ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη (IX) 17-18

Υπόχωροι παραγόμενοι από μητρώο
Τάξη μητρώου
Η δομή της λύσης συστήματος

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

28 Νοεμβρίου 2023

1. Οι τέσσερις υπόχωροι παραγόμενοι από μητρώο

Έστω ότι A είναι ένα $n \times m$ μητρώο και ας θεωρήσουμε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, όπου $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα. Το ερώτημα κατά πόσον το σύστημα έχει λύση είναι ισοδύναμο με το αν υπάχει $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ ώστε $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ισοδύναμα αν το $\mathbf{b}$ είναι η εικόνα κάποιου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ μέσω της απεικόνισης $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, η οποία ορίζεται με τη σχέση

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Κατά συνέπεια ένα $n \times m$ μητρώο μπορεί να ιδωθεί σαν μια απεικόνιση του $\mathbb{R}^m$ στο $\mathbb{R}^n$ και από τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού μητρώων έπεται ότι αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ τότε

$$T(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = A(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda A\mathbf{x} + \mu A\mathbf{y} = \lambda T(\mathbf{x}) + \mu T(\mathbf{y})$$

δηλαδή η απεικόνιση είναι γραμμική. Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ σημαντικό, όπως θα δούμε, για την επίλυση συστημάτων. Θυμίζουμε ότι το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση αν και μόνον αν το $\mathbf{b}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A, ισοδύναμα, σε σχέση με την απεικόνιση T, αν το $\mathbf{b}$ είναι η εικόνα κάποιου $\mathbf{x}$ μέσω της T, δηλαδή το $\mathbf{b}$ περιέχεται στο πεδίο τιμών της T. Έτσι σε αναλογία με τις συναρτήσεις έχουμε

Ορισμός 1

Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο ορίζουμε

1. Την **εικόνα** (range) του A

$$\operatorname{range} A = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}.$$

2. Τον **μηδενόχωρο** (null space) του A

$$\operatorname{null} A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

■ Παρατηρούμε ότι $\operatorname{range} A \subseteq \mathbb{R}^n$ και ότι ένα διάνυσμα $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ περιέχεται στο $\operatorname{range} A$ αν και μόνον αν υπάρχει $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ ώστε $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, ισοδύναμα

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}_1 x_1 + \mathbf{c}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{c}_m x_m$$

όπου με $\mathbf{c}_j$ συμβολίζουμε τις στήλες του A. Κατά συνέπεια

$$\operatorname{range} A = \operatorname{span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m\}.$$

Επειδή κάθε διάνυγμα διανυσμάτων είναι διανυσματικός υπόχωρος έπεται ότι $\operatorname{range} A$ **είναι διανυσματικός υπόχωρος του** $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 2

Τον υπόχωρο $\operatorname{range} A$ λέμε και **χώρο στηλών** (column space) του A και ενίοτε συμβολίζουμε με $C(A)$.

Σημειώνουμε ότι η διάστασή του είναι το πολύ n, δηλαδή $\dim(\operatorname{range} A) \leq n$.

■ Όμοια $\operatorname{null} A$ **είναι υπόχωρος του** $\mathbb{R}^m$. Πράγματι αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα του $\operatorname{null} A$, και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$A(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \lambda A\mathbf{u} + \mu A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{0} + \mu\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

κατά συνέπεια $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in \operatorname{null} A$, ισοδύναμα το $\operatorname{null} A$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.

Παρατήρηση 1

Μια άμεση συνέπεια του Θεωρήματος (5.2) είναι ότι αν το A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο τότε οι ισχυρισμοί

1. Το A είναι αντιστρέψιμο.
2. $\operatorname{null} A = \{\mathbf{0}\}$.

είναι ισοδύναμοι.

