

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη 11+12

Βάση & Διάσταση Διανυσματικού χώρου

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

6 & 8 Νοεμβρίου 2023

Ορισμός 1

Αν \mathcal{V} ένα μη κενό σύνολο και \mathcal{F} είναι ένα σώμα, (στη πράξη $\mathcal{F} = \mathbb{R}$, ή $\mathcal{F} = \mathbb{C}$) και αν $+$ και \cdot είναι δύο πράξεις, για τις οποίες ικανοποιούνται οι νόμοι

- ✓V1 $x + y \in X$, για κάθε $x, y \in X$
- ✓V2 $x + y = y + x$, για κάθε $x, y \in X$
- ✓V3 $x + (y + z) = (x + y) + z$, για κάθε $x, y, z \in X$
- ✓V4 υπάρχει $0 \in X$ τέτοιο ώστε $0 + x = x$ για κάθε $x \in X$
- ✓V5 για κάθε $x \in X$ υπάρχει $-x \in X$ έτσι ώστε $-x + x = 0$
- ✓V6 $\lambda \cdot x \in X$, για κάθε $x \in X$ και $\lambda \in \mathcal{F}$
- ✓V7 $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$, για κάθε $x \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathcal{F}$
- ✓V8 $1 \cdot x = x$, για κάθε $x \in X$
- ✓V9 $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$, για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathcal{F}$
- ✓V10 $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$, για κάθε $x \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathcal{F}$.

θα λέμε ότι η τριάδα $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ είναι ένας **διανυσματικός χώρος** (vector space) πάνω στο σώμα \mathcal{F} . Στη γενική περίπτωση γράφουμε $\mathcal{V}(\mathcal{F})$. Το χώρο $X(\mathbb{R})$ τον λέμε **πραγματικό διανυσματικό χώρο**, ενώ τον $X(\mathbb{C})$ τον λέμε **μιγαδικό διανυσματικό χώρο**. Τα στοιχεία του διανυσματικού χώρου θα τα λέμε **διανύσματα** (vectors).

1. Γραμμική εξάρτηση – γραμμική ανεξαρτησία

Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{a} = \beta \mathbf{b}$, για κάποια σταθερά β θα λέμε ότι τα δύο διανύσματα είναι **γραμμικά εξαρτημένα**. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να γράψουμε

$$(-1)\mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι τα \mathbf{a} , και \mathbf{b} είναι διανύσματα στο \mathbb{R}^n και υπάρχουν σταθερές α και β , όχι και οι δύο μηδέν ώστε

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Έστω ότι $\alpha \neq 0$, τότε θα είναι $\mathbf{a} = -(\beta/\alpha)\mathbf{b} = \lambda \mathbf{b}$, δηλαδή το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου, δηλαδή τα δύο διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Κατά συνέπεια οι παρακάτω εκφράσεις είναι ισοδύναμες

- 1 Τα διανύσματα \mathbf{a} , και \mathbf{b} είναι γραμμικά εξαρτημένα.
- 2 Για κάποια σταθερά λ ισχύει $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$.
- 3 Υπάρχουν σταθερές α και β όχι και οι δύο ίσες με μηδέν ώστε $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Ορισμός 2 (6.2)

Για τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ του διανυσματικού χώρου $X(\mathcal{F})$, θα λέμε ότι

- ① Είναι **γραμμικά εξαρτημένα** (linearly dependent) εάν υπάρχουν σταθερές c_1, c_2, \dots, c_n όχι όλες ίσες με μηδέν ώστε

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

- ② Είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** (linearly independent) εάν οποτεδήποτε για σταθερές c_1, c_2, \dots, c_n ισχύει

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0},$$

τότε αναγκαστικά $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Ισοδύναμα: Θεωρούμε την εξίσωση

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Θα λέμε ότι τα διανύσματα είναι:

γραμμικά ανεξάρτητα αν η εξίσωση έχει μόνο τη μηδενική λύση.

γραμμικά εξαρτημένα αν η εξίσωση έχει μη μηδενική λύση.

Παρατηρήσεις

Ας θεωρήσουμε τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ του διανυσματικού χώρου $X(\mathcal{F})$.

