ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2022–23

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Ορίζουσες, Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα, Διαγωνοποίηση

1. Εάν $A = (a_{ij})$ είναι $n \times n$, $n > 1$, και $a_{ij} = ij$, δείξτε ότι $\det A = 0$.

2. Εάν $A = (a_{ij})$ είναι $n \times n$, $n > 1$, και $a_{ij} = i + j$, δείξτε ότι $\det A = 0$.

3. Εάν $A = (a_{ij})$ είναι $n \times n$, $n > 1$, και το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής είναι ίσο με μηδέν, δείξτε ότι $\det A = 0$.

4. Αποδείξτε ότι η εξίσωση της ευθείας η οποία περιέχει τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) δίνεται με τη σχέση
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Εάν το A είναι ένα πραγματικό, συμμετρικό μητρώο δείξτε ότι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε ξένες μεταξύ τους ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.

6. Εάν το A είναι ένα πραγματικό, συμμετρικό μητρώο, $\mathbf{x}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A, και $\mathbf{v}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο $\mathbf{x}$, δείξτε ότι και το $A\mathbf{v}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{x}$.

7. Εάν τα μητρώα A και B είναι όμοια, τότε έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

8. Ένα 3×3 μητρώο A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ και $\lambda_3 = 3$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα
$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   (α΄) Είναι το μητρώο A αντιστρέψιμο; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
   (β΄) Είναι το μητρώο A διαγωνοποιήσιμο; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
   (γ΄) Να βρεθεί το μητρώο A, μια αναπαράταση αρκεί.

9. Δείξτε ότι ένα πραγματικό, συμμετρικό, θετικά ορισμένο μητρώο έχει θετικές ιδιοτιμές.

10. **Ένας γρίφος;** Το πραγματικό, ορθογώνιο μητρώο
$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$
περιστρέφει κάθε διάνυσμα $\mathbf{x}$ κατά γωνία θ (κατά τη θετική φορά), κατά συνέπεια, εκτός και αν $\theta = k\pi$, όπου k ακέραιος, τα διανύσματα $\mathbf{x}$ και $Q\mathbf{x}$ δεν είναι ποτέ συγγραμμικά, ισοδύναμα δεν υπάρχει διάνυσμα $\mathbf{x}$ ώστε $Q\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ για κάποιο πραγματικό λ. Έχει το Q ιδιοτιμές;

ΛΥΣΕΙΣ

1. Υπολογίζουμε
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 4 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n & 2n & \cdots & n^2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n & 2n & \cdots & n^2 \end{vmatrix} = 0$$
αφού δύο γραμμές είναι ίσες.

2. Υπολογίζουμε

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & \cdots & 1+n \\ 3 & 4 & \cdots & 2+n \\ 4 & 5 & \cdots & 3+n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n+1 & n+2 & \cdots & n+n \end{vmatrix}$$

και με πράξεις $r_3 \to r_3 - r_2$ και $r_2 \to r_2 - r_1$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & \cdots & 1+n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n+1 & n+2 & \cdots & n+n \end{vmatrix} = 0$$

αφού δύο γραμμές είναι ίσες.

3. 1ος τρόπος: Από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$

$$a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{i(n-1)} + a_{in} = 0 \Rightarrow -a_{i1} - a_{i2} - \cdots - a_{i(n-1)} = a_{in}$$

συνεπώς η n-στήλη, όπως και κάθε άλλη, είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, επομένως το A δεν αντιστρέφεται, ισοδύναμα $\det A = 0$.
2ος τρόπος: Από την υπόθεση έπεται ότι

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

(γιατί;) κατά συνέπεια το ομοιογενές σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μη μηδενικές λύσεις, ισοδύναμα το A δεν έχει αντίστροφο, ισοδύναμα $\det A = 0$.

