ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη (VIII) 15-16

Ορθοκανονικά σύνολα, ορθοκανονικοποίηση
Ορθογώνια μητρώα

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

24 & 27 Νοεμβρίου 2023

1. Ορθοκανονικά σύνολα

Ορισμός 1

Σε ένα διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\| \cdot \|$ ένα σύνολο διανυσμάτων $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ λέγεται **ορθοκανονικό** (orthonormal) αν

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0, \qquad \text{αν } i \neq j, \qquad \text{και} \qquad \|\mathbf{u}_i\| = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ισοδύναμα $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij}$, όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker.

Για παράδειγμα η κανονική βάση $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ του $\mathbb{R}^3$, με

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

όπως εύκολα διαπιστώνεται, είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

Αντίθετα η βάση $\mathscr{B}_1 = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ του $\mathbb{R}^3$, με

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

δεν είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο αφού

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = (1)(1) + (0)(1) + (0)(0) = 1 \neq 0.$$

Μια βάση η οποία είναι ορθοκανονικό σύνολο θα λέγεται **ορθοκανονική βάση**.

Θεώρημα 1

Έστω ότι X είναι ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και έστω ότι $\mathscr{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_n\}$ είναι μία ορθοκανονική βάση για το X, τότε

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_n \rangle \mathbf{w}_n$$

για κάθε $\mathbf{x} \in X$.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x} \in X$ και έστω $\mathbf{x} = x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n$, τότε αν $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_k \rangle &= \langle x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n, \mathbf{w}_k \rangle \\
&= x_1\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_k \rangle + x_2\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_k \rangle + \cdots + x_n\langle \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_k \rangle \\
&= x_k\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_k \rangle \\
&= x_k,
\end{aligned}
$$

συνέπεια της ορθοκανονικότητας, δηλαδή ο συντελεστής του $\mathbf{w}_k$ στο ανάπτυγμα του $\mathbf{x}$ ως προς τη βάση $\mathscr{B}$ είναι ίσος με $\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_k \rangle$. Επειδή το k είναι τυχαίο έπεται το ζητούμενο. □

Ορισμός 2

Εάν $\mathscr{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_n\}$ είναι μία ορθοκανονική βάση για τον διανυσματικό χώρο X με εσωτερικό γινόμενο, η έκφραση

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_n \rangle \mathbf{w}_n$$

λέγεται **ανάπτυγμα Fourier** του $\mathbf{x}$ ως προς τη βάση $\mathscr{B}$. Οι συντελεστές $\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_k \rangle$ των $\mathbf{w}_k$ λέγονται **συντελεστές Fourier** του $\mathbf{x}$ ως προς τη βάση $\mathscr{B}$.

Παράδειγμα 1

Τα διανύσματα

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

αποτελούν μια βάση για το $\mathbb{R}^2$ (γιατί;). Παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = (1)(1) + (1)(-1) = 0$$

δηλαδή $\mathbf{b}_1 \perp \mathbf{b}_2$. Επειδή $\|\mathbf{b}_1\| = \|\mathbf{b}_2\| = \sqrt{2}$, τα διανύσματα

$$\mathbf{b}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

αποτελούν μια ορθοκανονική βάση για το $\mathbb{R}^2$. Αν $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, τότε

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_1' = (2)(1/\sqrt{2}) + (-3)(1/\sqrt{2}) = -1/\sqrt{2}$$
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_2' = (2)(1/\sqrt{2}) + (-3)(-1/\sqrt{2}) = 5/\sqrt{2}.$$

Έτσι το ανάπτυγμα Fourier του $\mathbf{x}$ ως πρός τη βάση $\{\mathbf{b}_1', \mathbf{b}_2'\}$ είναι

παράδειγμα συνέχεια

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{b}_1' + \frac{5}{\sqrt{2}}\mathbf{b}_2'.$$

Παρατήρηση 1

Εάν σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ τα διανύσματα $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$, με $\mathbf{u}_k \neq \mathbf{0}$ για $k = 1, 2, \ldots, n$, είναι ανά δύο ορθογώνια, δηλαδή $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ για $i \neq j$, τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι αν

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

για τυχαίο k υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathbf{0}, \mathbf{u}_k \rangle &= \langle c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_k \rangle \\ &= c_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_k \rangle + c_2\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_k \rangle + \cdots + c_n\langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_k \rangle \\ &= c_k\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle = c_k\|\mathbf{u}_k\|^2 \end{aligned}$$

επομένως $c_k = 0$, αφού $\mathbf{u}_k \neq \mathbf{0}$. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Παρατήρηση 2

Έστω X ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$, επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$, και έστω $\mathbf{u}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα του X. Αν $\mathbf{x}$ είναι διάνυσμα του X, τότε

$$\mathbf{x} = \langle\mathbf{x},\mathbf{u}\rangle\mathbf{u} + \mathbf{y} \tag{1}$$

για κάποιο $\mathbf{y} \in X$ με $\mathbf{y} \perp \mathbf{u}$.