- ① Εάν τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε κάποιο ή κάποια από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Πράγματι υπάρχουν σταθερές c_1, c_2, \dots, c_n μία τουλάχιστον από τις οποίες είναι διάφορη του μηδενός ώστε

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Έστω, για παράδειγμα, ότι $c_2 \neq 0$, τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= -\frac{c_1}{c_2} \mathbf{u}_1 - \frac{c_3}{c_2} \mathbf{u}_3 - \dots - \frac{c_n}{c_2} \mathbf{u}_n \\ &= c'_1 \mathbf{u}_1 + c'_3 \mathbf{u}_3 + \dots + c'_n \mathbf{u}_n. \end{aligned}$$

- ② Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν κάποιο από τα διανύσματα είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, τότε τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι αν, για παράδειγμα, υποθέσουμε ότι το διάνυσμα \mathbf{u}_2 είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, τότε

$$\mathbf{u}_2 = c_1 \mathbf{u}_1 + c_3 \mathbf{u}_3 + \dots + c_n \mathbf{u}_n \Rightarrow c_1 \mathbf{u}_1 + (-1) \mathbf{u}_2 + c_3 \mathbf{u}_3 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0},$$

δηλαδή τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

- ⑧ Εάν κάποιο από τα διανύσματα είναι το μηδενικό, τότε τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα. Πράγματι υποθέτοντας, για παράδειγμα, ότι $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$, τότε για $c_1 = c_3 = \dots = c_n = 0$ και $c_2 \neq 0$ έχουμε

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Παράδειγμα 1

Οι συναρτήσεις \sin και \cos είναι γραμμικά ανεξάρτητες στον χώρο $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ ή $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Πράγματι αν ήταν γραμμικά εξαρτημένες τότε η μια θα ήταν πολλαπλάσιο της άλλης, ισοδύναμα για κάποια πραγματική σταθερά λ θα ήταν $\sin x = \lambda \cos x$, για κάθε x . Τότε όμως θα έπρεπε

$$\sin(\pi/2) = \lambda \cos(\pi/2) \Leftrightarrow 1 = \lambda \cdot 0 = 0$$

που είναι αδύνατο, άρα οι \sin και \cos είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Παράδειγμα 2

Δείξτε ότι τρία διανύσματα

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

στο \mathbb{R}^2 είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Περίπτωση 1: Τα \mathbf{a} και \mathbf{b} είναι γραμμικά εξαρτημένα. Τότε υπάρχουν σταθερές α, β με $\alpha \neq 0$, ή $\beta \neq 0$, ώστε $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Για $\gamma = 0$ είναι

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

με $\alpha \neq 0$, ή $\beta \neq 0$, ισοδύναμα τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Περίπτωση 2: Τα \mathbf{a} και \mathbf{b} είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Δείχνουμε ότι στη περίπτωση αυτή είναι $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Επειδή $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ και $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ θα πρέπει $b_1 \neq 0$, ή $b_2 \neq 0$ και $a_1 \neq 0$, ή $a_2 \neq 0$. Έστω $b_1 \neq 0$, τότε αφού $\mathbf{a} \neq \lambda\mathbf{b}$ για κάθε σταθερά λ , θα πρέπει

$$a_2 \neq \frac{a_1}{b_1} b_2 \quad \text{αφού} \quad a_1 = \frac{a_1}{b_1} b_1$$

παράδειγμα συνέχεια

κατά συνέπεια $a_2 b_1 \neq a_1 b_2$, ή

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} := a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0. \quad (1)$$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι υπάρχουν σταθερές α και β ώστε $\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$, ή ισοδύναμα ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} a_1 \alpha + b_1 \beta &= c_1 \\ a_2 \alpha + b_2 \beta &= c_2 \end{aligned} \quad (2)$$

με αγνώστους τα α και β έχει λύση. Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με b_2 τη δεύτερη με b_1 και αφαιρώντας βρίσκουμε

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) \alpha = b_2 c_1 - b_1 c_2 \Rightarrow \alpha = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad (3)$$

αφού ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός. Όμοια πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με a_2 τη δεύτερη με a_1 και αφαιρώντας βρίσκουμε

παράδειγμα συνέχεια

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) \beta = a_1 c_2 - a_2 c_1 \Rightarrow \beta = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \quad (4)$$

Έτσι γι αυτά τα α και β έχουμε

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + (-1) \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

συνεπώς τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Ορισμός 3

Μια εξίσωση

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b,$$

με a_1, a_2, \dots, a_n, b πραγματικές (ή μιγαδικές) σταθερές λέγεται **γραμμική εξίσωση** στο \mathbb{R}^n (ή στο \mathbb{C}^n). Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων λέγεται **γραμμικό σύστημα**.

