ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη 5+6

Το αντίστροφο μητρώο και μητρώα ειδικής μορφής

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

20 & 23 Οκτωβρίου 2023

1. Το αντίστροφο μητρώο

Για τα μητρώα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

υπολογίζουμε

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

κατά συνέπεια το A και το B συμπεριφέρονται ως αντίστροφα στοιχεία αφού το γινόμενό τους είναι ίσο με το μοναδιαίο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.

Ορισμός (3.1)

Έστω ότι το A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο. Αν υπάρχει μητρώο B ώστε

$$AB = BA = I$$

λέμε ότι το A είναι **αντιστρέψιμο** και το B θα λέγεται (το) **αντίστροφο** του A.

Παράδειγμα (3.1)

Για το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

παρατηρούμε ότι για κάθε 3×3 μητρώο

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

είναι

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(γιατί;). Άρα το γινόμενο AB δεν μπορεί να είναι ίσο με το ταυτοτικό μητρώο, κατά συνέπεια το A δεν είναι αντιστρέψιμο.

Θεώρημα (3.1)

Το αντίστροφο μητρώο, αν υπάρχει, είναι μοναδικό.

Απόδειξη. Έστω A ένα αντιστρέψιμο μητρώο και έστω ότι B και C είναι τέτοια ώστε $AB = BA = I$ και $AC = CA = I$. Τα B, C έχουν την ίδια διάσταση, επιπλέον από τις ιδιότητες του γινομένου και του αντιστρόφου έχουμε

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Ορισμός (3.2)

Το αντίστροφο μητρώο του τετραγωνικού μητρώου A, εφόσον αυτό υπάρχει, συμβολίζουμε με A^{-1}.

Έτσι αν το A είναι αντιστρέψιμο

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

΄Ασκηση (3.1)

Αν

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{με} \quad ad - bc \neq 0,$$

τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Θεώρημα (3.2)

Εάν A και B είναι αντιστρέψιμα μητρώα ίδιας διάστασης, τότε το μητρώο AB είναι αντιστρέψιμο και $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I,$$

κατά συνέπεια το μητρώο AB είναι αντιστρέψιμο και από τη μοναδικότητα του αντίστροφου έπεται ότι $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Παρατήρηση (3.1)

Εάν το τετραγωνικό μητρώο A είναι αντιστρέψιμο, το A^2 είναι αντιστρέψιμο

$$(A^2)^{-1} = (AA)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^2$$

και επαγωγικά το A^n είναι αντιστρέψιμο, με $n = 1, 2, 3, \ldots$, και $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$. Ορίζουμε λοιπόν

$$A^{-n} = (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Έτσι έχουμε ορίσει τις ακέραιες δυνάμεις του A με τη σχέση

$$A^n = \begin{cases} \underbrace{AA\cdots A}_{n \text{ φορές}} & n = 1, 2, \ldots \\ I & n = 0 \\ (A^{-1})^{-n} & n = -1, -2, \ldots \end{cases}$$

Επίσης από τη σχέση

Παρατήρηση (συνέχεια)

$$(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = (AA^{-1})^{\mathrm{T}} = I = (A^{-1}A)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}$$

συμπεραίνουμε ότι αν το A είναι αντιστρέψιμο, τότε και το A^{T} αντιστρέφεται και $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$, από την μοναδικότητα του αντίστροφου. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε

$$A^{-\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

Άσκηση (3.2)

Εάν το A είναι ένα τετραγωνικό, αντιστρέψιμο μητρώο δείξτε ότι

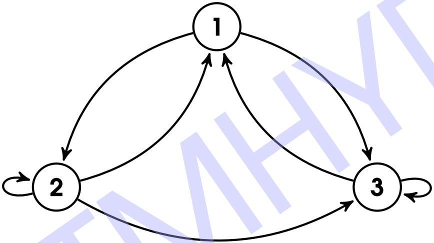
- (α) Το A^{-1} είναι αντιστρέψιμο και $(A^{-1})^{-1} = A$.
- (β) Εάν $\lambda \neq 0$, το λA είναι αντιστρέψιμο και