Παρατηρούμε ότι το μοναδικό $\mathbf{y}$ για το οποίο ισχύει η (1) είναι το $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \langle\mathbf{x},\mathbf{u}\rangle\mathbf{u}$, επομένως

$$\langle\mathbf{y},\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{x} - \langle\mathbf{x},\mathbf{u}\rangle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{x},\mathbf{u}\rangle - \langle\mathbf{x},\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = 0$$

αφού $\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = \|\mathbf{u}\|^2 = 1$. Το αποτέλεσμα γενικεύεται. Αν $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο στον X και

$$\mathbf{x} = \langle\mathbf{x},\mathbf{u}_1\rangle\mathbf{u}_1 + \langle\mathbf{x},\mathbf{u}_2\rangle\mathbf{u}_2 + \cdots + \langle\mathbf{x},\mathbf{u}_n\rangle\mathbf{u}_n + \mathbf{y},$$

τότε $\mathbf{y} \in \left(\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n\}\right)^\perp$

2. Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt

Μια ορθοκανονική βάση σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο παράγει ένα ορθογώνιο σύστημα ``συντεταγμένων'', δηλαδή γενικεύει την έννοια του ορθογωνίου συστήματος αξόνων του $\mathbb{R}^n$. Έτσι οι συντελεστές Fourier του τυχαίου διανύσματος του χώρου είναι οι συντεταγμένες ως προς το ορθογώνιο αυτό σύστημα και είναι εύκολο να υπολογισθούν. Κατά συνέπεια είναι σημαντικό και πρακτικά χρήσιμο σε χώρους με εσωτρικό γινόμενο να γνωρίζουμε μια ορθοκανονική βάση. Ενώ στο $\mathbb{R}^n$ η εκ των προτέρων γνώση μιας τέτοιας βάσης είναι γνωστή δεν συμβαίνει το ίδιο για άλλους χώρους. Για παράδειγμα στο χώρο των πολυωνύμων $\mathbb{P}_3[-1,1]$ με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$$

η γνωστή βάση $\{1, x, x^2, x^3\}$, όπως είδαμε, δεν είναι ορθοκανονική. Στη συνέχεια περιγράφουμε μια διαδικασία ορθοκανονικοποίησης, δηλαδή μια διαδικασία όπου ξεκινώντας από ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ παράγεται με συστηματικό τρόπο ένα ορθοκανονικό σύνολο $S' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ έτσι ώστε $\operatorname{span} S = \operatorname{span} S'$. Η διαδικασία αυτή λέγεται **ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt**.

Έστω λοιπόν ένας χώρος X με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$, και έστω $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ ένα σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων του X.

- Θέτουμε

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 / \|\mathbf{u}_1\|.$$

Είναι προφανές ότι $\mathrm{span}\{\mathbf{u}_1\} = \mathrm{span}\{\mathbf{w}_1\}$.

- Θέτουμε

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1$$

αφαιρούμε δηλαδή από το $\mathbf{u}_2$ την $\mathbf{w}_1$-συνιστώσα του. Δείχνουμε ότι $\mathrm{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \mathrm{span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2\}$, ισοδύναμα αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 = a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{v}_2$. Από τον ορισμό των $\mathbf{w}_1$ και $\mathbf{v}_2$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 &= a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{v}_2 \\ &= \frac{a\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} + b\Big(\mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} \rangle \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}\Big) \end{aligned}$$

οπότε

$$\left(\alpha - \frac{a}{\|\mathbf{u}_1\|} + \frac{b\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\right)\mathbf{u}_1 + (\beta - b)\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}.$$

