ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη 12

Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα, Διαγωνοποίηση

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

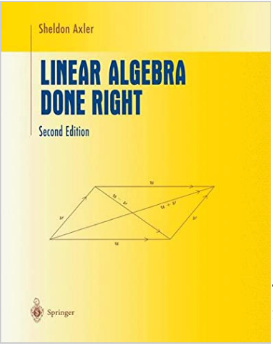
16 Δεκεμβρίου 2022

Υπενθύμιση και πρόγραμμα διάλεξης

1. Ορισμένες ενδιαφέρουσες βαθμωτές συναρτήσεις μητρώων,
2. όπως το ΙΧΝΟΣ και η ΟΡΙΖΟΥΣΑ
3. ορισμοί και ιδιότητες,
4. τρόποι υπολογισμού,
5. επίλυση συστήματος και αντιστροφή μητρώου μέσω οριζουσών.

<u>Σήμερα θα συζητήσουμε:</u>

1. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα
2. Τι και γιατί
3. Ορισμοί
4. Χαρακτηριστικό πολυώνυμο
5. Θεώρημα Cayley-Hamilton
6. Παραδείγματα



Down with Determinants!

Sheldon Axler

This paper was published in the *American Mathematical Monthly* 102 (1995), 139-154.

In 1996 this paper received the Lester R. Ford Award for expository writing from the Mathematical Association of America.

Abstract: This paper shows how linear algebra can be done better without determinants. The standard proof that a square matrix

complexification discussed earlier.

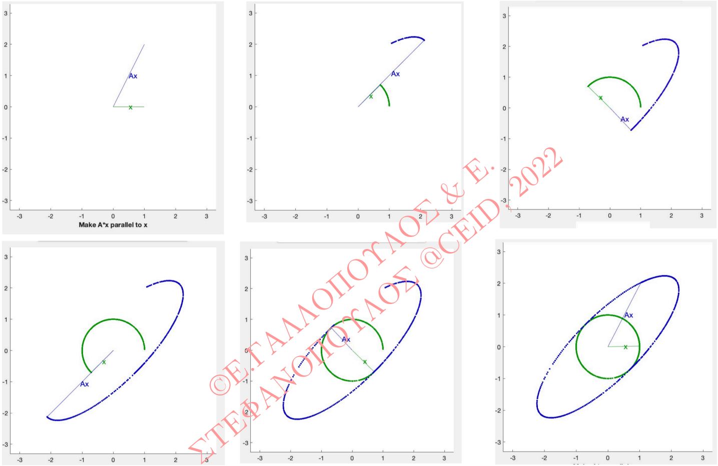
Now we are ready for the formal definition. The *determinant* of T, denoted $\det T$, is defined to be the product of the eigenvalues of T, counting multiplicity. This definition would not be possible with the traditional approach to eigenvalues, because that method uses determinants to prove that eigenvalues exist. With the techniques used here, we already know (by Theorem 3.11(a)) that T has $\dim V$ eigenvalues, counting multiplicity. Thus our simple definition makes sense.

Χρησιμοποιούμε το περιβάλλον MATLAB και τη συνάρτηση-demo eigshow του Cleve Moler .

```
cd /Users/EG_home/Dropbox/MATLAB/CleveLaboratory/Cleve_Lab
% motivational experiments with eigshowA
 = (1 2; 2 1); eigshow(A);A
 = (3 -2;1 0);  eigshow(A);
```

- Για δοθέν μητρώο A (π.χ. ένα από τα παραπάνω), η συνάρτηση eigshow[1] δίνει τη δυνατότητα να παρακολουθούμε για κάθε σημείο (πράσινο) στο μοναδιαίο κύκλο, δηλ για κάθε σημείο που αντιστοιχεί σε μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^2$ $\|x\|_2 = 1$, το σημείο (μπλε) που αντιστοιχεί στο γινόμενο Ax. Οι τιμές αποτυπώνονται στο σχήμα (βλ. επόμενες διαφάνειες).
- Βάσει του eigshow μπορούμε να διερευνήσουμε για οποιοδήποτε $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, πότε ισχύει ότι $Ax = \lambda x$ για πραγματικό βαθμωτό λ και μοναδιαίο x.

