# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

## Διάλεξη 13

## Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Ε. Γαλλόπουλος & Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

9 Ιανουαρίου 2023

## 1. Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Αν $X(\mathbb{F})$ και $Y(\mathbb{F})$ με $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, ή $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ είναι διανυσματικοί χώροι μια συνάρτηση $L: X \to Y$ ή $L: X \to \mathbb{F}$ λέγεται **γραμμικός μετασχηματισμός** εάν

$$L(\lambda \mathbf{u}+\mu \mathbf{v})=\lambda L(\mathbf{u})+\mu L(\mathbf{v}), \tag{1}$$

ή, ισοδύναμα,

$$L(\mathbf{u}+\mathbf{v})=L(\mathbf{u})+L(\mathbf{v}), \qquad \text{και} \qquad L(\lambda \mathbf{u})=\lambda L(\mathbf{u}),$$

για όλα τα διανύσματα $\mathbf{u},\mathbf{v} \in X$ και για όλες τις σταθερές $\lambda, \mu$.

**Παράδειγμα (1)**

Εάν $A$ είναι ένα $n \times m$ πραγματικό μητρώο, τότε η απεικόνιση $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται ως

$$T(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$$

είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός.
Πράγματι αν $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ως άμεση συνέπεια της άλγεβρας μητρώων έχουμε

$$T(\lambda \mathbf{x}+\mu \mathbf{y})=A(\lambda \mathbf{x}+\mu \mathbf{y})=\lambda A\mathbf{x}+\mu A\mathbf{y}=\lambda T(\mathbf{x})+\mu T(\mathbf{y}).$$

## Παράδειγμα (2)

Δείξτε ότι η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, όπου

$$T(\mathbf{u}) = T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2u_1 - u_2 + u_3 \\ u_2 + 3u_3 \end{pmatrix},$$

είναι γραμμικός μετασχηματισμός. Πράγματι αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, και $r, s \in \mathbb{R}$ τότε

$$\begin{aligned} T(r\mathbf{x} + s\mathbf{y}) &= T\left(\begin{pmatrix} rx_1 + sy_1 \\ rx_2 + sy_2 \\ rx_3 + sy_3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2(rx_1 + sy_1) - (rx_2 + sy_2) + (rx_3 + sy_3) \\ (rx_2 + sy_2) + 3(rx_3 + sy_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r(2x_1 - x_2 + x_3) \\ r(x_2 + 3x_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s(2y_1 - y_2 + y_3) \\ s(y_2 + 3y_3) \end{pmatrix} \\ &= rT(\mathbf{x}) + sT(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

## Παράδειγμα (3)

Αν $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ δύο, θεωρούμε την απεικόνιση $S : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ με $S(p) = a_0$. Ο μετασχηματισμός $S$ είναι γραμμικός. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε $S(p) = p(0)$. Τότε αν $p, q \in \mathbb{P}_2$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} S(p+q) &= (p+q)(0) = p(0) + q(0) = S(p) + S(q) \\ S(\lambda p) &= (\lambda p)(0) = \lambda p(0) = \lambda S(p) \end{aligned}$$

που είναι ό,τι θέλουμε να αποδείξουμε.

## Άσκηση

Αν $f$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$ ορίζουμε $I(f) = F$ με

$$I(f)(x) = F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad a \le x \le b.$$

Αποδείξτε ότι ο $I : \mathscr{C}[a, b] \to \mathscr{C}[a, b]$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός.

## Παράδειγμα (4)

Αν $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ δύο, ορίζουμε

$$L(p)(x) = xp(x),$$

δηλαδή η εικόνα $L(p)$ του $p$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ τρία το

$$L(p)(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3$$

Έτσι ο $L$ είναι ένας μετασχηματισμός του $\mathbb{P}_2$ στον $\mathbb{P}_3$. Ο μετασχηματισμός $L$ είναι γραμμικός. Πράγματι αν $p, q \in \mathbb{P}_2$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$L(p+q)(x) = x(p+q)(x) = x[p(x)+q(x)] = xp(x)+xq(x) = L(p)(x)+L(q)(x)$$
$$L(\lambda p)(x) = x(\lambda p)(x) = \lambda xp(x) = \lambda L(p)(x)$$

που είναι το ζητούμενο.

## Άσκηση

Αν $f$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a,b]$ ορίζουμε

$$J(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Αποδείξτε ότι ο $J : \mathscr{C}[a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός.

## Άσκηση

Αν $X(\mathbb{F})$ είναι ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και $\mathbf{a}$ ένα σταθερό διάνυσμα του $X$ ορίζουμε την συνάρτηση

$$F(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle, \qquad \mathbf{x} \in X,$$

Αποδείξτε ότι ο $F : X \to \mathbb{F}$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Ως συνήθως $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, ή $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Αν $L : X \to Y$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός, τότε $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Πράγματι για $\mathbf{x} \in X$

$$L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x} + \mathbf{0}) = L(\mathbf{x}) + L(\mathbf{0}) \Rightarrow L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Έτσι ο μετασχηματισμός $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με

$$M\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y \\ y + 1 \end{pmatrix}$$

δεν είναι γραμμικός αφού $M(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$.

**Ορισμός**

Αν $X$ και $Y$ είναι διανυσματικοί χώροι και $L : X \to Y$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός ορίζουμε

1. Την **εικόνα** (image) του $L$, $\operatorname{image} L$, να είναι η εικόνα του $X$ μέσω του $L$

$$\operatorname{image} L = \{L(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\} = L(X).$$

2. Τον **πυρήνα** (kernel) του $L$, $\operatorname{kernel} L$, να είναι το σύνολο των διανυσμάτων του $X$ των οποίων η εικόνα μέσω του $L$ είναι το $\mathbf{0} \in Y$, δηλαδή

$$\operatorname{kernel} L = \{x : L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = L^{-1}(\{\mathbf{0}\}).$$

Για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό $L$ ισχύει $\mathbf{0} \in \operatorname{kernel} L$, αφού $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

### Θεώρημα

*Εάν $L : X \to Y$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός, τότε η εικόνα $\operatorname{image} L$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $Y$, ενώ ο πυρήνας $\operatorname{kernel} L$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $X$.*

Αν ο μετασχηματισμός $L$ δίνεται μέσω ενός μητρώου $A$, δηλαδή $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, τότε

$$\operatorname{image} L = \operatorname{range} A = C(A) \qquad \text{και} \qquad \operatorname{kernel} L = \operatorname{null} A.$$

### Ορισμός

Έστω $L : X \to Y$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Εάν η εικόνα του $L$ έχει πεπερασμένη διάσταση ορίζουμε την **τάξη** του $L$, $\operatorname{rank} L$ να είναι η διάσταση της εικόνας του $L$, δηλαδή $\operatorname{rank} L = \dim(\operatorname{image} L)$.

### Θεώρημα

*Εάν $L : X \to Y$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός και $\dim X = n$, τότε*

$$\operatorname{rank} L + \dim(\operatorname{kernel} L) = n. \tag{2}$$

## Παρατήρηση (1)

Αν ο γραμμικός μετασχηματισμός $L : X \to Y$ είναι ένα-προς-ένα, τότε υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός $L^{-1} : \operatorname{image} L \to X$. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι επίσης γραμμικός. Πράγματι αν $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \operatorname{image} L$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχουν μοναδικά διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, με $L(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$ και $L(\mathbf{y}) = \mathbf{v}$ και

$$\begin{aligned} L^{-1}(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) &= L^{-1}(\lambda L(\mathbf{x}) + \mu L(\mathbf{y})) \\ &= L^{-1}(L(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y})) \\ &= \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \\ &= \lambda L^{-1}(\mathbf{u}) + \mu L^{-1}(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.

## Θεώρημα

*Ο γραμμικός μετασχηματισμός $L : X \to Y$ έχει αντίστροφο αν και μόνο αν* $\operatorname{kernel} L = \{\mathbf{0}\}$.

## Ορισμός

Εάν $L : X \to Y$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός ο οποίος είναι ένα-προς-ένα και επί θα λέμε ότι ο $L$ είναι ένας **ισομορφισμός** μεταξύ των $X$ και $Y$.

Αν $X(\mathbb{F})$ είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης $n$ και $\mathscr{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{n}_n\}$ είναι μια βάση για τον $X$, τότε ο μετασχηματισμός $L : X \to \mathbb{F}^n$, με

$$L(\mathbf{x}) = L(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (\mathbf{x})_{\mathscr{B}},$$

το **διάνυσμα συντεταγμένων** του $\mathbf{x}$ ως προς τη βάση $\mathscr{B}$, είναι ισομορφισμός.

## Θεώρημα

*Εάν $L_1 : X \to Y$ και $L_2 : Y \to Z$ είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί, τότε*

1. *Η σύνθεση $L_2 \circ L_1 : X \to Z$, η οποία ως συνήθως ορίζεται με τη σχέση $(L_2 \circ L_1)(\mathbf{x}) = L_2(L_1(\mathbf{x}))$, είναι γραμμικός μετασχηματισμός.*
2. *Αν οι $L_1, L_2$ είναι ένα-προς-ένα, τότε $L_2 \circ L_1$ είναι ένα-προς-ένα.*
3. *Αν οι $L_1, L_2$ είναι ένα-προς-ένα, τότε $(L_2 \circ L_1)^{-1} = L_1^{-1} \circ L_2^{-1}$.*

## 2. Το μητρώο γραμμικού μετασχηματισμού

### Παρατήρηση (2)

Για τον μετασχηματισμό $T$ στο Παράδειγμα (2) παρατηρούμε ότι

$$T(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 2u_1 - u_2 + u_3 \\ u_2 + 3u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = A\mathbf{u}$$

όπου $A$ είναι το $2 \times 3$ μητρώο στην τελευταία σχέση, και η γραμμικότητα του $T$ απορρέει από τις ιδιότητες της άλγεβρας των μητρώων.

Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται.

### Πρόταση (1)

*Εάν $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός, τότε υπάρχει $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ώστε*

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

*για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.*

## Άσκηση

Εάν $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός, τότε υπάρχει $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ ώστε $T(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.

## Λύση

Αν $\mathscr{B}_m = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ είναι η κανονική βάση στον $\mathbb{R}^m$ και αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_m\mathbf{e}_m \Rightarrow \\ T(\mathbf{x}) &= x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_m T(\mathbf{e}_m) \\ &= x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_m a_m, \end{aligned}$$

όπου $a_i = T(\mathbf{e}_i) \in \mathbb{R}$. Θέτοντας

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

έχουμε ότι

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle$$

για όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. ■

### Απόδειξη της Πρότασης.

Αν $\mathscr{B}_m = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ είναι η κανονική βάση στον $\mathbb{R}^m$ και αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, τότε

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_m\mathbf{e}_m$$

επομένως

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_m T(\mathbf{e}_m) \\ &= \begin{pmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \ldots & T(\mathbf{e}_m) \end{pmatrix} \mathbf{x}, \end{aligned}$$

κατά συνέπεια το

$$A = \begin{pmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \ldots & T(\mathbf{e}_m) \end{pmatrix}$$

είναι το ζητούμενο μητρώο. □

Διατυπώνεται τώρα το ερώτημα κατά πόσον ένας γραμμικός μετασχηματισμός μεταξύ γενικών διανυσματικών χώρων, $L : X \to Y$, μπορεί να παρασταθεί μέσω κάποιου σχετικού μητρώου $A$. Είναι σχεδόν προφανές ότι μια τέτοια αναπαράσταση δεν μπορεί να είναι της μορφής $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ (γιατί;). Ας δούμε πως θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα με ένα παράδειγμα.

## Παράδειγμα (5)

Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους των πολυωνύμων $\mathbb{P}_3$ και $\mathbb{P}_2$ και τον μετασχηματισμό παράγωγο $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ όπου για $p \in \mathbb{P}_3$ είναι

$$T(p) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = p',$$

ισοδύναμα

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \tag{3}$$

Συνέπεια των ιδιοτήτων της παραγώγου είναι ότι ο μετασχηματισμός $T$ είναι γραμμικός. Σχετικά με το μητρώο αναπαράστασης του $T$ σκεφτόμαστε ότι οι χώροι $\mathbb{P}_3$ και $\mathbb{P}_2$ με κάποια έννοια ταυτίζονται με τους $\mathbb{R}^4$ και $\mathbb{R}^3$ αντίστοιχα. Οι μετασχηματισμοί $\Phi_3 : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}^4$ και $\Phi_2 : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ με

$$\Phi_3(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \Phi_2(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

ισοδύναμα $\Phi_3(p) = (p)_{\mathscr{B}_3}$ και $\Phi_2(p) = (p)_{\mathscr{B}_2}$ όπου $\mathscr{B}_k = \{1, x, \dots, x^k\}$ είναι η συνήθης βάση για τον $\mathbb{P}_k$, είναι ισομορφισμοί.

Τώρα όμως, σύμφωνα με την Πρόταση (1), το μητρώο που υλοποιεί τον μετασχηματισμό

$$(p)_{\mathscr{B}_3} = \Phi_3(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \end{pmatrix} = \Phi_2(T(p)) = (T(p))_{\mathscr{B}_2},$$

έμμεσα τον (3), είναι το

$$A = \left( (T(1)_{\mathscr{B}_2} \; T(x)_{\mathscr{B}_2} \; T(x^2)_{\mathscr{B}_2} \; T(x^3)_{\mathscr{B}_2} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ώστε

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \end{pmatrix}.$$

Οι διανυσματικοί χώροι που εμπλέκονται και οι μεταξύ τους μετασχηματισμοί αποτυπώνονται στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}_3 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Phi_3"] & \mathbb{P}_2 \arrow[d, "\Phi_2"] \\ \mathbb{R}^4 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd} \quad \text{ή} \quad \begin{tikzcd} p \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Phi_3"] & T(p) \arrow[d, "\Phi_2"] \\ (p)_{\mathscr{B}_3} \arrow[r, "A"] & (T(p))_{\mathscr{B}_2} \end{tikzcd}$$

Λόγω ισομορφισμών έχουμε ότι

$$T(p) = \Phi_2^{-1}(A\Phi_3(p))$$

και υπό αυτή την έννοια λέμε ότι το μητρώο $A$ παριστάνει τον μετασχηματισμό $T$.

## Ορισμός

Υποθέτουμε ότι $T : X \to Y$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός, $\dim X = m$ και $\dim Y = n$, $\mathscr{B}_X = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ και $\mathscr{B}_Y = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ είναι βάσεις για τους $X$, και $Y$. Αν $\Phi_X : X \to \mathbb{R}^m$ και $\Phi_Y : X \to \mathbb{R}^n$ είναι οι ισομορφισμοί $\Phi_X(\mathbf{x}) = (\mathbf{x})_{\mathscr{B}_X}$ και $\Phi_Y(\mathbf{y}) = (\mathbf{y})_{\mathscr{B}_Y}$ και αν

$$T(\mathbf{u}_j) = a_{1j}\mathbf{v}_1 + a_{2j}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{nj}\mathbf{v}_n, \qquad (T(\mathbf{u}_j))_{\mathscr{B}_Y} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix},$$

το $n \times m$ μητρώο

$$A_{T,\mathscr{B}_X,\mathscr{B}_Y} = \big( (T(\mathbf{u}_1))_{\mathscr{B}_Y} \;\; (T(\mathbf{u}_2))_{\mathscr{B}_Y} \;\; \cdots \;\; (T(\mathbf{u}_n))_{\mathscr{B}_Y} \big), \tag{4}$$

ικανοποιεί τη σχέση

$$A_{T,\mathscr{B}_X,\mathscr{B}_Y}(\mathbf{x})_{\mathscr{B}_X} = (T(\mathbf{x}))_{\mathscr{B}_Y} \tag{5}$$

και λέγεται **μητρώο αναπαράστασης** του $T$ ως προς τις βάσεις $\mathscr{B}_X$ και $\mathscr{B}_Y$.

## Παρατήρηση (3)

Από τον ορισμό του μητρώου αναπαράστασης (4) βλέπουμε ότι το μητρώο εξαρτάται από τις βάσεις. Πράγματι για τον μετασχηματισμό στο Παράδειγμα (2)

$$T(\mathbf{x}) = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

το μητρώο αναπαράστασης ως προς τις συνήθεις βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$ είναι

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Αν πάρουμε ως βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$ τις

$$\mathscr{B} = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathscr{B}' = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

υπολογίζουμε

$$T(\mathbf{u}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \qquad T(\mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \qquad T(\mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 6\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

κατά συνέπεια

$$(T(\mathbf{u}_1))_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (T(\mathbf{u}_2))_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (T(\mathbf{u}_3))_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

και το μητρώο αναπαράστασης του $T$ ως προς τις βάσεις $\mathscr{B}$ και $\mathscr{B}'$ είναι το

$$A_{T,\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

το οποίο είναι διαφορετικό από το $A$. Παρατηρήστε ότι ενώ $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ στην αναπαράσταση ως προς τις βάσεις $\mathscr{B}$ και $\mathscr{B}'$ είναι

$$T(\mathbf{x}) = \Phi_{\mathscr{B}'}^{-1}(A_{T,\mathscr{B},\mathscr{B}'}\Phi_{\mathscr{B}}(\mathbf{x})) \tag{6}$$

όπου $\Phi_{\mathscr{B}}(\mathbf{x})$ είναι το διάνυσμα συντεταγμένων του $\mathbf{x}$ ως προς τη βάση $\mathscr{B}$ και $\Phi_{\mathscr{B}'}(\mathbf{y})$ είναι το διάνυσμα συντεταγμένων του $\mathbf{y}$ ως προς τη βάση $\mathscr{B}'$.

**΄Ασκηση**

Βρείτε τους ισομορφισμούς $\Phi_{\mathscr{B}}$ και $\Phi_{\mathscr{B}'}$ και επαληθεύστε την (6).

## Παράδειγμα (6)

Αν $X$ και $Y$ είναι διανυσματικοί χώροι με βάσεις $\mathscr{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ και $\mathscr{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ αντίστοιχα, και $T : X \to Y$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός με $T\big(\mathbf{u}_i\big) = \mathbf{v}_i$, να βρεθεί το μητρώο του μετασχηματισμού.

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού έχουμε

$$T\big(\mathbf{u}_1\big) = \mathbf{v}_1, \qquad T\big(\mathbf{u}_2\big) = \mathbf{v}_2, \qquad T\big(\mathbf{u}_3\big) = \mathbf{v}_3$$

κατά συνέπεια

$$(T(\mathbf{u}_1))_{\mathscr{V}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (T(\mathbf{u}_2))_{\mathscr{V}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (T(\mathbf{u}_3))_{\mathscr{V}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

και το μητρώο αναπαράστασης του $T$ ως προς τις βάσεις $\mathscr{U}$ και $\mathscr{V}$ είναι το

$$A_{T,\mathscr{U},\mathscr{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 3. Το μητρώο της σύνθεσης γραμμικών μετασχηματισμών

### Θεώρημα

*Εάν $X$, $Y$ και $Z$ είναι διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης, $L_1 : X \to Y$ και $L_2 : Y \to Z$ είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί με αντίστοιχα μητρώα αναπαράστασης $A_{L_1}$ και $A_{L_2}$, τότε για το μητρώο αναπαράστασης της σύνθεσης $L_2 \circ L_1 : X \to Z$ ισχύει*

$$A_{L_2 \circ L_1} = A_{L_2} A_{L_1}.$$

### Απόδειξη

Αν $\mathscr{B}_X = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$, $\mathscr{B}_Y = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ και $\mathscr{B}_Z = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ είναι βάσεις των $X$, $Y$ και $Z$, αντίστοιχα, τότε

$$A_{L_2 \circ L_1} = \Big( (L_2 \circ L_1(\mathbf{u}_1))_{\mathscr{B}_Z} \ (L_2 \circ L_1(\mathbf{u}_2))_{\mathscr{B}_Z} \ \cdots \ (L_2 \circ L_1(\mathbf{u}_k))_{\mathscr{B}_Z} \Big).$$

Αλλά για κάθε $j = 1, 2, \ldots, k$ από την (5) έχουμε

$$(L_2 \circ L_1(\mathbf{u}_j))_{\mathscr{B}_Z} = (L_2(L_1(\mathbf{u}_j)))_{\mathscr{B}_Z} = A_{L_2} (L_1(\mathbf{u}_j))_{\mathscr{B}_Y} = A_{L_2} A_{L_1} (\mathbf{u}_j)_{\mathscr{B}_X}$$

από το οποίο έπεται το ζητούμενο. ■

## 4. Παραδείγματα μετασχηματισμών στο επίπεδο

### Παράδειγμα (Κλιμάκωση στην κατεύθυνση του $\mathbf{e}_1$)

Για $k \geq 0$ θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $T_{k\mathbf{e}_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με

$$T_{k\mathbf{e}_1}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} ku_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

έτσι έχουμε συρρίκνωση αν $0 \leq k < 1$, ή επιμήκυνση αν $k > 1$ στη κατεύθυνση του $\mathbf{e}_1$. Υπολογίζουμε

$$T_{k\mathbf{e}_1}(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} = k\mathbf{e}_1, \qquad T_{k\mathbf{e}_1}(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_2 \tag{7}$$

και παρατηρούμε ότι

$$T_{k\mathbf{e}_1}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A\mathbf{u}$$

γεγονός που επιβεβαιώνει (Πρόταση 1) ότι οι στήλες του μητρώου που υλοποιεί τον μετασχηματισμό $T_{k\mathbf{e}_1}$ είναι τα διανύσματα $T_{k\mathbf{e}_1}(\mathbf{e}_1)$ και $T_{k\mathbf{e}_1}(\mathbf{e}_2)$.

## Παράδειγμα (Κλιμάκωση στην κατεύθυνση του $\mathbf{e}_2$)

Αυτή υλοποιείται μέσω του μετασχηματισμού $T_{k\mathbf{e}_2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ όπου

$$T_{k\mathbf{e}_2}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ ku_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad k \geq 0.$$

## Παράδειγμα

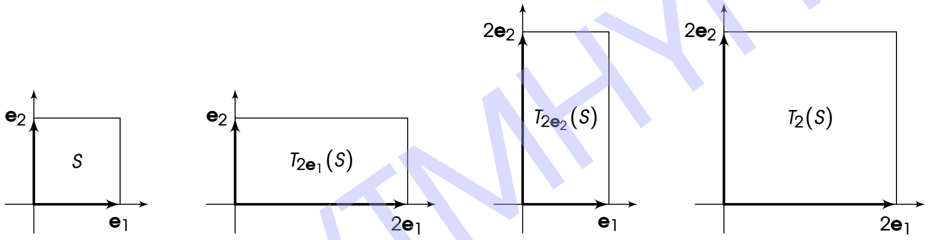
Ο μετασχηματισμός **συστολής/διαστολής** στο $\mathbb{R}^2$ ορίζεται με τη σχέση

$$T_k(\mathbf{u}) = k\mathbf{u}, \qquad k \geq 0.$$

Επειδή $\|T_k(\mathbf{u})\| = k\|\mathbf{u}\|$, για $0 \leq k < 1$ το αρχικό διάνυσμα συστέλλεται ενώ για $k > 1$ το διάνυσμα διαστέλλεται. Το μητρώο αναπαράστασης του $T_k$ είναι το

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Το Σχήμα παρακάτω δείχνει την δράση των μετασχηματισμών κλιμάκωσης $T_{k\mathbf{e}_1}$, $T_{k\mathbf{e}_2}$ και διαστολής $T_k$ αντίστοιχα, για $k = 2$, στο μοναδιαίο τετράγωνο $S$ με πλευρές τα διανύσματα $\mathbf{e}_1$ και $\mathbf{e}_2$.




**Σχήμα:** Το $S$ και οι εικόνες $T_{2\mathbf{e}_1}(S)$, $T_{2\mathbf{e}_2}(S)$ και $T_2(S)$ ($k = 2$).

## Παράδειγμα (Κλιμάκωση)

Ο μετασσχηματισμός $T_{k_1,k_2} = T_{k_1\mathbf{e}_1} \circ T_{k_2\mathbf{e}_2}$ ως σύνθεση γραμμικών μετασχηματισμών είναι γραμμικός μετασχηματισμός. Έτσι

$$
\begin{aligned}
T_{k_1\mathbf{e}_1} \circ T_{k_2\mathbf{e}_2}(\mathbf{u}) &= T_{k_1\mathbf{e}_1}(T_{k_2\mathbf{e}_2}(\mathbf{u})) \\
&= T_{k_1\mathbf{e}_1}\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ k_2 u_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} k_1 u_1 \\ k_2 u_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Το μητρώο αναπαράστασης του $T_{k_1,k_2}$ είναι το

$$
A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.
$$

Αν $k_1 = k_2 = k$ ο μετασχηματισμός κλιμάκωσης είναι ο μετασχηματισμός συστολής/διαστολής.

### Παράδειγμα (Διατμήσεις)

Ένας γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με

$$T(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 + ku_2 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad k \neq 0$$

λέγεται **διάτμηση** (shear) στην κατεύθυνση του $\mathbf{e}_1$ κατά παράγοντα $k$.
Παρατηρούμε ότι

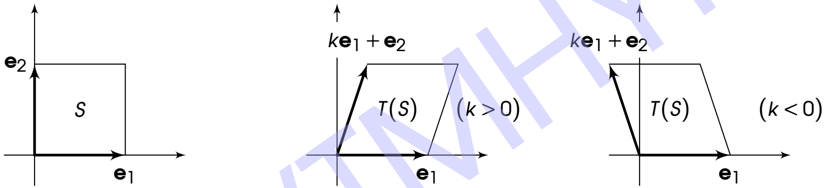
$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1, \qquad T(\mathbf{e}_2) = k\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2.$$

Το μητρώο αναπαράστασης για τον μετασχηματισμό διάτμησης είναι το

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται ο μετασχηματισμός διάτμησης στην κατεύθυνση του $\mathbf{e}_2$.

Στο Σχήμα που ακολουθεί αποτυπώνονται οι εικόνες του μοναδιαίου τετραγώνου με πλευρές τα διανύσματα $\mathbf{e}_1$ και $\mathbf{e}_2$ μέσω του μετασχηματισμού διάτμησης στην κατεύθυνση του $\mathbf{e}_1$ για $k > 0$ και $k < 0$.




**Σχήμα:** Η δράση επί του $S$ της διάτμησης στην κατεύθυνση του $\mathbf{e}_1$ για $k = \pm 1/2$.

# ΤΕΛΟΣ