Επειδή τα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα βρίσκουμε

$$a = \alpha\|\mathbf{u}_1\| + \beta\langle\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_1\rangle/\|\mathbf{u}_1\| \qquad \text{και} \qquad b = \beta.$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{w}_1,\mathbf{v}_2\rangle &= \langle\mathbf{w}_1,\mathbf{u}_2 - \langle\mathbf{u}_2,\mathbf{w}_1\rangle\mathbf{w}_1\rangle \\ &= \langle\mathbf{w}_1,\mathbf{u}_2\rangle - \langle\mathbf{u}_2,\mathbf{w}_1\rangle\langle\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_1\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

αφού $\langle\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_1\rangle = 1$. Θέτοντας

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2/\|\mathbf{v}_2\|$$

το $\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\}$ είναι ορθοκανονικό και $\text{span}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\} = \text{span}\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\}$.
• Έστω ότι για $k < n$ έχει κατασκευαστεί ένα ορθοκανονικό σύνολο $\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\dots,\mathbf{w}_k\}$ τέτοιο ώστε $\text{span}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_k\} = \text{span}\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\dots,\mathbf{w}_k\}$. Θέτουμε

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{u}_{k+1} - \langle\mathbf{u}_{k+1},\mathbf{w}_1\rangle\mathbf{w}_1 - \langle\mathbf{u}_{k+1},\mathbf{w}_2\rangle\mathbf{w}_2 - \cdots - \langle\mathbf{u}_{k+1},\mathbf{w}_k\rangle\mathbf{w}_k$$

Για $j < k+1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{v}_{k+1}\rangle &= \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{u}_{k+1}\rangle - \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{w}_1\rangle\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_1\rangle - \cdots - \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{w}_k\rangle\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k\rangle \\ &= \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{u}_{k+1}\rangle - \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{w}_j\rangle\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

αφού $\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j\rangle = 1$. Θέτοντας $\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{v}_{k+1}/\|\mathbf{v}_{k+1}\|$ το $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}\}$ παράγει ότι και το $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_{k+1}\}$, αφού

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{k+1} &= \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{w}_1\rangle\mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{w}_2\rangle\mathbf{w}_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{w}_k\rangle\mathbf{w}_k + \|\mathbf{v}_{k+1}\|\mathbf{w}_{k+1} \\ &= c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_k\mathbf{w}_k + c_{k+1}\mathbf{w}_{k+1},\end{aligned}$$

κατά συνέπεια, από την υπόθεση της επαγωγής, έπεται ότι

$$\operatorname{span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{k+1}\} = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{k+1}\}.$$

Αποδείξαμε λοιπόν, με επαγωγή, το

Θεώρημα 2 (Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt)

Αν σε χώρο X με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ το $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ είναι ένα σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων, τότε η ακολουθία των διανυσμάτων που ορίζονται με τη σχέση

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} \\ \mathbf{w}_k &= \frac{\mathbf{u}_k - \langle\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1\rangle\mathbf{w}_1 - \cdots - \langle\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_{k-1}\rangle\mathbf{w}_{k-1}}{\|\mathbf{u}_k - \langle\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1\rangle\mathbf{w}_1 - \cdots - \langle\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_{k-1}\rangle\mathbf{w}_{k-1}\|}, \end{aligned} \tag{2}$$

$k = 2, \ldots, n$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο στο X το οποίο παράγει τον ίδιο υπόχωρο με το S. Ειδικά αν το S είναι μια βάση του X, το $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση για τον X.

Παράδειγμα 3

Μια βάση για τον $\mathbb{R}^3$ αποτελούν τα διανύσματα

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

τα οποία όμως δεν είναι ανά δύο ορθογώνια, ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Ακολουθώντας τη διαδικασία Gram-Schmidt ορίζουμε

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

και

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \|\mathbf{v}_2\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

τότε

παράδειγμα συνέχεια

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Όμοια

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_1\rangle \mathbf{w}_1 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_2\rangle \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

με

$$\|\mathbf{v}_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

οπότε

$$\mathbf{w}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Έτσι αρχίζοντας με τα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ η διαδικασία Gram-Schmidt

παράδειγμα συνέχεια

παράγει την ορθοκανονική βάση

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση 3

Παρατηρούμε ότι η ορθοκανονική βάση $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ του Παραδείγματος 2 που προέκυψε από την διαδικασία ορθοκανονικοποίησης της $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ δεν είναι τόσο εύχρηστη όσο η κανονική βάση $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Για παράδειγμα ποιά είναι η αναπαράσταση του $\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ σε αυτή τη βάση; Αλλάζοντας την αρίθμηση στα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ βλέπουμε ότι προκύπτουν 3! ορθοκανονικές βάσεις για το $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 1