[1] Του Cleve Moler για το περιβάλλον MATLAB

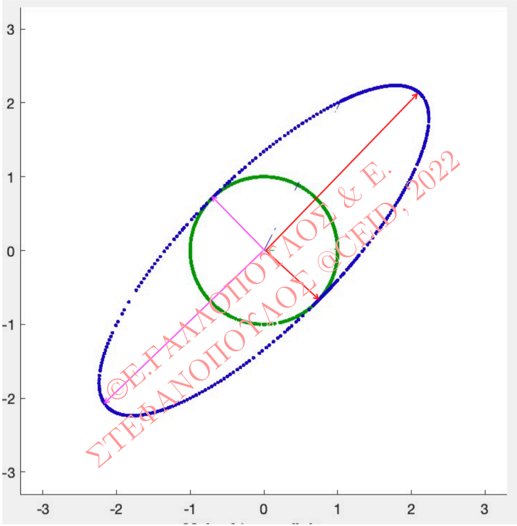


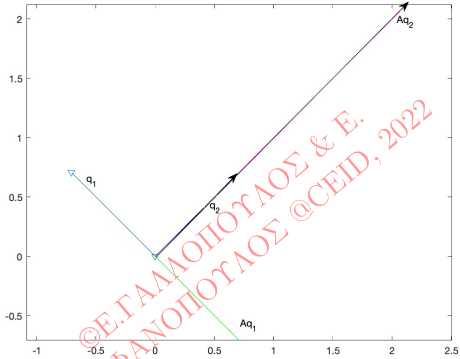
Οι ιδιότητες του $\{Ax | x \in \mathbb{R}^2, \|x\| = 1\}$ (στην περίπτωση είναι μία έλλειψη με άξονες μήκους 3 και 1) εξηγούνται βάσει αυτών που θα μάθουμε στο παρόν κεφάλαιο.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, ιδιοτιμές $\Lambda(A) = \{-1, 3\}$, ιδιοδιανύσματα $q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

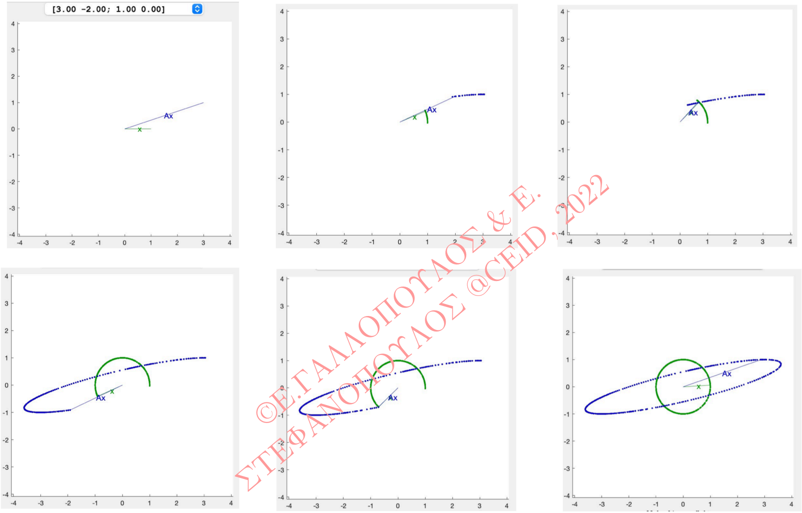
Λεπτομερέστερη αποτύπωση των διανυσμάτων για τα οποία $Aq = \lambda q$. Προσέξτε ότι:

1. Το μητρώο είναι πραγματικό.
2. $A = A^\top$, δηλ. το μητρώο είναι συμμετρικό.
3. Υπάρχουν δύο τιμές $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ και δύο αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα q_1, q_2 για τα οποία ισχύει ότι $Aq_j = \lambda_j q_j$. Προφανώς, ισχύουν επίσης $A(-q_j) = \lambda_j(-q_j)$ αλλά και $A(\gamma q_j) = \lambda_j(\gamma q_j)$ για οποιοδήποτε βαθμωτό γ.
4. Επομένως $Aq_1 = -q_1$, $Aq_2 = 3q_2$ και $A(-q_1) = -(-q_1) = q1, A(-q2) = -3q_2$. Οι τιμές $\{-1, 3\}$ προσδιορίζουν την κλιμάκωση ή/και αλλαγή φοράς στην οποία υπόκεινται τα διανύσματα $\pm q_1, \pm q_2$ όταν πολλαπλασιαστούν με το A.
5. Τα διανύσματα $\pm Aq_1$, $\pm Aq_2$ συμπίπτουν με τον ελάχιστο και μέγιστο ημιάξονα της έλλειψης.
6. $q_1^\top q_2 = q_2^\top q_1 = 0$, δηλ. τα q_1, q_2 είναι μεταξύ τους ορθογώνια,

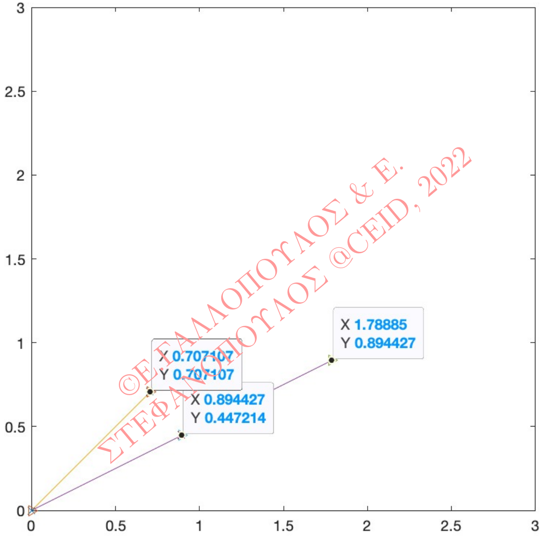

3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3



2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
q1
q2
Aq1
Aq2



Οι ιδιότητες του $\{Ax | x \in \mathbb{R}^2, \|x\| = 1\}$ (στην περίπτωση είναι μία έλλειψη) εξηγούνται βάσει αυτών που θα μάθουμε στο παρόν κεφάλαιο. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ιδιοτιμές $\Lambda(A) = \{2, 1\}$, ιδιοδιανύσματα $q_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \sqrt{4} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$


X 0.707107
Y 0.707107
X 0.894427
Y 0.447214
X 1.78885
Y 0.894427

Λεπτομερέστερη αποτύπωση των διανυσμάτων για τα οποία $Aq = \lambda q$. Προσέξτε ότι:

1. Το μητρώο είναι πραγματικό.
2. $A \neq A^\top$, δηλ. το μητρώο δεν είναι συμμετρικό.
3. Υπάρχουν δύο τιμές $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ και δύο αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα q_1, q_2 για τα οποία ισχύει ότι $Aq_j = \lambda_j q_j$. Προφανώς, ισχύουν επίσης $A(-q_j) = \lambda_j(-q_j)$ αλλά και $A(\gamma q_j) = \lambda_j(\gamma q_j)$ για οποιοδήποτε βαθμωτό γ.
4. Επομένως $Aq_1 = 2q_1$, $Aq_2 = q_2$ και $A(-q_1) = 2(-q_1)$, $A(-q2) = -q_2$. Οι τιμές $\{2, 1\}$ προσδιορίζουν την κλιμάκωση ή/και αλλαγή φοράς στην οποία υπόκεινται τα διανύσματα $\pm q_1$, $\pm q_2$ όταν πολλαπλασιαστούν με το A.
5. Τα διανύσματα $\pm Aq_1$, $\pm Aq_2$ δεν συμπίπτουν με τον ελάχιστο και μέγιστο ημιάξονα της έλλειψης.
6. $q_1^\top q_2 = q_2^\top q_1 \neq 0$, δηλ. τα q_1, q_2 δεν είναι μεταξύ τους ορθογώνια,

Ορισμός

Έστω ότι $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε κάθε αριθμός $\lambda \in \mathbb{C}$ για τον οποίο το γραμμικό σύστημα $(A - \lambda I)x = 0$ έχει μη μηδενική λύση, $x \in \mathbb{C}^n$, δηλ.

$$\exists x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \text{ τ.ω. } (A - \lambda I)x = 0,$$

ονομάζεται **ιδιοτιμή** του A και το αντίστοιχο x **ιδιοδιάνυσμα του** A (για την ιδιοτιμή λ). Αντίστοιχα, αν για κάποιο διάνυσμα $x \neq 0$, $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ τ.ω. $Ax = \lambda x$, το x ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα και το λ ιδιοτιμή του A για το x.

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός μητρώου αναδεικνύουν πολλά σημαντικά ζητήματα για ένα μητρώο και για τους διανυσματικούς (υπο)χώρους που συνδέονται με αυτό και χρησιμοποιούνται πολύ στις εφαρμογές.

Ερωτήματα:

- Υπάρχουν ιδιοτιμές? Πόσες υπάρχουν?
- Υπάρχουν ιδιοδιανύσματα? Πόσα ιδιοδιανύσματα (ή καλύτερα, ποιές είναι οι διαστάσεις των αντίστοιχων μηδενοχώρων?)
- Πού και πώς εντοπίζονται (ιδιοδιανύσματα, ιδιοτιμές)? Πώς υπολογίζονται?
- Τι χαρακτηριστικά έχουν και γιατί μας ενδιαφέρουν?

Το μηδέν ΜΠΟΡΕΙ να είναι ιδιοτιμή, το μηδενικό διάνυσμα ΔΕΝ θεωρείται ιδιοδιάνυσμα.

SIAM REVIEW
Vol. 48, No. 3, pp. 569–581

The $25,000,000,000 Eigenvector: The Linear Algebra behind Google*

Kurt Bryan†
Tanya Leise‡

Abstract. Google's success derives in large part from its PageRank algorithm, which ranks the importance of web pages according to an eigenvector of a weighted link matrix. Analysis of the PageRank formula provides a wonderful applied topic for a linear algebra course. Instructors may assign this article as a project to more advanced students or spend one or two lectures presenting the material with assigned homework from the exercises. This material also complements the discussion of Markov chains in matrix algebra. Maple and *Mathematica* files supporting this material can be found at www.rose-hulman.edu/~bryan.

Key words. linear algebra, PageRank, eigenvector, stochastic matrix

Google

eigenvalues

Ιστός Βίντεο Εικόνες Βιβλία Ειδήσεις Περισσότερα Εργ

Περίπου 5.820.000 αποτελέσματα (0,12 δευτερόλεπτα)

Eigenvalues and eigenvectors - Wikipedia, the free ...
en.wikipedia.org/.../**Eigenvalues**_and_eige... Μετάφραση αυτής της σελίδας
Eigenvalues and eigenvectors have many applications in both pure and applied mathematics. They are used in matrix factorization, in quantum mechanics, and ...
Eigenvalue algorithm - Eigenface - Square matrix - Quadratic eigenvalue problem

Google

eigenvectors

Ιστός Βίντεο Εικόνες Ειδήσεις Χάρτες Περισσότερα Εργ

Περίπου 2.480.000 αποτελέσματα (0,15 δευτερόλεπτα)

Τι λέει και τι γράφει ο κόσμος για τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα?