Παρατήρηση 2

Όμοια, για το $n \times m$ μητρώο A το

$$\operatorname{range} A^{\mathrm{T}} = \{A^{\mathrm{T}}\mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n\} = C(A^{\mathrm{T}})$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, και παράγεται από τις στήλες του A^{T}, ισοδύναμα από τις γραμμές του A. Για τον λόγο αυτό τον υπόχωρο $\operatorname{range} A^{\mathrm{T}}$ λέμε και **χώρο γραμμών** (row space) του A και συμβολίζουμε με $R(A)$. Επίσης τον διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$

$$\operatorname{null} A^{\mathrm{T}} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : A^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \mathbf{0}\},$$

λέμε **αριστερό μηδενόχωρο** του A, αφού αν $\mathbf{y} \in \operatorname{null} A^{\mathrm{T}}$, τότε

$$\mathbf{y}^{\mathrm{T}}A = (A^{\mathrm{T}}\mathbf{y})^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}.$$

Στη συνέχεια μέσω παραδειγμάτων παρουσιάζουμε ένα συστηματικό τρόπο εύρεσης των τεσσάρων υποχώρων μητρώου.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί ο χώρος στηλών και ο μηδενόχωρος του μητρώου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ο χώρος στηλών $\operatorname{range} A$ ή $C(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ κατά συνέπεια παράγεται από το πολύ τρεις στήλες του A, επομένως οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες. Επειδή η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R_0 αναδεικνύει τη δομή του A αναζητάμε την (ακμ) R_0 του A.

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_0.$$

παράδειγμα συνέχεια

Αν με $\mathbf{c}_j$ και $\mathbf{c}'_j$, $j = 1,2,3,4$ συμβολίσουμε τις στήλες του A και R_0 αντίστοιχα, βλέπουμε ότι οι $\mathbf{c}'_1$ και $\mathbf{c}'_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες ενώ

$$\mathbf{c}'_3 = -\mathbf{c}'_1 + 3\mathbf{c}'_2, \qquad \text{και} \qquad \mathbf{c}'_4 = \mathbf{c}'_1 + \mathbf{c}'_2. \tag{1}$$

Αν L είναι το μητρώο ώστε $LA = R_0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + x_3\mathbf{c}_3 + x_4\mathbf{c}_4 = \mathbf{b} \\
LA\mathbf{x} &= L(x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + x_3\mathbf{c}_3 + x_4\mathbf{c}_4) = L\mathbf{b} \\
x_1 L\mathbf{c}_1 &+ x_2 L\mathbf{c}_2 + x_3 L\mathbf{c}_3 + x_4 L\mathbf{c}_4) = L\mathbf{b} && \text{(από γραμμικότητα)} \\
R_0\mathbf{x} &= x_1\mathbf{c}'_1 + x_2\mathbf{c}'_2 + x_3\mathbf{c}'_3 + x_4\mathbf{c}'_4 = L\mathbf{b} && (L\mathbf{c}_j = \mathbf{c}'_j) \\
(x_1 - x_3 + x_4)\mathbf{c}'_1 &+ (x_2 + 3x_3 + x_4)\mathbf{c}'_2 = L\mathbf{b} && \text{(από την (1))} \\
L^{-1}((x_1 - x_3 + x_4)\mathbf{c}'_1 &+ (x_2 + 3x_3 + x_4)\mathbf{c}'_2) = L^{-1}L\mathbf{b} \\
(x_1 - x_3 + x_4)L^{-1}\mathbf{c}'_1 &+ (x_2 + 3x_3 + x_4)L^{-1}\mathbf{c}'_2 = \mathbf{b} \\
(x_1 - x_3 + x_4)\mathbf{c}_1 &+ (x_2 + 3x_3 + x_4)\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} && (L^{-1}\mathbf{c}'_j = \mathbf{c}_j).
\end{aligned}$$

παράδειγμα συνέχεια

Κατά συνέπεια μια βάση για τον χώρο στηλών $C(A)$ ή $\mathrm{range}\,A$ αποτελούν οι γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A $\mathbf{c}_1$ και $\mathbf{c}_2$, όπως και του R_0, έτσι

$$\mathrm{range}\,A = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = C(A).$$

