

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη (VII) 13-14

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο  
Εσωτερικό γινόμενο, νόρμα διανύσματος,  
Ορθογώνιο συμπλήρωμα

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

13 & 20 Νοεμβρίου 2023

# 1. Εσωτερικό γινόμενο

Εάν  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  το γινόμενο  $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$  ορίζεται ως γινόμενο μητρώων και

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Το γινόμενο αυτό το γνωρίζουμε ως το **εσωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$ , και το συμβολίζουμε με  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , ή  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ .

## Ορισμός 1

Εάν  $X$  είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος μια πραγματική συνάρτηση  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  θα λέγεται **εσωτερικό γινόμενο** (inner product) εάν:

- ①  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$  και  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$  αν και μόνο αν  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
- ②  $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ , για κάθε  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$ .
- ③  $\langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ , για κάθε  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- ④  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ , για κάθε  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ .

Ένα εσωτερικό γινόμενο  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  συμβολίζεται και ως  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ . Λέγεται, έτσι, και **στικτό γινόμενο** (dot product), ή **βαθμωτό γινόμενο** (scalar product).

Παρατηρούμε ότι εάν  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$  και  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  έχουμε

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w} \rangle &= \langle \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle && \text{(από την (4))} \\ &= \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \mu \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle && \text{(από τις (2) και (3))} \\ &= \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \mu \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle && \text{(από την (4)).}\end{aligned}$$

## Ορισμός 2

Ένας διανυσματικός χώρος  $X$  στον οποίο έχει οριστεί ένα εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  λέγεται **χώρος με εσωτερικό γινόμενο**. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

## Παράδειγμα 1 (Το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο)

Ο  $\mathbb{R}^n$  με  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$  είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

(1)  $\mathbf{u}^T \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$  και  $\mathbf{u}^T \mathbf{u} = 0$  αν και μόνο αν  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

(2)  $(\mathbf{u} + \mathbf{v})^T \mathbf{w} = (\mathbf{u}^T + \mathbf{v}^T) \mathbf{w} = \mathbf{u}^T \mathbf{w} + \mathbf{v}^T \mathbf{w}$ .

(3)  $(\lambda \mathbf{u})^T \mathbf{v} = \lambda u_1 v_1 + \lambda u_2 v_2 + \dots + \lambda u_n v_n = \lambda (u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n) = \lambda \mathbf{u}^T \mathbf{v}$ .

(4)  $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{u}$  λόγω μεταθετικότητας του πολλαπλασιασμού στο  $\mathbb{R}$ .

Κατά συνέπεια η σχέση  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$  είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στο  $\mathbb{R}^n$ .

## Παρατήρηση 1

Εάν το  $A$  είναι ένα  $n \times m$  μητρώο και το  $B$  ένα  $m \times k$  μητρώο, με το γνωστό συμβολισμό για τις γραμμές και τις στήλες, από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού μητρώων έπεται ότι

$$AB = \begin{pmatrix} A_{1*}^T B_{*1} & A_{1*}^T B_{*2} & \cdots & A_{1*}^T B_{*k} \\ A_{2*}^T B_{*1} & A_{2*}^T B_{*2} & \cdots & A_{2*}^T B_{*k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n*}^T B_{*1} & A_{n*}^T B_{*2} & \cdots & A_{n*}^T B_{*k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle A_{1*}, B_{*1} \rangle & \langle A_{1*}, B_{*2} \rangle & \cdots & \langle A_{1*}, B_{*k} \rangle \\ \langle A_{2*}, B_{*1} \rangle & \langle A_{2*}, B_{*2} \rangle & \cdots & \langle A_{2*}, B_{*k} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle A_{n*}, B_{*1} \rangle & \langle A_{n*}, B_{*2} \rangle & \cdots & \langle A_{n*}, B_{*k} \rangle \end{pmatrix},$$

έτσι

$$AB = (A_{i*} \cdot B_{*j}) = (\langle A_{i*}, B_{*j} \rangle) = (A_{i*}^T B_{*j})$$

με  $i = 1, 2, \dots, n$  και  $j = 1, 2, \dots, k$ .

## Άσκηση 1

(α) Δείξτε ότι η σχέση

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3. \quad (1)$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο  $\mathbb{R}^3$ .

