναι μοναδική, τότε τείνει σε διάνυσμα συγγραμμικό του q_1. (προσεγγίζεται το μέγιστο ιδιοδιάνυσμα!)

$$A^k x = \lambda_1^k(\gamma_1 q_1 + (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k + \cdots$$

Όπως φαίνεται, για επαρκώς μεγάλο k, η κατεύθυνση q_1 θα υπερτερεί, και με βάση κάποια κριτήρια, το $\frac{A^k x}{\|A^k x\|}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως προσέγγιση του q_1. Η διαδικασία είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική αν $|\lambda_1|$ είναι πολύ μεγαλύτερο από το $\max\{|\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\}$.

Επίσης για μεγάλα k, το πηλίκο $\left(\frac{x^* A^k x}{x^* x}\right)^{1/k}$ θα προσεγγίζει τη μέγιστη ιδιοτιμή.

Επίλυση γραμμικού συστήματος μέσω φασματικού αναπτύγματος

Αν γνωρίζουμε τα X, Λ ώστε $X^{-1}AX = \Lambda$ και αναζητούμε το x τ.ώ. $Ax = b$,

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ X^{-1}AXX^{-1}x &= X^{-1}b \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} x &= X\Lambda^{-1}X^{-1}b \\ &= \frac{1}{\lambda_1}x_1(y_1^*b) + \frac{1}{\lambda_2}x_2(y_2^*b) + \cdots \frac{1}{\lambda_n}x_n(y_n^*b) \end{aligned}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ Ο τρόπος αυτός επίλυσης σπάνια συμφέρει ...
πιο χρήσιμο είναι η πληροφορία που παρέχει αναδεικνύοντας ορισμένα χαρακτηριστικά της λύσης! π.χ. πως μεγεθύνονται οι παράγοντες που αντιστοιχούν σε όρους όπου $y_j^*b \neq 0$ και η απόλυτη τιμή $|\lambda_j|$ είναι πολύ μικρή (αν είναι 0, το μητρώο δεν αντιστρέφεται).

Συμπληρωματικά θέματα (δεν συζητήθηκαν στην τάξη)

ΚΑΛΕΣ ΓΙΟΡΤΕΣ !!!!

Για κάθε πολυώνυμο p βαθμού n, υπάρχει μητρώο $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με χ.π. ίδιο με p.

Το $p(z) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ είναι το χ.π. του

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix},$$ το συνοδευτικό μητρώο του p.

(υπολ. ριζών πολυωνύμου βαθμού n) $\equiv$ (υπολ. ιδιοτιμών συνοδευτικού μητρώου)

Ιδιοδιανύσματα και μεταθετικότητα

Γνωρίζουμε ότι γενικά $A \neq BA$. Υπάρχουν προφανώς ειδικές περιπτώσεις που η μεταθετικότητα ισχύει (π.χ. διαγώνια μητρώα). Τι άλλο μπορούμε να πούμε?

<u>Θεώρημα</u> Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι διαγωνιοποιήσιμα με τα ίδια ιδιοδιανύσματα, δηλ.

$$\exists X \text{ τ.ώ. } X^{-1}AX = \Lambda_A, \quad X^{-1}BX = \Lambda_B.$$

τότε $AB = BA$. Επίσης, αν $AB = BA$ τότε υπάρχει κοινός ((διαγωνιοποιητής)) X.

Συμμετρικά θετικά ορισμένα μητρώα

Πολλά μητρώα στις εφαρμογές έχουν την ιδιότητα που θα συζητήσουμε τώρα.
Το αντίστοιχο των ((θετικών αριθμών)) στην περίπτωση των μητρώων!

Ορισμός

Δίνεται συμμετρικό $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε Οι παρακάτω ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

1. Οι ιδιοτιμές του A είναι όλες θετικές.
2. Για $k = 1, \ldots, n$, $\det A_{1:k,1:k} > 0$.
3. Για κάθε $x \neq 0$, $x^\top Ax > 0$.
4. Αν $A = LU$ είναι η παραγοντοποίηση LU του A, όλοι οι οδηγοί (τα διαγώνια στοιχεία του U) είναι θετικοί.

Αν ισχύει μία από αυτές, το μητρώο καλείται συμμετρικό θετικά ορισμένο (ΣΘΟ).

Όταν ένα μητρώο είναι ΣΘΟ τότε

- όλα τα στοιχεία στη διαγώνιο είναι θετικά.
- είναι αντιστρέψιμο.
- υπάρχει κάτω τριγωνικό L τέτοιο ώστε $A = LL^\top$.

Κανονική μορφή Jordan

Τι κάνουμε όταν το μητρώο δεν είναι διαγωνιοποιήσιμο? Δεν υπάρχει παραγοντοποίηση $A = Q\Lambda Q^{-1}$.
Πόσο απλό μπορούμε να κάνουμε γενικό μητρώο A με μετασχηματισμό ομοιότητας?

Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, υπάρχει μητρώο $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιο ώστε

$$X^{-1}AX = J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_q \end{pmatrix}$$

- q είναι το πλήθος των γ.α. ιδιοδιανυσμάτων του A.
- Σε κάθε ιδιοτιμή αντιστοιχούν όσα υπομητρώα Jordan είναι η γεωμετρική πολλαπλότητά της.
- Το άθροισμα των διαστάσεων των υπομητρώων Jordan για μία ιδιοτιμή είναι ίσο με την αλγεβρική πολλαπλότητά της.
- Κάθε J_i αποκαλείται απλό (υπο)μητρώο Jordan και έχει τη μορφή

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k_i\times k_i}, \quad \text{όπου} \sum_{i=1}^{q} k_i = n.$$

Παρατηρήσεις

Καλά νέα 1) Η μορφή Jordan αποκαλύπτει τη φασματική δομή του μητρώου. 2) Αποτελεί μία σημαντική κανονική μορφή μητρώου (υπάρχουν και άλλες).

Κακά νέα Αν και ενδιαφέρουσα από μαθηματικής άποψης, υπάρχουν εγγενείς δυσκολίες στον υπολογισμό της μορφής Jordan.

Τι γίνεται στην πράξη Αναζητούμε άλλες κανονικές μορφές.

Σημαντικές κανονικές μορφές

Schur υπάρχει πάντα ορθομοναδιαίο Q τέτοιο ώστε $Q^*AQ = R$ είναι άνω τριγωνικό.

SVD υπάρχουν πάντα ορθομοναδιαία U, V τέτοια ώστε το $U^*AV = \Sigma$ να είναι διαγώνιο (με μη αρνητικά στοιχεία!)