Αναζητώντας στη συνέχεια μια βάση για τον $\mathrm{null}\,A$, θεωρούμε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, δηλαδή παίρνουμε $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Τότε

$$x_1 - x_3 + x_4 = 0 \qquad \text{και} \qquad x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$

οπότε

$$x_1 = x_3 - x_4 \qquad \text{και} \qquad x_2 = -3x_3 - x_4$$

και η λύση του συστήματος είναι

παράδειγμα συνέχεια

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_4 \\ -3x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -3x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_4 \\ -x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\operatorname{null} A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

αφού τα δύο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
Σημειώνουμε ότι το τελευταίο αποτέλεσμα μπορούμε να το πάρουμε από τις ισοδυναμίες

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow LA\mathbf{x} = L\mathbf{0} \Leftrightarrow R_0\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί ο χώρος γραμμών και ο αριστερός μηδενόχωρος του μητρώου A του Παραδείγματος (7.1).

Πρώτη προσέγγιση. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία που ακολουθήθηκε στο Παράδειγμα (7.1) αλλά τώρα για το μητρώο A^{T}. Έτσι βρίσκουμε

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_0'.$$

Δύο από τις τρεις στήλες του R_0' είναι γραμμικά ανεξάρτητες, έτσι επιλέγοντας την πρώτη και την δεύτερη παίρνουμε

$$\operatorname{range} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = C(A^{\mathrm{T}}) = R(A).$$

παράδειγμα συνέχεια

Για τον αριστερό μηδενόχωρο του A λύνουμε το σύστημα $A^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=\mathbf{0}$, ισοδύναμα

$$R_0'\mathbf{x}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x_1+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-t \\ x_2=-t \\ x_3=t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

κατά συνέπεια

$$\operatorname{null} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Δεύτερη προσέγγιση. Σε κάθε βήμα της απαλοιφής μια γραμμή προκύπτει από τη πρόσθεση σε αυτή πολλαπλασίου άλλης γραμμής, συνεπώς κάθε γραμμή του R_0 είναι γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του A, και αντιστρόφως. Αν με $\mathbf{r}_j$ και $\mathbf{r}_j'$, $j=1,2,3$ συμβολίσουμε τις γραμμές του A και R_0 αντίστοιχα, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_1'+\mathbf{r}_2', & \qquad \mathbf{r}_1' &= \mathbf{r}_2, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_1', & \qquad \mathbf{r}_2' &= \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2, \end{aligned}$$

παράδειγμα συνέχεια

κατά συνέπεια $\operatorname{range} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{span}\{\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2'\} = \operatorname{span}\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\} = R(A)$,ή

$$\operatorname{range} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\} = R(A).$$

Το μητρώο L που αναγάγει το A στο R_0 είναι το

$$L = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

(γιατί;). Από την σχέση $LA = R_0$ παρατηρούμε ότι η τελευταία γραμμή του L είναι εκείνη που συνδυάζει τις γραμμές του A και δίνει την μηδενική γραμμή, τρίτη γραμμή, του R_0, έτσι η τελευταία γραμμή του L αποτελεί μια βάση του αριστερού μηδενόχωρου $\operatorname{null} A^{\mathrm{T}}$.

παράδειγμα συνέχεια

Πράγματι

$$(LA)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}} = R_0^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} & A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

επομένως

$$\operatorname{null} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\},$$

όπως βρήκαμε με την πρώτη προσέγγιση.