(β) Δείξτε ότι

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{v}. \quad (2)$$

## Άσκηση 2

Εάν  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο  $\mathbb{R}^3$ , και  $A$  είναι ένα αντιστρέψιμο  $3 \times 3$  μητρώο δείξτε ότι η σχέση

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} \quad (3)$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο  $\mathbb{R}^3$ . Σημειώνουμε ότι

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = (A\mathbf{u})^T A\mathbf{v} = \mathbf{u}^T A^T A\mathbf{v}.$$

## Παρατήρηση 2

Υπό το πρίσμα του αποτελέσματος της Άσκησης 2 βλέπουμε ότι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο  $\mathbb{R}^3$  υλοποιείται και ως

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{I} \mathbf{u} \cdot \mathbf{I} \mathbf{v}$$

όπου  $\mathbf{I}$  είναι το  $3 \times 3$  ταυτοτικό μητρώο. Επιπλέον το εσωτερικό γινόμενο στην Άσκηση 8.1 δίνεται από τη σχέση (3) με

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Τα αποτελέσματα των Ασκήσεων 8.1 και 8.2 γενικεύονται και ισχύουν στον  $\mathbb{R}^n$ . Ειδικά αν  $A$  είναι ένα αντιστρέψιμο  $n \times n$  μητρώο, τότε η σχέση

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T A^T A \mathbf{v}$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο  $\mathbb{R}^n$ .

### Άσκηση 3

Εάν  $p$  και  $q$  είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ δύο με  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  και  $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$  ορίζουμε

$$\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Δείξτε ότι η σχέση αυτή είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στο  $\mathbb{P}_2$ .

### Παράδειγμα 2

Στο χώρο  $\mathcal{C}[a, b]$  των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα  $[a, b]$  η σχέση

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (4)$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο. Πράγματι αν  $f, g, h \in \mathcal{C}[a, b]$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ , τότε (1)

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x) dx \geq 0$$

από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος αφού  $f^2(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [a, b]$ .

## παράδειγμα συνέχεια

Επιπλέον από τις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων και του ολοκληρώματος έπεται ότι

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x) dx = 0 \stackrel{*}{\Leftrightarrow} f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow f = 0.$$

\* Αν η  $h$  είναι συνεχής στο  $[a, b]$ ,  $h(x) \geq 0$  και  $\int_a^b h(x) dx = 0$ , τότε  $h(x) = 0$  στο  $[a, b]$ .

(2) Από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος

$$\begin{aligned} \langle f + g, h \rangle &= \int_a^b (f(x) + g(x))h(x) dx = \int_a^b (f(x)h(x) + g(x)h(x)) dx \\ &= \int_a^b f(x)h(x) dx + \int_a^b g(x)h(x) dx = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle. \end{aligned}$$

(3) Όμοια

$$\langle \lambda f, g \rangle = \int_a^b \lambda f(x)g(x) dx = \lambda \int_a^b f(x)g(x) dx = \lambda \langle f, g \rangle.$$



## παράδειγμα συνέχεια

(4) Τέλος

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b g(x)f(x) dx = \langle g, f \rangle.$$

Κατά συνέπεια η (4) ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο  $\mathcal{C}[a, b]$ .

### Ορισμός 3

Έστω ότι  $X$  είναι ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Θα λέμε ότι τα διανύσματα  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$  του  $X$  είναι **ορθογώνια** (orthogonal) ή **κάθετα** (perpendicular) μεταξύ τους αν  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ . Αν τα  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$  είναι ορθογώνια γράφουμε  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ .

Για παράδειγμα αν  $\mathbf{u} = (1 \ 2 \ 3)^T$  και  $\mathbf{v} = (-2 \ 1 \ 0)^T$ , τότε

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(-2) + (2)(1) + (3)(0) = -2 + 2 = 0,$$

επομένως τα δύο διανύσματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους,  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ .

### Παράδειγμα 3

Ας συμβολίσουμε με  $\mathbb{P}_n[-1, 1]$  τον χώρο των πολυωνύμων βαθμού έως  $n$  περιορισμένων στο διάστημα  $[-1, 1]$ . Μια βάση για τον χώρο αυτό είναι η  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ . Παρατηρούμε ότι

$$\langle x^i, x^j \rangle = \int_{-1}^1 x^i x^j dx = \frac{1}{i+j+1} x^{i+j+1} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{i+j+1} [1 - (-1)^{i+j+1}]$$

$i, j = 0, 1, \dots, n$  ( $x^0 = 1$ ). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\langle x^i, x^j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{αν } i+j \text{ είναι περιπτός} \\ \frac{2}{i+j+1} & \text{αν } i+j \text{ είναι άρτιος} \end{cases}$$

Έτσι αν  $i+j$  είναι περιπτός αριθμός, τότε τα  $x^i$  και  $x^j$  είναι ορθογώνια μεταξύ τους στο διάστημα  $[-1, 1]$ .

Στην περίπτωση μιγαδικού διανυσματικού χώρου, δηλαδή ενός διανυσματικού χώρου πάνω στο σώμα των μιγαδικών αριθμών, έχουμε

#### Ορισμός 4

Εάν  $X$  είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος μια συνάρτηση  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  θα λέγεται **εσωτερικό γινόμενο** (inner product) εάν ισχύουν τα παρακάτω:

- 1)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$  και  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$  αν και μόνο αν  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
- 2)  $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ , για κάθε  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$ .
- 3)  $\langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ , για κάθε  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- 4)  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}$ , για κάθε  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ .

Όπου στην (4) με  $\bar{z}$  συμβολίζουμε τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού  $z$ .

Παρατηρούμε ότι εάν  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$  και  $\zeta, \xi \in \mathbb{C}$  έχουμε

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \zeta \mathbf{v} + \xi \mathbf{w} \rangle &= \overline{\langle \zeta \mathbf{v} + \xi \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle} && \text{(από την (4))} \\ &= \overline{\zeta \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \xi \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle} && \text{(από τις (2) και (3))} \\ &= \bar{\zeta} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \bar{\xi} \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle && \text{(από την (4)).}\end{aligned}$$

## Άσκηση 4

Αν  $\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)^T$  και  $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)^T$  είναι διανύσματα στο  $\mathbb{C}^n$  δείξτε ότι η σχέση

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := a_1 \overline{b_1} + a_2 \overline{b_2} + \dots + a_n \overline{b_n}$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο.

## 2. Νόρμα διανύσματος

### Ορισμός 5

Εάν  $X$  είναι ένας διανυσματικός χώρος μια συνάρτηση  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται **νόρμα** (norm) εάν για κάθε  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$  στο  $X$  ικανοποιούνται οι σχέσεις

- 1)  $\|\mathbf{u}\| \geq 0$  και  $\|\mathbf{u}\| = 0$  αν και μόνο αν  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
- 2)  $\|\lambda \mathbf{u}\| = |\lambda| \|\mathbf{u}\|$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  (ή  $\mathbb{C}$ ).
- 3)  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ .

Για  $\mathbf{u} \in X$  ο (μη αρνητικός) πραγματικός αριθμός  $\|\mathbf{u}\|$  λέγεται νόρμα του  $\mathbf{u}$ .

Η ιδιότητα (3) είναι η **τριγωνική ανισότητα**.

## Παράδειγμα 4

Το μέτρο του  $\mathbf{u} = (u_1 \dots u_n)^T \in \mathbb{R}^n$  είναι νόρμα. Οι ιδιότητες (1) και (2) έπονται από την

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

όπου  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ . Για την (3) υπολογίζουμε,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2\end{aligned}$$

από όπου έπεται η (3) παίρνοντας ρίζες. Τη νόρμα (μέτρο) του  $\mathbf{a} = (a_1 \dots a_n)^T \in \mathbb{R}^n$  τη λέμε  **$\ell_2$ -νόρμα** στο  $\mathbb{R}^n$  και τη συμβολίζουμε με  $\|\cdot\|_2$ , έτσι

$$\|\mathbf{a}\|_2 = \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2}. \quad (5)$$

## Παράδειγμα 5

Αν  $\mathbf{a} = (a_1 \dots a_n)^T \in \mathbb{R}^n$  ορίζουμε

$$\|\mathbf{a}\| = \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Η  $\|\cdot\|$  είναι νόρμα. Πράγματι  $\|\mathbf{a}\| \geq 0$ , σαν άθροισμα μη αρνητικών ποσοτήτων, ενώ  $\|\mathbf{a}\| = 0$  αν και μόνο αν  $|a_k| = 0$ , για όλα τα  $k$ , άρα ο νόμος (1) στον ορισμό της νόρμας ικανοποιείται. Έστω  $\lambda \in \mathbb{R}$ , τότε

$$\|\lambda \mathbf{a}\| = \sum_{k=1}^n |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^n |a_k|$$

