

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 1η σειρά

1. Εάν

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

είναι διανύσματα στο \mathbb{R}^2 με $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, και $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, εξηγήστε τι περιγράφει καθένα από τα σύνολα

(α) $S_1 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \leq 0 \text{ και } \mu \leq 0\}$.

(β) $S_2 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \mu \geq 0\}$.

(γ) $S_3 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \mu \in \mathbb{R}\}$.

(δ) $S_4 = \{\mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \mu \in \mathbb{R}\}$.

(ε) $S_5 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \in [0, 1], \mu \in \mathbb{R}\}$.

2. Να βρεθούν σταθερές c_1, c_2, c_3 ώστε

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν σταθερές c_1, c_2, c_3 ώστε

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. **Ορισμός.** Εάν \mathbf{a} και \mathbf{b} είναι διανύσματα στο \mathbb{R}^n ο ιδιαίτερος γραμμικός συνδυασμός

$$(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

λέγεται **κυρτός συνδυασμός** των \mathbf{a} και \mathbf{b} .

(α) Θεωρείστε τον κυρτό συνδυασμό

$$\mathbf{v}(t) = (1-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Δείξτε ότι καθώς το t διαγράφει το διάστημα $[0, 1]$ το διάνυσμα $\mathbf{v}(t)$ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(0, 2)$ και $(1, 1)$ ¹.

(β) Ελευθερώνοντας το t ώστε να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή δικαιολογήστε γιατί το $\mathbf{v}(t)$ παριστάνει την εξίσωση της ευθείας του επιπέδου η οποία περιέχει τα σημεία $(0, 2)$ και $(1, 1)$.

¹Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε διάστημα $[a, b]$ της ευθείας ισχύει

$$[a, b] = \{x : x = (1-t)a + tb \text{ για κάποιο } t \in [0, 1]\}.$$

(γ) Γράφοντας

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

και διαπιστώνοντας ότι η εν λόγω ευθεία είναι παράλληλη στο διάνυσμα $(1 \ -1)^T$, γενικεύστε και δείξτε ότι η ευθεία του επιπέδου η οποία περιέχει το σημείο (a, b) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{u} = (p \ q)^T$ δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Βλέπε Άσκηση 1 (δ).

5. Αν $a, b, \theta \in \mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο δείξτε ότι

$$(a \cos \theta + b \sin \theta)^2 \leq a^2 + b^2.$$

6. **♦ Η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz** Εάν \mathbf{u} και \mathbf{v} είναι διανύσματα στο \mathbb{R}^n , τότε

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

Ισότητα ισχύει στην ανισότητα αν και μόνο αν τα $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ για κάποια σταθερά λ .

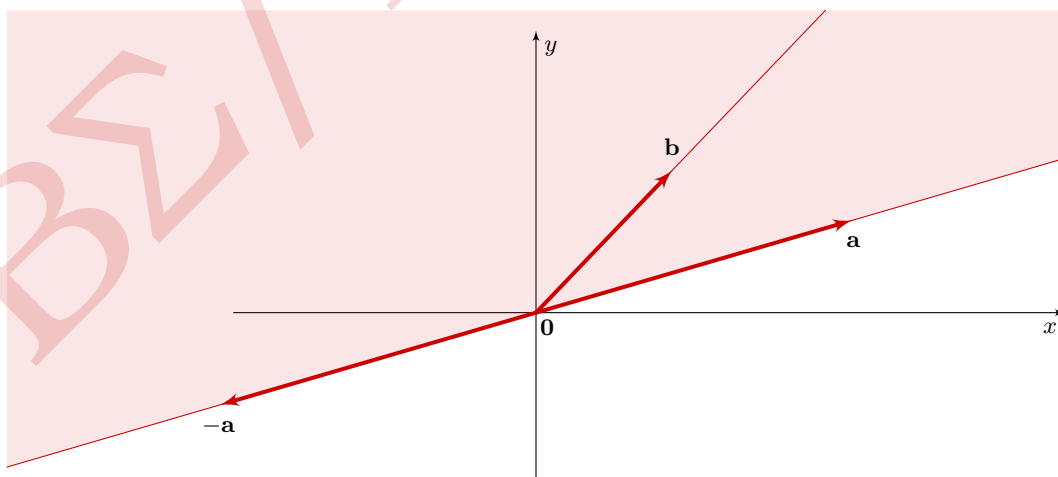
7. Εάν $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο δείξτε ότι

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

Λύση της 1.

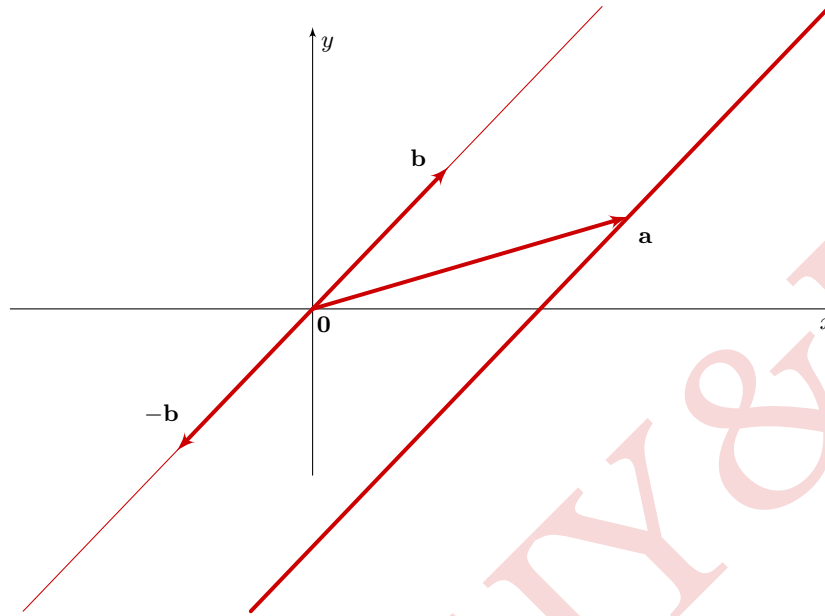
(β) $S_2 = \{\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} : \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \mu \geq 0\}$.