2. Τάξη μητρώου

Αν το A είναι ένα $n \times m$ μητρώο τότε οι οδηγοί του A καθορίζουν τις γραμμικά ανεξάρτητες στήλες και τις γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές του A. Συγκεκριμένα οι γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A και οι γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές του A είναι αντίστοιχα οι στήλες που περιέχουν τους οδηγούς και οι γραμμές που περιέχουν τους οδηγούς, κατά συνέπεια

$$\# \text{ των γρ. ανεξαρτήτων στηλών του } A = \# \text{ των γρ. ανεξαρτήτων γραμμών του } A$$

Ορισμός 3

Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο ορίζουμε την **τάξη** (rank) του A να είναι το πλήθος των οδηγών του A. Συμβολίζουμε την τάξη του A με $\operatorname{rank} A$.

΄Αμεσες συνέπειες του ορισμού είναι ότι αν το A είναι ένα $n \times m$ μητρώο, τότε

$$\operatorname{rank} A \le \min\{n, m\}. \tag{2}$$

$$\operatorname{rank} A = \dim C(A) = \dim(\operatorname{range} A). \tag{3}$$

$$\operatorname{rank} A = \dim R(A) = \dim(\operatorname{range} A^{\mathrm{T}}). \tag{4}$$

Θεώρημα 1 (Θεμελιώδες Θεώρημα, μέρος 1)

Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο τάξης r, τότε

1. $\dim(\operatorname{null} A) = m - r$.
2. $\dim(\operatorname{null} A^{\mathrm{T}}) = n - r$.

Από το Θεώρημα (ΘΘ1) και την (4) έπεται ότι

$$\dim(\operatorname{null} A) + \dim(\operatorname{range} A^{\mathrm{T}}) = m - r + r = m = \dim \mathbb{R}^m,$$

και επειδή οι $\operatorname{null} A$ και $\operatorname{range} A^{\mathrm{T}}$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^m$, έπεται ότι $\operatorname{null} A + \operatorname{range} A^{\mathrm{T}} = \mathbb{R}^m$. Στην πραγματικότητα ισχύει το ισχυρότερο αποτέλεσμα

Θεώρημα 2 (Θεμελιώδες Θεώρημα, μέρος 2)

Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο, τότε

1. $\mathbb{R}^m = \operatorname{null} A \oplus \operatorname{range} A^{\mathrm{T}}$,
2. $\mathbb{R}^n = \operatorname{null} A^{\mathrm{T}} \oplus \operatorname{range} A$.

Στο Θεμελιώδες Θεώρημα αποδείξαμε ότι εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο, τότε

$$\mathbb{R}^m = \operatorname{null} A \oplus \operatorname{range} A^{\mathrm{T}}, \qquad \text{και} \qquad \mathbb{R}^n = \operatorname{null} A^{\mathrm{T}} \oplus \operatorname{range} A,$$

ενώ από το Θεώρημα για το ορθογώνιο συμπλήρωμα έπεται ότι

$$\mathbb{R}^m = \operatorname{null} A \oplus (\operatorname{null} A)^{\perp}, \qquad \text{και} \qquad \mathbb{R}^n = (\operatorname{range} A)^{\perp} \oplus \operatorname{range} A.$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε το επιπλέον αποτέλεσμα

Θεώρημα 3 (Θεμελιώδες Θεώρημα, μέρος 3)

Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο, τότε

1. $(\operatorname{null} A)^{\perp} = \operatorname{range} A^{\mathrm{T}}$,
2. $(\operatorname{range} A)^{\perp} = \operatorname{null} A^{\mathrm{T}}$.

Απόδειξη.

(1) Αν $\mathbf{x} \in (\operatorname{null} A)^\perp$, επειδή $\mathbb{R}^m = \operatorname{null} A \oplus \operatorname{range} A^{\mathrm{T}}$, έπεται ότι $\mathbf{x} \in \operatorname{range} A^{\mathrm{T}}$, οπότε $(\operatorname{null} A)^\perp \subseteq \operatorname{range} A^{\mathrm{T}}$. Δείχνουμε ότι $\operatorname{range} A^{\mathrm{T}} \subseteq (\operatorname{null} A)^\perp$. Αν $\mathbf{x} \in \operatorname{range} A^{\mathrm{T}}$, με $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, τότε $\mathbf{x} = A^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$, για κάποιο $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, και

$$0 < \|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle A^{\mathrm{T}}\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = (A^{\mathrm{T}}\mathbf{y})^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \langle \mathbf{y}, A\mathbf{x} \rangle$$