Αν $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ είναι όπως στο Παράδειγμα 2, θέτουμε $\mathbf{b}_1 = \mathbf{u}_3$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{u}_2$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{u}_1$. Να βρεθεί η ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ που παράγει η διαδικασία Gram-Schmidt από την βάση $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

Παράρτημα: Ορθογώνια πολυώνυμα

Στο χώρο των πολυωνύμων $\mathbb{P}[-1,1]$ με πραγματικούς συντελεστές, η σχέση

$$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο. Ενώ, όπως έχουμε δει τα πολυώνυμα της φυσιολογικής βάσης $\mathscr{B} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ δεν είναι ορθογώνια μεταξύ τους η διαδικασία οθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt παράγει μια ακολουθία από ορθογώνια πολυώνυμα. Στη πράξη και σε εφαρμογές στα Μαθηματικά και στη Φυσική υπάρχουν διάφορες ακολουθίες ορθογωνίων πολυωνύμων, τα οποία προκύπτουν από την $\mathscr{B}$ με τη διαδικασία ορθογωνοποίησης, ως προς κατάλληλο εσωτερικό γινόμενο

$$\langle p,q\rangle = \int_{a}^{b} p(x)q(x)w(x)\,\mathrm{d}x$$

όπου $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ και $w(x) > 0$ και ολοκληρώσιμη στο σχετικό διάστημα. Στη συνέχεια δίνουμε μερικά χακτηριστικά παραδείγματα βάσεων-συστημάτων ορθογωνίων πολυωνύμων.

Πολυώνυμα Legendre. Παράγονται από την $\mathscr{B}$ με τη διαδικασία ορθογωνοποίησης ως προς το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x.$$

Συμβολίζονται με $P_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Τα πρώτα πέντε τέτοια είναι

1. $P_0(x) = 1$
2. $P_1(x) = x$
3. $P_2(x) = (1/2)(3x^2 - 1)$
4. $P_3(x) = (1/2)(5x^3 - 3x)$
5. $P_4(x) = (1/8)(35x^4 - 30x^2 + 3)$

Αποδεικνύεται ότι τα πολυώνυμα Legendre δίνονται από την αναδρομική σχέση

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Κάποιες χαρακτηριστικές ιδιότητες

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \qquad \int_{-1}^{1} P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad n \geq 1.$$

Πολυώνυμα Chebyshev πρώτου είδους. Παράγονται από την $\mathscr{B}$ με τη διαδικασία ορθογωνοποίησης ως προς το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Συμβολίζονται με $T_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Τα πρώτα πέντε πολυώνυμα Chebyshev είναι

1. $T_0(x) = 1$
2. $T_1(x) = x$
3. $T_2(x) = 2x^2 - 1$
4. $T_3(x) = 4x^3 - 3x$
5. $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

Αποδεικνύεται ότι τα πολυώνυμα Chebyshev πρώτου είδους δίνονται από την αναδρομική σχέση

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Κάποιες χαρακτηριστικές ιδιότητες

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi/2 & n = m \neq 0 \\ \pi & n = m = 0 \end{cases}$$

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x), \qquad \int_{-1}^{1} T_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n + 1}{1-n^2}, \quad n \neq 1.$$

Πολυώνυμα Chebyshev δεύτερου είδους. Παράγονται από την $\mathscr{B}$ με τη διαδικασία ορθογωνοποίησης ως προς το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Συμβολίζονται με $U_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Τα πρώτα πέντε πολυώνυμα Chebyshev είναι

1. $U_0(x) = 1$
2. $U_1(x) = 2x$
3. $U_2(x) = 4x^2 - 1$
4. $U_3(x) = 8x^3 - 4x$
5. $U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$

Αποδεικνύεται ότι τα πολυώνυμα Chebyshev δεύτερου είδους δίνονται από την αναδρομική σχέση

$$U_0(x) = 1, \qquad U_1(x) = 2x$$
$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Κάποιες χαρακτηριστικές ιδιότητες

$$\int_{-1}^{1} U_n(x) U_m(x) \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\delta_{nm}$$
$$U_n(-x) = (-1)^n U_n(x), \qquad \int_{-1}^{1} U_n(x)\, \mathrm{d}x = \ldots, \quad n > 1.$$

3. Ορθογώνια μητρώα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Αν $\mathbf{c}_1$ και $\mathbf{c}_2$ είναι οι στήλες του A, τότε

$$\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = 0(-1) + 1(0) = 0, \qquad \text{και} \qquad \|\mathbf{c}_1\| = \|\mathbf{c}_2\| = 1.$$

Αν $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \cdots, \mathbf{q}_n$ είναι ορθοκανονικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε $\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = \delta_{ij}$, κατά συνέπεια αν $Q = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{pmatrix}$, τότε $Q^{\mathrm{T}} Q = I$. Επειδή το μητρώο Q είναι τετραγωνικό έπεται ότι $Q^{\mathrm{T}} = Q^{-1}$.