από την οποία προκύπτει η (2). Η (3), η τριγωνική ανισότητα είναι άμεση συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας της απόλυτης τιμής

$$|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Τη νόρμα αυτή λέμε  **$\ell_1$ -νόρμα** στο  $\mathbb{R}^n$  και τη συμβολίζουμε με  $\|\cdot\|_1$ .

## Παράδειγμα 6

Αν  $\mathbf{a} = (a_1 \dots a_n)^T \in \mathbb{R}^n$  ορίζουμε

$$\|\mathbf{a}\| = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|.$$

Οι συνθήκες (1) και (2) του ορισμού της νόρμας ικανοποιούνται η δε (3), η τριγωνική ανισότητα, έπεται από το γεγονός ότι για  $k = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} |a_k + b_k| &\leq |a_k| + |b_k| \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k| + \max_{1 \leq k \leq n} |b_k|, \end{aligned}$$

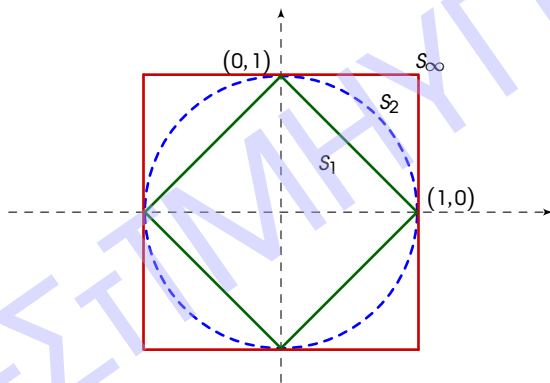
επομένως

$$\max_{1 \leq k \leq n} |a_k + b_k| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k| + \max_{1 \leq k \leq n} |b_k|.$$

Η  $\|\cdot\|$  λοιπόν είναι νόρμα. Συνήθως τη συμβολίζουμε με  $\|\cdot\|_\infty$  και τη λέμε **maximum-νόρμα** ή  **$\ell_\infty$ -νόρμα** στο  $\mathbb{R}^n$ .

Οι μοναδιαίες (ως προς τις τρεις διαφορετικές νόρμες) σφαίρες στο  $\mathbb{R}^2$

$$S_1 = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|_1 = 1\}, \quad S_2 = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}, \quad S_\infty = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|_\infty = 1\}$$



**Σχήμα:** Οι μοναδιαίες σφαίρες  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_\infty$  στο  $\mathbb{R}^2$



### Άσκηση 5

Έστω ότι το  $\mathbf{a}$  είναι ένα τυχαίο αλλά σταθερό διάνυσμα στο  $\mathbb{R}^n$ .

- (α) Ναδειχθεί ότι  $\|\mathbf{a}\|_2 \leq \|\mathbf{a}\|_1$ .
- (β) Ναδειχθεί ότι  $\|\mathbf{a}\|_\infty \leq \|\mathbf{a}\|_p \leq n^{1/p} \|\mathbf{a}\|_\infty$  για  $p = 1, 2$ .

### Παρατήρηση 3

Για το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο  $\mathbb{R}^n$  παρατηρούμε ότι

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| |\cos \theta| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad (6)$$

ισοδύναμα

$$|u_1 v_1 + \dots + u_n v_n| \leq \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} \quad (7)$$

(προσπαθήστε να την αποδείξετε). Στην πραγματικότητα η (6) είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz.

## Θεώρημα 1 (Η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)

Εάν  $X$  είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , τότε

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

για όλα τα διανύσματα  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$  του  $X$ . Ισότητα ισχύει στην ανισότητα αν και μόνο αν τα  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$  είναι γραμμικά εξαρτημένα.