επομένως $A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, συνεπώς $\mathbf{x} \notin \operatorname{null} A$, άρα $\mathbf{x} \in (\operatorname{null} A)^\perp$, γεγονός που συμπληρώνει την απόδειξη του (1). Για το (2) παρατηρούμε ότι με A^{T} στη θέση του A από το (1) έχουμε $(\operatorname{null} A^{\mathrm{T}})^\perp = \operatorname{range} A$, έτσι

$$((\operatorname{null} A^{\mathrm{T}})^\perp)^\perp = (\operatorname{range} A)^\perp \Leftrightarrow \operatorname{null} A^{\mathrm{T}} = (\operatorname{range} A)^\perp.$$

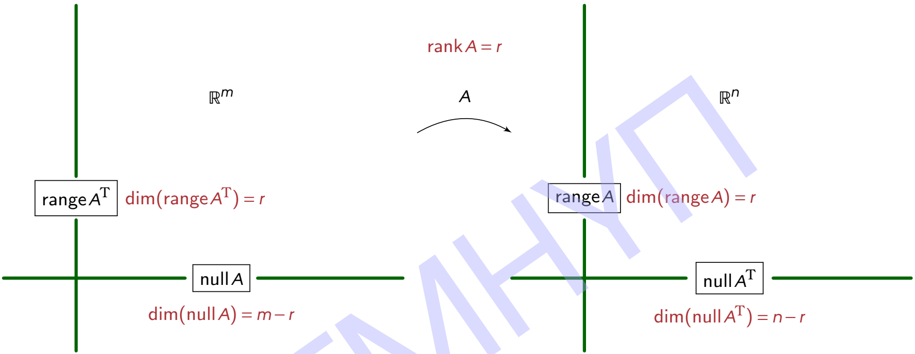
□

Σημειώνουμε ότι εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ και $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \rangle,$$

όπου το $\langle \cdot, \cdot \rangle$ στα αριστερά είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$ και στα δεξιά το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^m$.

Κωδικοποιημένα μπορούμε να αποτυπώσουμε αυτές τις σχέσεις στο Σχήμα που ακολουθεί.



Σχήμα: Οι τέσσερεις υπόχωροι που παράγονται από μητρώο A διαστάσεων $n \times m$.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

3. Η δομή της λύσης συστήματος

Ας θεωρήσουμε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, όπου A είναι ένα $n \times m$ μητρώο. Εάν r είναι η τάξη του μητρώου, $r = \operatorname{rank} A$, και $\{\mathbf{x}_1^0, \ldots, \mathbf{x}_{m-r}^0\}$ είναι μια βάση για τον μηδενόχωρο, $\operatorname{null} A$, του A, τότε κάθε λύση του ομοιογενούς συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι της μορφής

$$c_1\mathbf{x}_1^0 + \cdots + c_{m-r}\mathbf{x}_{m-r}^0. \tag{5}$$

Ονομάζουμε την (5) **γενική λύση του ομοιογενούς συστήματος**. Ο χαρακτηρισμός γενική λύση δικαιολογείται από το γεγονός ότι αν $\mathbf{x}'$ είναι μια λύση του $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, τότε η $\mathbf{x}'$ προκύπτει από την (5) με κατάλληλη επιλογή των c_k. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $\mathbf{x}_p$ είναι μια λύση του $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, μια όπως λέμε **ειδική λύση** (particular solution). Αν $\mathbf{x}$ είναι μια επίσης λύση του $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, τότε η $\mathbf{x} - \mathbf{x}_p$ είναι λύση του ομοιογενούς προβλήματος. Πράγματι

$$A\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p\right) = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_p = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