Παρατήρηση 1

Στο Παράδειγμα 2 δείξαμε ότι αν τα διανύσματα

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε ισχύει η (1), δηλαδή η ορίζουσα των συνιστωσών των διανυσμάτων είναι διαφορετική του μηδενός. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν η ορίζουσα των συνιστωσών είναι διαφορετική του μηδενός, τότε τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι υποθέτοντας ότι ισχύει η (1) και θεωρώντας την εξίσωση

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

δηλαδή με $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, από τις (3), (4) βρίσκουμε $\alpha = \beta = 0$ που είναι ο ισχυρισμός μας.

♣ Ένα από τα αποτελέσματα που δείξαμε στο Παράδειγμα 2 μπορεί να διατυπωθεί σε "οριζουσιακή" διάλεκτο ως εξής: Ας θεωρήσουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Εάν η ορίζουσα των συντελεστών

$$\det(\mathbf{a}\mathbf{b}) := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \quad (6)$$

είναι διάφορη του μηδενός, τότε το σύστημα (5) έχει μοναδική λύση η οποία δίνεται από τις σχέσεις

$$x = \frac{\det(\mathbf{c}\mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}\mathbf{b})} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\det(\mathbf{a}\mathbf{c})}{\det(\mathbf{a}\mathbf{b})} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \quad (7)$$

Το αποτέλεσμα γενικεύεται και σε περισσότερες διαστάσεις (σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους). Ο τύπος στην (7) λέγεται κανόνας του Cramer. Θα επανέλθουμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 1

Εάν $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n+1}$, είναι διανύσματα στο \mathbb{R}^n , τότε είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Για την απόδειξη του θεωρήματος πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχουν σταθερές c_1, c_2, \dots, c_{n+1} όχι όλες ίσες με μηδέν ώστε

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_{n+1} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Αν

$$\mathbf{u}_k = (a_1^k \ a_2^k \ \dots \ a_n^k)^T, \quad k = 1, 2, \dots, n+1,$$

η εξίσωση (13) είναι ισοδύναμη με ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με $n+1$ αγνώστους, τις σταθερές $c_k, k = 1, 2, \dots, n+1$

$$\begin{aligned} a_1^1 c_1 + a_1^2 c_2 + \dots + a_1^{n+1} c_{n+1} &= 0 \\ a_2^1 c_1 + a_2^2 c_2 + \dots + a_2^{n+1} c_{n+1} &= 0 \\ &\vdots \\ a_n^1 c_1 + a_n^2 c_2 + \dots + a_n^{n+1} c_{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Κατά συνέπεια αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα (14) έχει μη μηδενική λύση.

Ένα τέτοιο σύστημα, του οποίου οι σταθερές στο δεξί μέλος είναι μηδέν, λέγεται **ομοιογενές** (homogeneous). Αποδεικνύουμε λοιπόν το ισοδύναμο

Θεώρημα 2

Κάθε ομοιογενές γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με $n + 1$ αγνώστους έχει μη μηδενική λύση.

Παράδειγμα 3

Για το σύστημα

$$2x + 3y - 2z = 0$$

$$4x - 6y + 2z = 0$$

$x = 1, y = 2, z = 4$ είναι λύση. Υπάρχουν άλλες λύσεις;

Πόρισμα 1

Εάν $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$, είναι διανύσματα στο \mathbb{R}^m , και $n > m$ τότε τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

2. Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Κάθε διάνυσμα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

έτσι ώστε αν u_1, u_2, u_3 είναι οι συνιστώσες του \mathbf{u} , τότε

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3.$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι αν $c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + c_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$, τότε $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (γιατί;) δηλαδή τα διανύσματα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Ορισμός 4

Θα λέμε ότι τα διανύσματα $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ ενός διανυσματικού χώρου $X(\mathcal{F})$ αποτελούν μια **βάση** (basis) του διανυσματικού χώρου αν

- 1 Τα διανύσματα παράγουν το χώρο, δηλαδή $\text{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\} = X$, και
- 2 Τα διανύσματα $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 4

Τα διανύσματα

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

αποτελούν μια βάση του \mathbb{R}^3 .