**Απόδειξη.** Για  $t \in \mathbb{R}$  από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \mathbf{u} - t\mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2t\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Αν  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  η προς απόδειξη ανισότητα ισχύει σαν ισότητα με τα δύο μέλη ίσα με μηδέν. Για  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  και  $t = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle / \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$  από την τελευταία ανισότητα παίρνουμε

$$0 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \Rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

που είναι το ζητούμενο. Ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν  $\langle \mathbf{u} - t\mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = 0$ , ισοδύναμα, από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου  $\mathbf{u} - t\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , ή  $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$ , δηλαδή τα  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$  είναι γραμμικά εξαρτημένα.

## Θεώρημα 2

Σε ένα διανυσματικό χώρο  $X$  με εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  η σχέση  $\| \mathbf{u} \| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2}$ ,  $\mathbf{u} \in X$  ορίζει νόρμα. Τη νόρμα αυτή λέμε **επαγόμενη νόρμα**.

Υπό το πρίσμα του τελευταίου αποτελέσματος επαναδιατυπώνουμε

## Θεώρημα 3 (Η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)

Εάν  $X$  είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  και νόρμα που ορίζεται με τη σχέση  $\| \cdot \| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$ , τότε

$$| \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle | \leq \| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \|$$

για όλα τα διανύσματα  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$  του  $X$ . Ισότητα ισχύει στην ανισότητα αν και μόνο αν τα  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$  είναι γραμμικά εξαρτημένα.

**Σημείωση.** Στη περίπτωση μιγαδικού διανυσματικού χώρου με εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ισχύει και πάλι η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz

$$| \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle |^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle.$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν της πραγματικής περίπτωσης.

## Άσκηση 6

Κατά την απόδειξη της ανισότητας Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz δείξαμε ότι  $\|\mathbf{u}\|^2 - 2t\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2\|\mathbf{v}\|^2 \geq 0$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ . Από το συμπέρασμα που εξάγεται για την διακρίνουσα αυτού του τριωνύμου (ποιό;) προκύπτει μια άλλη απόδειξη της ανισότητας (πώς;).

## Άσκηση 7

Αν με  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$  συμβολίσουμε τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα  $[a, b]$  οι οποίες παίρνουν μιγαδικές τιμές, δείξτε ότι η σχέση

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \quad (8)$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο. Συμπεράνατε ότι η σχέση

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \int_a^b f(x) \overline{f(x)} dx \right)^{1/2} = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (9)$$

είναι μια νόρμα στο  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ .

### 3. Ορθογώνιο συμπλήρωμα

#### Ορισμός 6

Αν  $S$  είναι ένα υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου  $X$  με εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  το σύνολο όλων των διανυσμάτων του  $X$  τα οποία είναι ορθογώνια σε κάθε διάνυσμα του  $S$  λέγεται **ορθογώνιο συμπλήρωμα** (orthogonal complement) του  $S$  και συμβολίζεται με  $S^\perp$ , έτσι

$$S^\perp = \{\mathbf{x} \in X : \langle \mathbf{x}, \mathbf{s} \rangle = 0 \text{ για κάθε } \mathbf{s} \in S\}.$$

Αν το  $S$  είναι υποσύνολο του  $X$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^\perp$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  και  $\mathbf{s} \in S$ , τότε

$$\begin{aligned}\langle \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \mathbf{s} \rangle &= \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{s} \rangle + \langle \mu \mathbf{y}, \mathbf{s} \rangle \\ &= \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{s} \rangle + \mu \langle \mathbf{y}, \mathbf{s} \rangle = 0\end{aligned}$$

από τον ορισμό του  $S^\perp$ , κατά συνέπεια  $\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \in S^\perp$ . Δείξαμε λοιπόν ότι

#### Θεώρημα 4

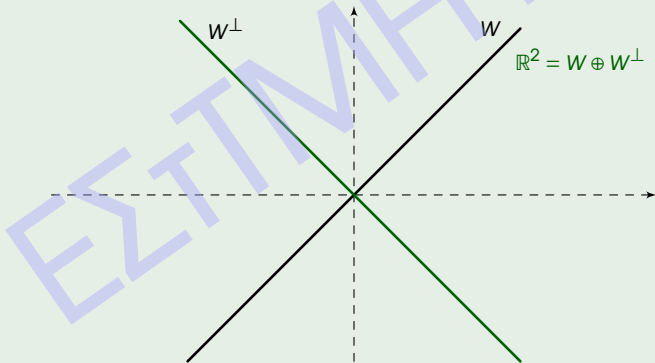
Αν το  $S$  είναι υποσύνολο του διανυσματικού χώρου  $X$  με εσωτερικό γινόμενο, το ορθογώνιο συμπλήρωμα  $S^\perp$  του  $S$  είναι υπόχωρος του  $X$ .