κατά συνέπεια υπάρχουν σταθερές $c_1, \ldots, c_{m-r}$ ώστε

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_p = c_1\mathbf{x}_1^0 + \cdots + c_{n-r}\mathbf{x}_{m-r}^0 = \mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_p.$$

Αποδείξαμε λοιπόν το ακόλουθο

Θεώρημα 4

*Εάν $\mathbf{x}_p$ είναι μια **ειδική** λύση του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, τότε η **γενική** λύση του συστήματος είναι της μορφής*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_p,$$

όπου $\mathbf{x}_0$ είναι η γενική λύση του ομοιογενούς συστήματος.

Παράδειγμα 3

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

κατά συνέπεια το $\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ είναι μια **ειδική λύση** για το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, όπου A είναι το μητρώο στο αριστερό μέρος του γινομένου, με $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

παράδειγμα συνέχεια

Είδαμε στο Παράδειγμα (7.2) ότι μια βάση για τον μηδενόχωρο του A είναι η

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα (7.1), η **γενική λύση** του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

όπου c_1, c_2 είναι πραγματικές παράμετροι.

Για επιβεβαίωση από το επαυξημένο μητρώο $\left(A \ \mathbf{b}\right)$ του συστήματος παίρνουμε

παράδειγμα συνέχεια

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

οπότε το ισοδύναμο σύστημα είναι

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_4 &= 4 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= 4 + x_3 - x_4 \\ x_2 &= -1 - 3x_3 - x_4 \end{aligned}\right.$$

Έτσι η λύση του συστήματος είναι

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + x_3 - x_4 \\ -1 - 3x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

παράδειγμα συνέχεια

Διατυπώνεται το ερώτημα κατά πόσον οι (6) και (7) συμφωνούν. Παρατηρούμε ότι για $x_3 = \lambda + 1$ και $x_4 = \mu + 1$ έχουμε

$$(\lambda+1)\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+(\mu+1)\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-5\\1\\1\end{pmatrix},$$

κατά συνέπεια οι δύο λύσεις είναι ισοδύναμες, και αυτό ακριβώς το αποτέλεσμα δικαιολογεί τον χαρακτηρισμό μιας τέτοιας λύσης ως γενική. Ειδικά η $\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix}4 & -5 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ προκύπτει από την (7) για $x_3 = x_4 = 1$.

Παρατήρηση 3

Εάν A και B είναι μητρώα συμβατών διαστάσεων ώστε να ορίζεται το AB δημιουργείται το ερώτημα εάν υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των τάξεων των A, B και AB. Ας δούμε σαν παράδειγμα μια απλή περίπτωση, όπου τα A και B είναι 2×2 μητρώα. Υπολογίζοντας ή για την ακρίβεια γράφοντας

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

βλέπουμε ότι
• αν οι γραμμές του A είναι γραμμικά εξαρτημένες, τότε και οι γραμμές του AB είναι γραμμικά εξαρτημένες, ή
• αν οι στήλες του B είναι γραμμικά εξαρτημένες τότε και οι στήλες του AB είναι γραμμικά εξαρτημένες.
Κατά συνέπεια $\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$.

Παράδειγμα 4

Αν $A = QS$, όπου

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{rank} Q = \operatorname{rank} S = 2$$

το A είναι 3×3, αλλά $\operatorname{rank} A \leq 2$. Πράγματι

$$\begin{aligned} A &= \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} 3 \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} (-1) + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} 0 \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} 1 \right) \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} 1 \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} 3 + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} (-2) \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} 1 + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Οι στήλες του A (γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του Q), ή οι γραμμές του A (γραμμικοί συνδυασμοί των γραμμών του S) παράγονται από δύο διανύσματα.