Ορισμός 4

Ένα τετραγωνικό μητρώο Q λέγεται **ορθογώνιο** (orthogonal) αν $Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$.

Σημειώνουμε ότι κάθε ορθογώνιο 2×2 μητρώο είναι της μορφής

$$Q_\omega^+ = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}, \qquad \text{ή} \qquad Q_\omega^- = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix}, \tag{3}$$

για κατάλληλο $\omega \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2 (Περιστροφή στο επίπεδο)

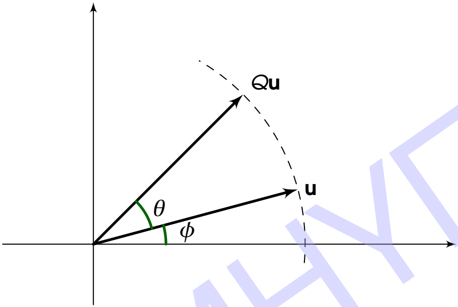
Το μητρώο

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνιο μητρώο. Ας δούμε το αποτέλεσμα της δράσης του Q επί ενός μοναδιαίου διανύσματος του $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Υπολογίζοντας

$$\begin{aligned} Q \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\phi+\theta) \\ \sin(\phi+\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

βλέπουμε ότι ο πολλαπλασιασμός επί Q έχει σαν αποτέλεσμα την περιστροφή του μοναδιαίου διανύσματος, άρα και κάθε διανύσματος, κατά γωνία θ. Το αποτέλεσμα αποτυπώνεται στο Σχήμα που ακολουθεί



Άσκηση 2

Δείξτε ότι το μητρώο

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

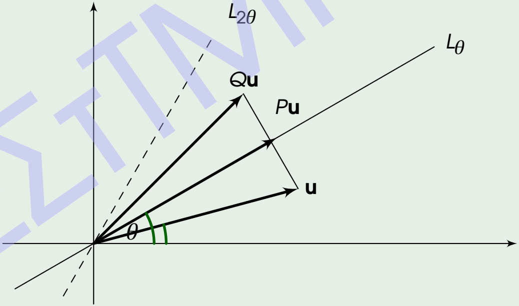
(α΄) Είναι ορθογώνιο.

(β΄) Περιστρέφει κάθε διάνυσμα στο $\mathbb{R}^3$ γύρω από τον z-άξονα κατά γωνία θ.

Παράδειγμα 3 (Ανάκλαση στο επίπεδο)

Αν $\mathbf{q} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα και L_θ η ευθεία που το περιέχει θέλουμε να βρούμε το μητρώο Q το οποίο υλοποιεί την ανάκλαση οποιουδήποτε διανύσματος ως προς την ευθεία.

Αν $\mathbf{u}$ είναι τυχαίο διάνυσμα στο επίπεδο, $Q\mathbf{u}$ είναι η ανάκλασή του ως προς την ευθεία L_θ, και $P\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{q}\rangle \mathbf{q}$ η προβολή του επί της ευθείας L_θ, τότε, "μεταφράζοντας" μετρικές σχέσεις του ισοσκελούς τριγώνου με "πλευρές" τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $Q\mathbf{u}$ στο Σχήμα παίρνουμε



παράδειγμα συνέχεια

$$P\mathbf{u}-\mathbf{u}=\frac{1}{2}(Q\mathbf{u}-\mathbf{u}) \Rightarrow Q\mathbf{u}=2P\mathbf{u}-\mathbf{u},$$

επομένως $Q\mathbf{u}=(2P-I)\mathbf{u}$, ισοδύναμα $Q=2P-I$. Επειδή

$$P\mathbf{u}=\langle\mathbf{u},\mathbf{q}\rangle\mathbf{q}=\mathbf{q}\langle\mathbf{q},\mathbf{u}\rangle=\mathbf{q}(\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{u})=(\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}})\mathbf{u}$$