## Παράδειγμα 7

Η ευθεία με εξίσωση  $y = x$  είναι ο υπόχωρος του  $\mathbb{R}^2$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Να βρεθεί ο υπόχωρος  $W^\perp$ .



## παράδειγμα συνέχεια

Αν  $(y \ z)^T \in W^\perp$ , τότε

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = xy + xz = x(y + z) = 0$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , επομένως  $z = -y$ . Κατά συνέπεια, ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, το ορθογώνιο συμπλήρωμα του  $W$  είναι το

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

δηλαδή η ευθεία με εξίσωση  $y = -x$ .

### Άσκηση 8

Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα του υποσυνόλου του  $\mathbb{R}^2$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

## Παρατήρηση 4

Σε σχέση με το Παράδειγμα 7 παρατηρούμε ότι οι υπόχωροι  $W$  και  $W^\perp$  αποτελούν ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων και

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \end{pmatrix},$$

δηλαδή το τυχαίο διάνυσμα  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  γράφεται σαν το άθροισμα  $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$ , όπου  $\mathbf{w} \in W$  και  $\mathbf{w}' \in W^\perp$ . Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται.

## Θεώρημα 5

Αν το  $W$  είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου  $X$  πεπερασμένης διάστασης, με εσωτερικό γινόμενο, τότε  $X = W \oplus W^\perp$ , δηλαδή ο  $X$  είναι το ευθύ άθροισμα των  $W$  και  $W^\perp$ .

## Πόρισμα 1

Αν το  $W$  είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου  $X$  διάστασης  $n$ , με εσωτερικό γινόμενο, τότε  $\dim W^\perp = n - \dim W$ .



## Πρόταση 1

Αν το  $W$  είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου  $X$  διάστασης  $n$ , με εσωτερικό γινόμενο, τότε  $(W^\perp)^\perp = W$ .

Αναρωτιόμαστε αν θα μπορούσε να είναι διαφορετικό το συμπέρασμα αφού

$$X = W \oplus W^\perp \quad \text{και} \quad X = W^\perp \oplus (W^\perp)^\perp,$$

ως συνέπεια του Θεωρήματος 5.

## Απόδειξη.

Δείχνουμε πρώτα ότι  $(W^\perp)^\perp \subseteq W$ . Αν  $\mathbf{x} \in (W^\perp)^\perp$ , τότε ως στοιχείο του χώρου  $X$  γράφεται ως  $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$ , όπου  $\mathbf{w} \in W$  και  $\mathbf{z} \in W^\perp$ , βλέπε Θεώρημα 9.4. Έτσι υπολογίζουμε

$$\mathbf{0} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{w} + \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \|\mathbf{z}\|^2$$

αφού  $\mathbf{w} \perp \mathbf{z}$ , συνεπώς, από τον ορισμό της νόρμας, παίρνουμε  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ , ισοδύναμα  $\mathbf{x} = \mathbf{w} \in W$ , δηλαδή  $(W^\perp)^\perp \subseteq W$ . Απομένει να δείξουμε ότι  $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ . Πράγματι αν  $\mathbf{x} \in W$ , τότε  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$  για κάθε  $\mathbf{y} \in W^\perp$ , επομένως  $\mathbf{x} \in (W^\perp)^\perp$ , που είναι το ζητούμενο. □

**Ερώτημα:** Αν  $X$  είναι διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και  $V, W$  είναι υπόχωροι του  $X$  τέτοιοι ώστε

$$X = V \oplus V^\perp, \quad \text{και} \quad X = V \oplus W,$$

είναι αλήθεια ότι  $W = V^\perp$ ;

### Παράδειγμα 8 (ή αντιπαράδειγμα)

Στο  $\mathbb{R}^2$  θέτουμε

$$L_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad L_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad L_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Τότε  $L_2 = L_1^\perp$  (γιατί);,  $\mathbb{R}^2 = L_1 \oplus L_2$  και  $\mathbb{R}^2 = L_1 \oplus L_3$ , αφού

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix},$$

αλλά κάθε άλλο παρά  $L_2 = L_3$ .