παράδειγμα συνέχεια

Επομένως για τον χώρο στηλών του A έχουμε

$$C(A) = \operatorname{range} A = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\right\}$$

και για τον χώρο γραμμών του A

$$R(A) = \operatorname{range} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Έτσι $\operatorname{rank} A = 2$, γεγονός που περιμέναμε αφού

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & -2\\1 & 0\end{pmatrix} = 2 \qquad \text{και} \qquad \operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\3 & 0 & 1\end{pmatrix} = 2.$$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα έπεται ότι $\dim(\operatorname{null} A) = 3 - 2 = 1$.

παράδειγμα συνέχεια

Επειδή $\operatorname{rank} Q = 2 = \operatorname{rank} S$ έχουμε ότι $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow S\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ή

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Με απαλοιφή βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -5/3 \end{pmatrix}$$

Έτσι η λύση της (8) είναι

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x_3 \\ \frac{5}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_3}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

παράδειγμα συνέχεια

επομένως

$$\operatorname{null} A = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}\right\}.$$

Για την εύρεση του αριστερού μηδενόχωρου του A, από την $A = QS$ παίρνουμε $A^{\mathrm{T}} = S^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}$, και όπως πριν αφού $\operatorname{rank} Q = 2 = \operatorname{rank} S$ έχουμε $A^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow Q^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Και πάλι με απαλοιφή βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\1 & -2 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\2 & 3 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\0 & 7 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\0 & 1 & 1/7\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 2/7\\0 & 1 & 1/7\end{pmatrix}.$$

Η λύση λοιπόν της $A^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ είναι

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{2}{7}x_3\\-\frac{1}{7}x_3\\x_3\end{pmatrix} = -\frac{x_3}{7}\begin{pmatrix}2\\1\\-7\end{pmatrix}$$

επομένως

παράδειγμα συνέχεια

$$\operatorname{null} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}\right\}.$$

Μητρώα τάξης ένα. Αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα, ας πούμε στο $\mathbb{R}^3$, τότε

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_1\mathbf{u} & v_2\mathbf{u} & v_3\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \\ u_2\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \\ u_3\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

δηλαδή $\operatorname{rank}\mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}} = 1$. Όμοια αν $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, τότε το μητρώο $\mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ έχει τάξη ένα. Το αυτό ισχύει και για το μητρώο $\mathbf{v}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$. Δείξτε ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν το $n \times m$ μητρώο A είναι τάξης ένα, τότε υπάρχουν διανύσματα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ ώστε $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$.

Χάριν πληρότητας αναφέρουμε επίσης ότι

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & z \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Αποδεικνύεται ότι κάθε μητρώο στο δεξί μέλος της (9) είναι τάξης ένα. Τα αποτελέσματα αυτά ισχύουν προφανώς για γινόμενα μητρώων γενικότερων συμβατών διαστάσεων. Έτσι αν το $A = (a_{ij})$ είναι ένα $n \times m$ μητρώο, το $B = (b_{ij})$ είναι ένα $m \times k$ μητρώο και για το τυπικό μητρώο $M \in \mathbb{M}^{n,m}$ με M_{i*} συμβολίσουμε, ως συνήθως, την i-γραμμή του M, ως διάνυσμα-στήλη, και με M_{*j} την j-στήλη του M, έχουμε

$$\begin{aligned} (AB)_{*j} &= b_{1j}A_{*1} + b_{2j}A_{*2} + \cdots + b_{mj}A_{*m}, \qquad && j = 1,2,\ldots,k \\ (AB)_{i*} &= a_{i1}B_{1*} + a_{i2}B_{2*} + \cdots + a_{im}B_{m*}, \qquad && i = 1,2,\ldots,n. \end{aligned}$$

Η γενίκευση της (9) είναι

$$AB = A_{*1}B_{1*}^{\mathrm{T}} + A_{*2}B_{2*}^{\mathrm{T}} + \cdots + A_{*m}B_{m*}^{\mathrm{T}}$$

από την οποία έπεται ότι το γινόμενο δύο μητρώων διασπάται σε ένα άθροισμα μητρώων τάξης ένα.