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}.$$

- (γ) Εάν k και l είναι ακέραιοι αριθμοί , τότε

$$A^kA^l = A^{k+l}, \qquad \text{και} \qquad (A^k)^l = A^{kl}.$$

Εφαρμογή. Στη θεωρία γραφημάτων ένα κατευθυνόμενο γράφημα με n κόμβους μπορεί να παρασταθεί με ένα κατάλληλο $n \times n$ μητρώο $M = \left(m_{ij}\right)$. Αν $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ είναι κόμβοι και υπάρχει ακμή από το i στο j γράφουμε $m_{ij} = 1$ διαφορετικά $m_{ij} = 0$. Για παράδειγμα το μητρώο που το περιγράφει το σχήμα



είναι το $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Το μητρώο $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ καταμετρά όλα τα μονοπάτια μήκους δύο μεταξύ των κόμβων, γενικώτερα το M^k τα μονοπάτια μήκους k, στο γράφημα. Πράγματι ο κόμβος 1 συνδέεται με τον εαυτό του με δύο μονοπάτια μήκους 2, τα 121 και 131. Όμοια ο κόμβος 2 συνδέεται με τον 3 με τρία μονοπάτια, τα 223, 233, και 213.

2. Μητρώα ειδικής μορφής

Ορισμός (3.3)

Έστω $A = \left(a_{ij}\right)$ ένα τετραγωνικό μητρώο.

1. Λέγοντας **κύρια διαγώνιο** του A εννοούμε τη ``διαγώνιο'' του A η οποία αποτελείται από τα στοιχεία a_{ii}.
2. Το A λέγεται **διαγώνιο** (diagonal) αν $a_{ij} = 0$ για $i \neq j$.
3. Το A λέγεται **άνω τριγωνικό** (upper triangular) αν $a_{ij} = 0$ για $i > j$, δηλαδή τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά.
4. Το A λέγεται **κάτω τριγωνικό** (lower triangular) αν $a_{ij} = 0$ για $i < j$, δηλαδή τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά.

´Ασκηση (3.3)

Δείξτε ότι το γινόμενο διαγωνίων μητρώων είναι επίσης διαγώνιο και στη συνέχεια διατυπώστε ένα κανόνα για τον πολλαπλασιασμό διαγωνίων μητρώων.

Παράδειγμα (3.2)

Δείξτε ότι ο γραμμικός συνδυασμός 3×3 άνω τριγωνικών μητρώων είναι άνω τριγωνικό μητρώο

Αρκεί να δείξουμε ότι για τυχαία 3×3 άνω τριγωνικά μητρώα A και B και πραγματικές ή μιγαδικές σταθερές r και s ο γραμμικός συνδυασμός $rA + sB$ είναι 3×3 μητρώο. Πράγματι

$$
\begin{aligned}
rA + sB &= r\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & b_6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ 0 & ra_4 + sb_4 & ra_5 + sb_5 \\ 0 & 0 & ra_6 + sb_6 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

είναι άνω τριγωνικό μητρώο.

΄Ασκηση (3.4)

Δείξτε ότι αν

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και A είναι ένα 3×3 άνω τριγωνικό μητρώο, τότε υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_6$ ώστε

$$A = c_1 M_1 + c_2 M_2 + \cdots + c_6 M_6.$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = aM_1 + bM_2 + cM_3 + pM_4 + qM_5 + tM_6.$$

Παράδειγμα (3.3)

Θεωρούμε τα άνω τριγωνικά μητρώα

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & b_6 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & b_6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 + a_2 b_4 & a_1 b_3 + a_2 b_5 + a_3 b_6 \\ 0 & a_4 b_4 & a_4 b_5 + a_5 b_6 \\ 0 & 0 & a_6 b_6 \end{pmatrix},$$

δηλαδή το γινόμενο AB είναι επίσης άνω τριγωνικό.