Πράγματι γράφοντας

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c \end{pmatrix}$$

βλέπουμε ότι για $c = z$, $b = y - z$, $a = x - y$ για το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{u} = (x \ y \ z)^T$ έχουμε

$$\mathbf{u} = (x - y)\mathbf{b}_1 + (y - z)\mathbf{b}_2 + z\mathbf{b}_3,$$

δηλαδή $\text{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} = \mathbb{R}^3$. Επιπλέον από την εξίσωση $a\mathbf{b}_1 + b\mathbf{b}_2 + c\mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$

παράδειγμα συνέχεια

βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ b+c=0 \\ c=0 \end{cases}$$

από όπου με "προς τα πίσω αντικατάσταση" προκύπτει $a = b = c = 0$, δηλαδή τα διανύσματα $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, κατά συνέπεια αποτελούν μια βάση για τον \mathbb{R}^3 .

Παρατήρηση 2

Από το Παράδειγμα (Π3) και την παρατήρηση στην εισαγωγή της παραγράφου συμπεραίνουμε ότι η βάση ενός διανυσματικού χώρου δεν είναι μοναδική. Για παράδειγμα οι

$$\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$$

είναι βάσεις του \mathbb{R}^3 . Η ιδιαίτερη \mathcal{B}_1 λέγεται **κανονική** βάση. Γενικά η $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ με ανάλογα \mathbf{e}_k λέγεται κανονική βάση για τον \mathbb{R}^n .

Το γεγονός ότι οι βάσεις \mathcal{B}_1 και \mathcal{B}_2 του \mathbb{R}^3 περιέχουν τον ίδιο αριθμό διανυσμάτων δεν είναι τυχαίο.

Θεώρημα 3

Εάν $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m\}$ και $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ είναι βάσεις ενός διανυσματικού χώρου X , τότε $m = n$.

Ορισμός 5

Το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης \mathcal{B} ενός διανυσματικού χώρου X λέγεται **διάσταση** (dimension) του χώρου. Αν το \mathcal{B} είναι πεπερασμένο σύνολο θα λέμε ότι ο X έχει πεπερασμένη διάσταση, διαφορετικά ο X θα λέγεται απειροδιάστατος χώρος. Αν η διάσταση του X είναι n , γράφουμε $\dim X = n$. Αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης γράφουμε $\dim X < \infty$.

Θεώρημα 4

Εάν $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$, είναι διανύσματα του m -διάστατου χώρου X , δηλαδή $\dim X = m$, και $n > m$, τότε τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Θεώρημα 5

Εάν $\dim X < \infty$ και ο W είναι υπόχωρος του X , τότε

- 1) Ο υπόχωρος W έχει πεπερασμένη διάσταση.
- 2) $\dim W \leq \dim X$.
- 3) Εάν $\dim W = \dim X$, τότε $W = X$.

Θεώρημα 6 (Επέκταση βάσης υποχώρου)

Εάν $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}$ είναι ένα σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων στο χώρο X πεπερασμένης διάστασης, και $\text{span } S \neq X$, τότε υπάρχουν διανύσματα $\mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{w}_{k+2}, \dots, \mathbf{w}_n$ με $n = \dim X$, ώστε το σύνολο $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{w}_{k+2}, \dots, \mathbf{w}_n\}$ να είναι μια βάση για τον X .

Άσκηση 1

Δείξτε ότι το σύνολο των διανυσμάτων $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ είναι μια βάση για τον \mathbb{P}_n . Συμπεράνατε ότι $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$.

Παράδειγμα 5

Τα διανύσματα

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 + c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

από όπου βλέπουμε ότι $c_1 = c_2 = 0$. Παράγουν κατά συνέπεια έναν διδιάστατο υπόχωρο του \mathbb{R}^3 , τον

$$W = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : y = x + z, \quad \mu\epsilon \quad x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

για τον οποίο αποτελούν μια βάση.

παράδειγμα συνέχεια

Ισχυριζόμαστε ότι εμπλουτίζοντας τη βάση $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ του W με ένα διάνυσμα \mathbf{a}_3 του \mathbb{R}^3 ώστε τα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε παίρνουμε μια βάση του \mathbb{R}^3 . Επιλέγοντας ένα διάνυσμα που "καταστρέφει" τη δομή των στοιχείων του W για παράδειγμα

$$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

βλέπουμε ότι τα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ είναι όντως γραμμικά ανεξάρτητα (γιατί;) και επιπλέον παράγουν τον χώρο \mathbb{R}^3 , αφού

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y-x-z \\ 0 \end{pmatrix} = x\mathbf{a}_1 + z\mathbf{a}_2 + (y-x-z)\mathbf{a}_3.$$

3. Ευθύ άθροισμα υποχώρων

Εάν X είναι ένας διανυσματικός χώρος και V, W είναι υπόχωροι του X ορίζουμε το **άθροισμα** των υποχώρων V και W

$$V + W = \{\mathbf{v} + \mathbf{w} : \mathbf{v} \in V \text{ και } \mathbf{w} \in W\}.$$

Παρατηρούμε ότι $V + W \subseteq X$, επιπλέον δείχνουμε ότι το $V + W$ είναι υπόχωρος του X . Πράγματι αν $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V + W$, τότε $\mathbf{a} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ και $\mathbf{b} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}'$ για κάποια $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ και $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$, και για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} &= \lambda \mathbf{v} + \lambda \mathbf{w} + \mu \mathbf{v}' + \mu \mathbf{w}' \\ &= (\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{v}') + (\lambda \mathbf{w} + \mu \mathbf{w}') \\ &= \mathbf{v}'' + \mathbf{w}''\end{aligned}$$

με $\mathbf{v}'' = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{v}' \in V$ και $\mathbf{w}'' = \lambda \mathbf{w} + \mu \mathbf{w}' \in W$, οπότε $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \in V + W$, κατά συνέπεια το $V + W$ είναι υπόχωρος του X .

Έστω ότι V και W είναι υπόχωροι του X , και έστω ότι $X = V + W$. Αν $\mathbf{x} \in X$ και $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, με $\mathbf{v} \in V$ και $\mathbf{w} \in W$, τότε για $\mathbf{u} \in V \cap W$ ισχύει επίσης ότι $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{w} - \mathbf{u}$, με $\mathbf{v} + \mathbf{u} \in V$ και $\mathbf{w} - \mathbf{u} \in W$, δηλαδή η αναπαράσταση ενός διανύσματος του X σαν άθροισμα ενός διανύσματος του V και ενός του W δεν είναι μοναδική. Αν όμως $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$, τότε μια τέτοια αναπαράσταση είναι μοναδική. Πράγματι αν $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}'$ με $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ και $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$, τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (\mathbf{v} + \mathbf{w}) - (\mathbf{v}' + \mathbf{w}') \\ &= (\mathbf{v} - \mathbf{v}') + (\mathbf{w} - \mathbf{w}') \Rightarrow \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{w}' - \mathbf{w} \end{aligned}$$

οπότε $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in V \cap W$ και $\mathbf{w}' - \mathbf{w} \in V \cap W$, οπότε από την υπόθεση έπεται ότι $\mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{0}$ και $\mathbf{w}' - \mathbf{w} = \mathbf{0}$, δηλαδή $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ και $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$.

Ορισμός 6

Έστω ότι V και W είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου X . Θα λέμε ότι ο X είναι **ευθύ άθροισμα** (direct sum) των V και W εάν $X = V + W$ και $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Εάν ο X είναι ευθύ άθροισμα των V και W γράφουμε $X = V \oplus W$.

Το Θεώρημα 6 επέκτασης της βάσης μπορεί να διατυπωθεί και ως

Θεώρημα 7

Εάν ο X είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και V είναι ένας υπόχωρος του X , τότε υπάρχει υπόχωρος W του X ώστε $X = V \oplus W$.

Άσκηση 2

Έστω

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x + y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Δείξτε ότι

- 1 Το V με τις πράξεις του \mathbb{R}^3 αποτελεί υπόχωρο του \mathbb{R}^3 .
- 2 $\dim V = 2$.
- 3 Να βρεθεί υπόχωρος W του \mathbb{R}^3 , ώστε $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.
- 4 Ποια είναι η διάσταση του W ($\dim W = ;$);
- 5 Είναι ο W ο μοναδικός υπόχωρος για τον οποίο $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.