Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2022–23

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 3η σειρά, σχετικές με τη Διάλεξη 03

Οι ασκήσεις (1.-6.) που ακολουθούν αποσκοπούν στον έλεγχο κατανόησης των βασικών εννοιών και στοιχειωδών πράξεων σχετικών με μητρώα. Είναι της μορφής Σωστό/Λάθος (Σ Λ). Απαντάτε κυκλώνοντας κατάλληλα. Μην απαντάτε στην τύχη, σκεφτείτε και επεξεργαστείτε τα δεδομένα πριν απαντήσετε.

1. (Σ Λ) Εάν A, B είναι μητρώα του ιδίου μεγέθους και r είναι μια σταθερά, τότε
$$(rA + B)^{\mathrm{T}} = rA^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}.$$
2. (Σ Λ) Εάν A, B είναι αντιστρέψιμα μητρώα του ιδίου μεγέθους, τότε και το $A + B$ είναι αντιστρέψιμο.
3. (Σ Λ) Εάν το A είναι ένα αντιστρέψιμο μητρώο, τότε και το A^{T} είναι αντιστρέψιμο.
4. (Σ Λ) Εάν για τα μητρώα A και B το $A + B^{\mathrm{T}}$ ορίζεται, τότε τα A και B είναι του ιδίου μεγέθους.
5. (Σ Λ) Εάν για τα μητρώα A και B το B είναι αντιστρέψιμο και το $A + B^{-1}$ ορίζεται, τότε τα A και B είναι του ιδίου μεγέθους.
6. (Σ Λ) Εάν για τα τετραγωνικά μητρώα A και B ισχύει $AB = O$, τότε $A = O$ ή $B = O$.
7. Αν
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{με} \quad ad - bc \neq 0,$$
τότε
$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
8. Έστω ότι το τετραγωνικό μητρώο A ικανοποιεί τη σχέση $A^2 - 4A + I = O$, όπου O είναι το μηδενικό μητρώο. Δείξτε το A αντιστρέφεται και ότι $A^{-1} = 4I - A$.
9. Εάν το A είναι τετραγωνικό μητρώο ώστε $A^{k+1} = O$, για κάποιο θετικό ακέραιο k, δείξτε ότι
$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^k.$$
10. Εάν A και B είναι τετραγωνικά μητρώα ώστε $AB = O$ και το A είναι αντιστρέψιμο, δείξτε ότι $B = O$.
11. Έστω ότι το A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο. Αν $A^2 = O$, δείξτε ότι το A δεν αντιστρέφεται.
12. Θεωρούμε το διαγώνιο μητρώο
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$
με $a_i \neq 0$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Δείξτε ότι το A είναι αντιστρέψιμο και βρείτε το A^{-1}.

13. Για τα 3×3 μητρώα μετάθεσης δείξτε ότι

   (α') $M_k^{-1} = M_k^{\mathrm{T}}$, για $k = 0, 1, \ldots, 5$.

   (β') Εφοδιασμένα με την πράξη του πολλαπλασιασμού αποτελούν ομάδα.

14. Εάν
$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 \\ 0 & 1 & c_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
ορίζουμε $N = C - I$. Δείξτε ότι $N^3 = O$. Δείξτε επίσης ότι το C αντιστρέφεται και ότι
$$C^{-1} = I - N + N^2 - N^3.$$
Υπόδειξη: $C = I + N$.

15. Έστω J_n το $n \times n$ μητρώο του οποίου όλα τα στοιχεία είναι 1. Δείξτε ότι

   (α') $J_n^2 = nJ_n$

   (β') $(I - J_n)^{-1} = I - \dfrac{1}{n-1} J_n$.