4. Μητρώα μετάθεσης

Ας θεωρήσουμε ένα 3×3 μητρώο το οποίο προκύπτει μεταθέτοντας τις γραμμές του ταυτοτικού μητρώου I. Ένα τέτοιο μητρώο θα το λέμε **μητρώο μετάθεσης**. Στη συνέχεια ας δούμε το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ενός τέτοιου μητρώου με ένα διάνυσμα, για παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Το γινόμενο λοιπόν είναι το διάνυσμα που προκύπτει από το αρχικό αν μεταθέσουμε τις ίδιες γραμμές που μετατέθηκαν στο I για να προκύψει το μητρώο μετάθεσης. Από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού μητρώων το ανάλογο αποτέλεσμα συμβαίνει σε κάθε στήλη ενός $3 \times m$ μητρώου αν πολλαπλασιαστεί από τα αριστερά με το μητρώο μετάθεσης (γιατί;). Ειδικότερα το γινόμενο δύο μητρώων μετάθεσης είναι μητρώο μετάθεσης. Τα 3×3 μητρώα μετάθεσης είναι $3! = 6$, τα

$$M_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ενδεικτικά υπολογίζουμε

$$M_3 M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_4$$

$$M_1 M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$M_4 M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

και παρατηρούμε ότι $M_1^{\mathrm{T}} = M_1$ και $M_4^{\mathrm{T}} = M_3$.

Άσκηση (3.5)

Για τα μητρώα μετάθεσης δείξτε ότι

1. $M_k^{-1} = M_k^{\mathrm{T}}$, για $k = 0, 1, \ldots, 5$.
2. Εφοδιασμένα με την πράξη του πολλαπλασιασμού αποτελούν ομάδα.

Ομάδες

Ορισμός

Έστω $\mathscr{G}$ ένα μη κενό σύνολο στο οποίο έχει ορισθεί μια πράξη $\mathscr{G} \times \mathscr{G} \ni (x, y) \to x \cdot y \in \mathscr{G}$. Θα λέμε ότι η δομή $(\mathscr{G}, \cdot)$ είναι **ομάδα** (group) εάν ικανοποιούνται οι νόμοι:

- G1 $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, για κάθε $x, y, z \in \mathscr{G}$. (Προσεταιριστικότητα της πράξης).
- G2 Υπάρχει $e \in \mathscr{G}$, ώστε $e \cdot x = x \cdot e = x$ για κάθε $x \in \mathscr{G}$. (ουδέτερο στοιχείο).
- G3 Για κάθε $x \in \mathscr{G}$, υπάρχει $x^{-1} \in \mathscr{G}$, ώστε $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = e$. (αντίστροφο στοιχείο).

Οι $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, όπου ``+'' και ``·'' είναι οι συνήθεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμός, αντίστοιχα, είναι ομάδες. Όμοια οι $(\mathbb{C}, +)$ και $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ είναι ομάδες. Επίσης η δομή $(\mathbb{R}^n, +)$ είναι ομάδα.

Παράδειγμα (Δ3.4)

Έστω A ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο. Κάθε ένα-προς-ένα απεικόνιση του A επί του A λέγεται **μετάθεση** (permutation) του A. Αν $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, ο τρόπος που συνήθως συμβολίζουμε μια μετάθεση, έστω s, του A είναι

$$s = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ s(a_1) & s(a_2) & \ldots & s(a_n) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Το σύνολο των μεταθέσεων του A συμβολίζουμε με S_A.