τελικά βρίσκουμε

$$Q=2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}-I. \tag{4}$$

Αναλυτικά το μητρώο Q είναι

$$\begin{aligned} Q&=2\begin{pmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{pmatrix}-I\\ &=\begin{pmatrix}2\cos^2\theta-1 & 2\sin\theta\cos\theta\\ 2\sin\theta\cos\theta & 2\sin^2\theta-1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

παράδειγμα συνέχεια

του οποίου οι στήλες είναι ορθοκανονικά διανύσματα στο $\mathbb{R}^2$, επομένως είναι ένα ορθογώνιο μητρώο. Η δράση του Q επί ενός μοναδιαίου διανύσματος $\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ έχει σαν αποτέλεσμα το διάνυσμα

$$\begin{aligned} Q\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos 2\theta\cos\phi + \sin 2\theta\sin\phi\\ \sin 2\theta\cos\phi - \cos 2\theta\sin\phi\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos(2\theta-\phi)\\ \sin(2\theta-\phi)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

το οποίο συμφωνεί με την εικόνα του σχήματος ότι το αρχικό διάνυσμα, ας πούμε, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ περιστρέφεται κατά 2θ αρχικά και στη συνέχεια κατά $-\phi$, δηλαδή κατά ϕ με αντίθετη φορά, προκειμένου να προκύψει τελικά το $Q\mathbf{u}$.

Παράδειγμα 4 (Μετάθεση)

Κάθε μητρώο μετάθεσης προκύπτει από το ταυτοτικό μητρώο μεταθέτοντας γραμμές του, κατά συνέπεια είναι ορθογώνιο. Στο $\mathbb{R}^2$ τα δύο (γιατί;) μητρώα μετάθεσης είναι

$$Q_0^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{και} \qquad Q_{\pi/2}^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

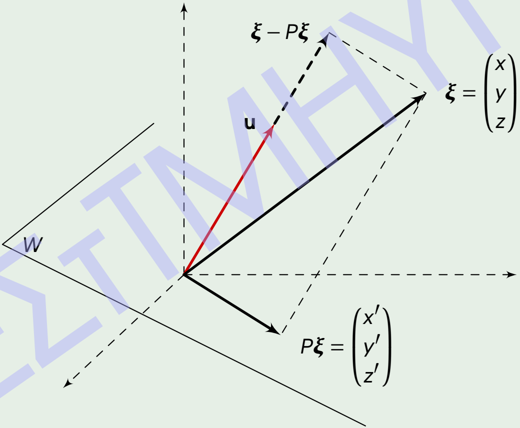
Θεώρημα 3

Αν Q είναι ένα $n \times n$ πραγματικό μητρώο, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο και $\| \cdot \|$ η επαγόμενη νόρμα, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

1. *Το Q είναι ορθογώνιο.*
2. *Το Q διατηρεί το μήκος, δηλαδή για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $\|Q\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.*
3. *Το Q διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή για $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $\langle Q\mathbf{x}, Q\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.*

Παράδειγμα 5

Θεωρούμε το επίπεδο W με εξίσωση $ax + by + cz = 0$ στο $\mathbb{R}^3$. Να βρεθεί η προβολή του τυχαίου διανύσματος $\xi \in \mathbb{R}^3$ επί του W, καθώς και το μητρώο προβολής επί του W.



παράδειγμα συνέχεια

Αν $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in W$, τότε $ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$, κατά συνέπεια το $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ είναι ορθογώνιο στο W, επιπλέον διαιρώντας την εξίσωση με $\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^{1/2}$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $\mathbf{u}$ είναι μοναδιαίο. Αν $P\boldsymbol{\xi}$ είναι η προβολή του ξ επί του W, βλέπε Σχήμα το διάνυσμα $\boldsymbol{\xi} - P\boldsymbol{\xi}$ είναι η προβολή του ξ επί της ευθείας δια του $\mathbf{u}$, βλέπε Παρατήρηση 2, κατά συνέπεια

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} - P\boldsymbol{\xi} &= \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} \\ \Rightarrow \; P\boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{\xi} - \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Για δε το μητρώο της προβολής έχουμε

$$\begin{aligned} P\boldsymbol{\xi} &= I\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u} \rangle \\ &= I\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} \\ &= \left(I - \mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{\xi}, \end{aligned}$$

ισοδύναμα

$$P = I - \mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}.$$