4. Αν $ax + by = m$ είναι η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας, με μία τολάχιστον από τις σταθερές a, b, m διάφορη του μηδενός, και αν (x, y) είναι τυχαίο σημείο αυτής της ευθείας, τότε

$$\left.\begin{aligned} ax + by - m &= 0 \\ ax_1 + by_1 - m &= 0 \\ ax_2 + by_2 - m &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

επομένως το σύστημα έχει μη μηδενική λύση, κατά συνέπεια το μητρώο των συντελεστών είναι μη αντιστρέψιμο, ισοδύναμα

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. **Σημείωση:** Εάν $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ είναι διανύσματα και A είναι ένα συμμετρικό μητρώο, τότε

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (A\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}} A \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle.$$

Εάν $\lambda \neq \mu$ είναι ιδιοτιμές του A με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle &\Rightarrow \langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mu\mathbf{y} \rangle \\ &\Rightarrow \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mu\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\ &\Rightarrow (\lambda - \mu)\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Επειδή $\lambda \neq \mu$ από την τελευταία σχέση έπεται ότι $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, ισοδύναμα τα $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

6. Εάν λ είναι η ιδιοτιμή του A που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}$, τότε

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{v}, \lambda\mathbf{x}\rangle = \lambda\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle = 0$$

από την υπόθεση, συνεπώς $A\mathbf{v} \perp \mathbf{x}$.

7. Έστω ότι $A = MBM^{-1}$, τότε για κάθε σταθερά λ έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda I - A &= \lambda I - MBM^{-1} \\ &= \lambda MM^{-1} - MBM^{-1} \\ &= M(\lambda I)M^{-1} - MBM^{-1} \\ &= M(\lambda I - B)M^{-1} \end{aligned}$$

κατά συνέπεια

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det(M(\lambda I - B)M^{-1}) \\ &= (\det M)\det(\lambda I - B)(\det M)^{-1} \\ &= \det(\lambda I - B) \end{aligned}$$

ισοδύναμα $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$, επομένως τα μητρώα έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

8. (α′) ΝΑΙ, γιατί το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του A.
(β′) ΝΑΙ, γιατί τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη διπλή ιδιοτιμή $\lambda = 3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
(γ′) Το A υπολογίζεται από τη γνωστή σχέση $A = XDX^{-1}$, οπότε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \cdots$$

9. Ένα $n \times n$ πραγματικό μητρώο A λέγεται θετικά ορισμένο εάν

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} > 0$$

για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$. Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A και $\mathbf{x}$ είναι ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, ισοδύναμα $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, τότε πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} &= \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \lambda\mathbf{x} \\ &= \lambda\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ &= \lambda\|\mathbf{x}\|^2. \end{aligned}$$

Από την υπόθεση το αριστερό μέλος είναι θετικό, επομένως και το δεξιό, κατά συνέπεια $\lambda > 0$, αφού $\|\mathbf{x}\|^2 > 0$, που είναι ό,τι θέλουμε να δείξουμε.
Ερώτημα: Πώς θα μπορούσε να αποδειχθεί αυτό το αποτέλεσμα κάνοντας χρήση της γνωστής σχέσης ομοιότητας

$$A = XDX^{-1},$$

όπου D είναι το διαγώνιο μητρώο με στοιχεία τις ιδιοτιμές του A, και X το μητρώο με στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα;

10. Οι ιδιοτιμές του Q είναι οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\det(\lambda I - Q) = 0$, έτσι υπολογίζουμε

$$\begin{vmatrix} \lambda - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \lambda - \cos\theta \end{vmatrix} = (\lambda - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική

$$\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta$$

κατά συνέπεια υπάρχουν δύο μιγαικές συζυγείς (συμμετρικές ως προς τον x-άξονα) ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\cos\theta \pm 2\sin\theta\sqrt{-1}}{2} = \cos\theta \pm i\sin\theta.$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές του Q είναι οι: $\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta$ και $\lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta$.
Ερώτημα: Ποια είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα;