Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2022–23

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 9η σειρά (σχετικές με τις Διαλέξεις 09-10)

Ανασκόπηση

- **Το μητρώο της ορθογώνιας προβολής** Έστω $\mathbf{a}$ ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$ και W ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.

  (1) Η προβολή ενός διανύσματος $\mathbf{u}$ επί του $\mathbf{a}$, $\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u}$ υλοποιείται μέσω του μητρώου

  $$P = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathrm{T}}}{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}} \qquad \text{ώστε} \qquad \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u} = P\mathbf{u}.$$

  (2) Η προβολή ενός διανύσματος $\mathbf{u}$ επί του W, $\operatorname{proj}_W \mathbf{u}$ υλοποιείται μέσω του μητρώου

  $$P = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}} \qquad \text{ώστε} \qquad \operatorname{proj}_W \mathbf{u} = P\mathbf{u},$$

  όπου A είναι ένα μητρώο με στήλες τα διανύσματα μιας βάσης του W.

- Έστω P ένα μητρώο.

  (1) Το P είναι μητρώο **προβολής** αν και μόνο αν $P = P^2$.
  (2) Το P είναι μητρώο **ορθογώνιας προβολής** αν επιπλέον $P^{\mathrm{T}} = P$.

- **Διάλεξη 09 σελ. 34-35.** Εάν P είναι μητρώο ορθογώνιας προβολής στο $\mathbb{R}^m$ επί υπόχωρου W, τότε

  (1) $\operatorname{range} P = W$ και $\operatorname{null} P = \operatorname{range}(I - P)$.
  (2) $\mathbb{R}^m = \operatorname{range} P \oplus \operatorname{null} P$ και $\operatorname{range} P \perp \operatorname{null} P$.

Ασκήσεις

1. **Η νόρμα Frobenius.** Εάν A είναι ένα $n \times n$ μητρώο, ορίζουμε το **ίχνος** (trace) του A να είναι το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του A. Το συμβολίζουμε με $\operatorname{trace} A$ έτσι

   $$\operatorname{trace} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

   (α΄) Δείξτε ότι στον χώρο $\mathbb{M}^{n,m}(\mathbb{R})$ η σχέση

   $$\langle A, B\rangle := \operatorname{trace}(A^{\mathrm{T}}B)$$

   είναι ένα εσωτερικό γινόμενο. Την επαγόμενη νόρμα ονομάζουμε **νόρμα Frobenius**.

   (β΄) Βρείτε μια αναλυτική έκφραση για την νόρμα Frobenius $\|\cdot\|_F$ του μητρώου $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}^{2,3}$.

2. Εάν

   $$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

   να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα $S^\perp$ καθώς και μια βάση του $S^\perp$.

3. Εάν για ένα $n \times n$ μητρώο A ισχύει $A^2 = A$ και $\operatorname{rank} A = n$, δείξτε ότι $A = I$.

4. Έστω A ένα $n \times 3$ μητρώο του οποίου οι στήλες είναι ορθογώνιες.

   (α΄) Εάν η κάθε στήλη έχει μέτρο 4, ποιο είναι το μητρώο $A^{\mathrm{T}}A$;

   (β΄) Εάν οι στήλες έχουν μέτρα 1, 2 και 3 αντίστοιχα, ποιο είναι το μητρώο $A^{\mathrm{T}}A$;

5. Άσκηση 17 §4.2 Strang. Αν $P^2 = P$ δείξτε ότι $(I - P)^2 = I - P$. Όταν ο P προβάλλει επί του χώρου των στηλών του P, $\operatorname{range} P$, ο $I - P$ προβάλλει επί του _________.

6. Άσκηση 1 §4.2 Strang. Προβάλετε το $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ επί της ευθείας που διέρχεται από το $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

7. Άσκηση 3 §4.2 Strang. Στο πρόβλημα Άσκηση 1 §4.2 Strang βρείτε το μητρώο προβολής.

8. Να βρεθεί το μητρώο ορθογώνιας προβολής P επί του υπόχωρου W ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα
$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

9. Δίνονται τα διανύσματα
$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix}2 & 2 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

   (α΄) Να βρεθούν τα μητρώα ορθογώνιας προβολής P_1 και P_2 αντίστοιχα επί των ευθειών δια των $\mathbf{a}_1$ και $\mathbf{a}_2$.

   (β΄) Δείξτε ότι αν $\mathbf{u} \in \operatorname{range} P_1$ και $\mathbf{v} \in \operatorname{range} P_2$, τότε $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

   (γ΄) Υπολογίστε το γινόμενο P_1P_2 και εξηγήστε γιατί είναι αυτό που είναι.

10. Αν $\mathbf{q} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα δείξτε ότι το μητρώο $Q = I - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}$

   (α΄) Είναι ορθογώνιο.

   (β΄) Ικανοποιεί τη σχέση $Q^2 = I$.

   (γ΄) Ανακλά κάθε διάνυσμα ως προς την ευθεία η οποία είναι ορθογώνια στο $\mathbf{q}$, δηλαδή κατά μήκος του $\mathbf{q}^{\perp} = \begin{pmatrix}-\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

11. Εάν Q_1 και Q_2 είναι $n \times n$ ορθογώνια μητρώα δείξτε ότι το γινόμενο Q_1Q_2 είναι επίσης ορθογώνιο μητρώο.

12. Να βρεθεί η πλησιέστερη ευθεία (των ελαχίστων τετραγώνων) στα σημεία $(0, 6)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$.