- Έστω $s_1, s_2 \in S_A$ και ας θεωρήσουμε τη σύνθεση $s_1 \circ s_2$, όπου $(s_1 \circ s_2)(a_i) = s_1(s_2(a_i))$. Επειδή οι s_1 και s_2 είναι ένα-προς-ένα έχουμε

$$s_1(s_2(a_i)) = s_1(s_2(a_j)) \Rightarrow s_2(a_i) = s_2(a_j) \Rightarrow a_i = a_j,$$

  δηλαδή η $s_1 \circ s_2$ είναι ένα-προς-ένα. Επίσης $s_1(s_2(A)) = s_1(A) = A$, δηλαδή η $s_1 \circ s_2$ είναι επί του A κατά συνέπεια $s_1 \circ s_2 \in S_A$.

Αν $s_i, s_j \in S_A$ ορίζουμε το γινόμενο, γράφουμε απλά, $s_i s_j$ να είναι η σύνθεση $s_i \circ s_j$. Η $(S_A, \cdot)$ είναι ομάδα.

Παράδειγμα (Δ3.5)

Μια **γραμμική κίνηση** (linear motion) στο $\mathbb{R}^2$ είναι μια απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η οποία ``μετακινεί'' ή μετασχηματίζει το σημείο (x, y) στο σημείο (x', y') ώστε

$$\begin{aligned} x' &= ax + by, \\ y' &= cx + dy, \end{aligned} \qquad \text{με} \qquad ad - bc \neq 0. \tag{3}$$

Η ποσότητα $ad - bc$ λέγεται **ορίζουσα** (determinant) του μετασχηματισμού T και τη γράφουμε ως

$$J_T := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \tag{4}$$

Η σχέση $J_T \neq 0$ εξασφαλίζει ότι η T είναι ένα-προς-ένα, κατά συνέπεια η αντίστροφη απεικόνιση T^{-1} υπάρχει. Πράγματι, λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{ad - bc} x' + \frac{-b}{ad - bc} y', \\ y &= \frac{-c}{ad - bc} x' + \frac{a}{ad - bc} y'. \end{aligned} \tag{5}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επιπλέον υπολογίζοντας την ορίζουσα του αντίστροφου μετασχηματισμού βρίσκουμε

$$J_{T^{-1}} = \frac{da - bc}{(ad - bc)^2} = \frac{1}{ad - bc} \neq 0,$$

κατά συνέπεια η αντίστροφη απεικόνιση T^{-1} είναι επίσης γραμμική κίνηση. Εάν $T(x,y) = (x',y')$ και $T'(x',y') = (x'',y'')$, όπου η T' δίνεται όπως στην (3) με a',b',c',d' στη θέση των a,b,c,d αντίστοιχα, και με $T'T$ συμβολίσουμε τη σύνθεση $T' \circ T$, τότε

$$\begin{aligned} x'' &= a'x' + b'y' = a'(ax + by) + b'(cx + dy) \\ &= (a'a + b'c)x + (a'b + b'd)y \\ y'' &= c'x' + d'y' = c'(ax + by) + d'(cx + dy) \\ &= (c'a + d'c)x + (c'b + d'd)y \end{aligned}$$

και για την ορίζουσα της σύνθεσης υπολογίζουμε

$$(a'a + b'c)(c'b + d'd) - (a'b + b'd)(c'a + d'c) = (ad - bc)(a'd' - b'c') \neq 0,$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

ισοδύναμα

$$J_{T\circ T'} = J_T J_{T'} \neq 0,$$

κατά συνέπεια η $T'T$ είναι και αυτή μια γραμμική κίνηση. Επιπλέον η ταυτοτική απεικόνιση $I(x,y) = (x,y)$ είναι επίσης γραμμική κίνηση αφού η (3) ικανοποιείται

$$\begin{aligned} x &= 1x + 0y, \\ y &= 0x + 1y, \end{aligned} \qquad \text{με} \qquad J_I = 1 - 0 \neq 0.$$

Δείχνεται εύκολα (και αφήνεται σαν άσκηση) ότι αν T, T', T'' είναι γραμμικές κινήσεις, τότε $(TT')T'' = T(T'T'')$. Επομένως οι κινήσεις αυτές με την πράξη του πολλαπλασιασμού-σύνθεσης αποτελούν ομάδα. Η ομάδα αυτή λέγεται διδιάστατη **γενική γραμμική ομάδα** (general linear group) και συμβολίζεται με $GL(2,\mathbb{R})$.

Είδαμε ότι ο μετασχηματισμός T είναι ένα-προς-ένα, ισοδύναμα αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν $J_T \neq 0$, δηλαδή η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Κάθε τέτοια απεικόνιση μπορεί να εκφραστεί ως το γινόμενο ενός 2×2 μητρώου με διάνυσμα στο $\mathbb{R}^2$, συγκεκριμένα

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Είδαμε ότι η σχέση $ad - bc \neq 0$ εξασφαλίζει ότι υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός και δίνεται από τη σχέση

$$T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{7}$$

βλέπε (5), έτσι ώστε αν $\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, τότε $\mathbf{x} = T^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1}\mathbf{y}$ αφού

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(Άσκηση (3.1)). Την ποσότητα $ad - bc$ θα τη λέμε ορίζουσα του μητρώου στην (6).

Παράδειγμα (συνέχεια)

Εάν $T(x,y)=(x',y')$ και $T'(x',y')=(x'',y'')$, όπου η T' δίνεται όπως στην (6) με a',b',c',d' στη θέση των a,b,c,d αντίστοιχα, και με $T'T$ συμβολίσουμε τη σύνθεση $T'\circ T$ δείξαμε ότι

$$T'T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a'a+b'c & a'b+b'd\\ c'a+d'c & c'b+d'd\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

το οποίο όμως είναι

$$=\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε, ισοδύναμα, τη διδιάστατη γενική γραμμική ομάδα $GL(2,\mathbb{R})$ ως το σύνολο των 2×2 μητρώων με μη μηδενική ορίζουσα (ισοδύναμα των αντιστρέψιμων μητρώων), με πράξη τον πολλαπλασιασμό.

Ορισμός

Έστω $\mathscr{F}$ ένα μη κενό σύνολο στο οποίο έχουν ορισθεί δύο πράξεις, πρόσθεση $\mathscr{F} \times \mathscr{F} \ni (x,y) \to x+y \in \mathscr{F}$ και πολλαπλασιασμός, $\mathscr{F} \times \mathscr{F} \ni (x,y) \to x \cdot y \in \mathscr{F}$. Η δομή $(\mathscr{F},+,\cdot)$ λέγεται **σώμα** (field) εάν ισχύουν οι νόμοι

- F1 $x+y=y+x$, για κάθε $x,y \in \mathscr{F}$.
- F2 $(x+y)+z=x+(y+z)$, για κάθε $x,y,z \in \mathscr{F}$.
- F3 Υπάρχει $0 \in \mathscr{F}$, ώστε $x+0=x$, για κάθε $x \in \mathscr{F}$.
- F4 Για κάθε $x \in \mathscr{F}$ υπάρχει $-x \in \mathscr{F}$, ώστε $x+(-x)=0$.
- F5 $x \cdot y = y \cdot x$, για κάθε $x,y \in \mathscr{F}$.
- F6 $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, για κάθε $x,y,z \in \mathscr{F}$.
- F7 Υπάρχει $1 \in \mathscr{F}$, $1 \neq 0$ ώστε $x \cdot 1 = x$, για κάθε $x \in \mathscr{F}$.
- F8 Για κάθε $x \neq 0$ υπάρχει $x^{-1} \in \mathscr{F}$, ώστε $x \cdot x^{-1} = 1$.
- F9 $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$, για κάθε $x,y,z \in \mathscr{F}$.

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ και $(\mathbb{C},+,\cdot)$ είναι τα τυπικά παραδείγματα της δομής του σώματος.