Το τυπικό διάνυσμα του S_2 είναι διαγώνιος παραλληλογράμμου με πλευρές κατά μήκος του διανύσματος \mathbf{a} , ή του $-\mathbf{a}$, δηλαδή της ευθείας $\lambda \mathbf{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, και του διανύσματος \mathbf{b} , δηλαδή της ημιευθείας $\mu \mathbf{b}$, $\mu \geq 0$. Κατά συνέπεια το S_2 είναι το ημιεπίπεδο που καθορίζει η ευθεία δια του \mathbf{a} το οποίο περιέχει το διάνυσμα \mathbf{b} . Είναι το σκιασμένο στο Σχήμα.

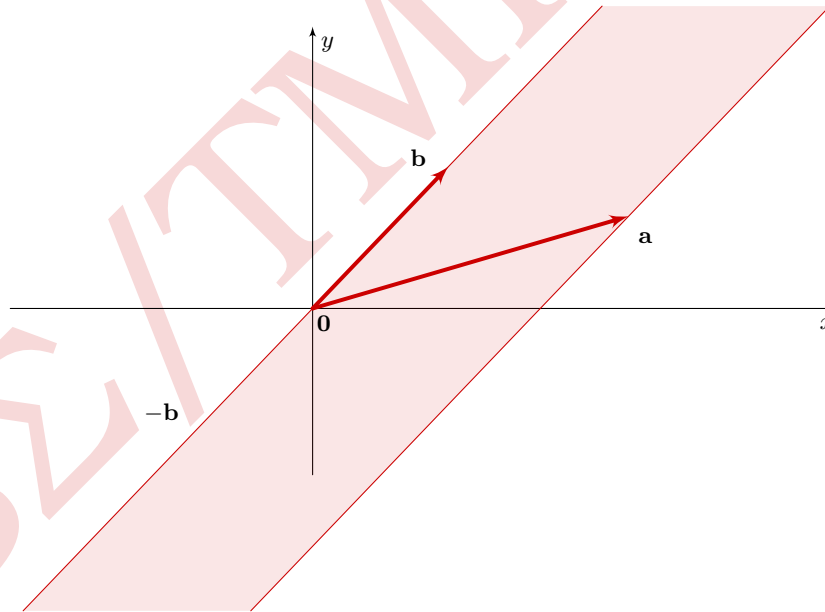


(δ) $S_4 = \{\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} : \mu \in \mathbb{R}\}$.

Το τυπικό διάνυσμα του S_4 είναι διαγώνιος παραλληλογράμμου με μία πλευρά το διάνυσμα \mathbf{a} , και την άλλη κατά μήκος της ευθείας $\mu\mathbf{b}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Κατά συνέπεια το S_4 είναι η ευθεία δια του \mathbf{a} παράλληλη στην $\mu\mathbf{b}$.



(ε) $S_5 = \{\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} : \lambda \in [0, 1], \mu \in \mathbb{R}\}$.



Για τη λύση της 4.

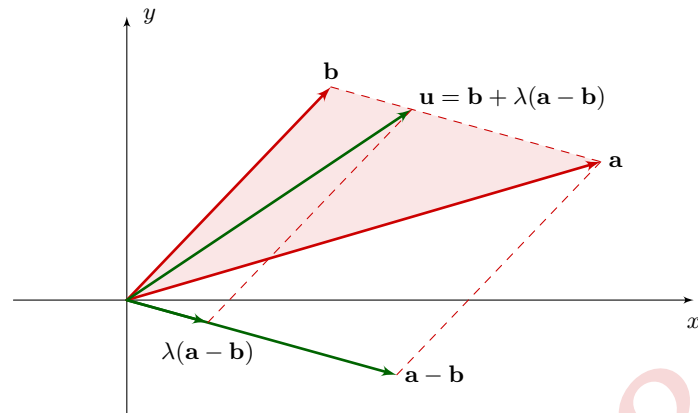
Αν \mathbf{a} και \mathbf{b} είναι δύο διανύσματα στο \mathbb{R}^2 τα οποία δεν περιέχονται στην ίδια ευθεία ο **κυρτός συνδυασμός** τους είναι το διάνυσμα

$$\mathbf{u} = (1 - \lambda)\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Παρατηρώντας ότι το \mathbf{u} μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{u} = \mathbf{b} + \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b}),$$

βλέπουμε ότι το \mathbf{u} είναι η διαγώνιος παραλληλογράμμου με πλευρές κατά μήκος των \mathbf{b} και $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, βλέπε Σχήμα. Κατά συνέπεια το \mathbf{u} διαγράφει τη βάση του τριγώνου με “πλευρές” τα \mathbf{b} και \mathbf{a} , καθώς το λ διαγράφει το διάστημα $[0, 1]$. Για $\lambda = 0$ είναι $\mathbf{u} = \mathbf{b}$, ενώ για $\lambda = 1$ είναι $\mathbf{u} = \mathbf{a}$.



ΒΣ/ΤΜΗΝΥ&Π