Google

eigenvalues

All | Images | Videos | News | Books | More | Tools

About 64,200,000 results (1.71 seconds)

Eigenvalues are **a special set of scalars associated with a linear system of equations** (i.e., a matrix equation) that are sometimes also known as characteristic roots, characteristic values (Hoffman and Kunze 1971), proper values, or latent roots (Marcus and Minc 1988, p. 144).

https://mathworld.wolfram.com › Eigenvalue

Eigenvalue -- from Wolfram MathWorld

Mathematics for Quantum Mechanics
An Introductory Survey of Operators, Eigenvalues, and Linear Vector Spaces
John David Jackson
Eigenvalues of Matrices
Françoise Chatelin
Free Vibrations of Beams and Frames
Eigenvalues and Eigenfunctions
Igor A. Karnovsky
Olga I. Lebed
Eigenvalues, Inequalities, and Ergodic Theory
Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems
Yousef Saad
Geometric Control Theory and Sub-Riemannian Geometry
Eigenvalues of Symmetric Five-Diagonal Matrices
L. W. Ehrlich
The Asymptotic Distribution of Eigenvalues of Partial Differential Operators
Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators
Antoine Henrot
Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems
Yousef Saad
On the Eigenvalues of the Manakov System
Eigenvalues, Embeddings and Generalised Trigonometric Functions
Surveys in Differential Geometry
Eigenvalues in Uniform Waveguides Using Transmission Line Equivalences
Random Matrices, Frobenius Eigenvalues, and Monodromy
London Mathematical Society Lecture Note Series
Surveys in Combinatorics
Eigenvalues of Inhomogeneous Structures
Unusual Closed-Form Solutions
Isaac Elishakoff
CRC Press
Memoirs of the American Mathematical Society
Kuznetsov's Trace Formula and the Heck Eigenvalues of Maass Forms
A. Knightly
C. Li
Calculus of Variations
Eigenvalues of Non-Linear Problems
The Symmetric Eigenvalue Problem
Beresford N. Parlett
Multiparameter Eigenvalue Problems
Sturm-Liouville Theory
F.V. Atkinson
Angelo B. Mingarelli
Eigenvalues of Matrices
Françoise Chatelin

Παράδειγμα

Από το $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ κατασκευάζουμε το παραμετροποιημένο

$$A(\lambda) = \lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι όλες εκείνες οι τιμές λ (ενδεχομένως μιγαδικές) για τις οποίες το $A(\lambda)$ δεν είναι αντιστρέψιμο. Στην περίπτωσή μας, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι τα $A(1)$, $A(2)$ δεν είναι αντιστρέψιμα. Επίσης

$$A(1)u_1 = 0, A(2)u_2 = 0$$

και λύνοντας τα αντίστοιχα ομογενή συστήματα προκύπτει ότι (ειδικές) λύσεις τους είναι οι $u_1 = (1, 1)^\top$ και $u_2 = (2, 1)^\top$. Άρα ισχύει ότι null$(A(1)) =$ span $\{u_1\}$ και null$(A(3)) =$ span $\{u_2\}$. Επομένως, ως ιδιοδιάνυσμα του για την ιδιοτιμή 1 μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε διάνυσμα του null$(A(1))$. Συνήθως, επιλέγουμε διανύσματα που έχουν κανονικοποιηθεί με κάποιον τρόπο, π.χ. τέτοια ώστε $\|u_1\|_2 = \|u_2\|_2 = 1$. Στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}[1, 1]^\top, u_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}[2, 1]^\top$$

Προσοχή: Δεν εξηγήσαμε γιατί επιλέξαμε τα $A(1)$, $A(3)$. Ούτε το ότι για το δεδομένο A, αυτά είναι τα μοναδικά δύο μη αντιστρέψιμα μητρώα $\lambda I - A$. Ο σχεδιασμός συστηματικών μεθόδων αναζήτησης και υπολογισμού τους είναι ένα από τα βασικά ζητούμενα του όχι μόνον αυτού του κεφαλαίου, αλλά και πολλών βιβλίων και της σημερινής έρευνας.

Από το $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$ κατασκευάζουμε το παραμετροποιημένο

$$A(\lambda) = \lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda + 3 & -2 \\ 12 & \lambda - 7 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι όλες εκείνες οι τιμές λ (ενδεχομένως μιγαδικές) για τις οποίες το $A(\lambda)$ δεν είναι αντιστρέψιμο. Στην περίπτωσή μας, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι τα $A(1), A(3)$ δεν είναι αντιστρέψιμα. Επίσης

$$A(1)u_1 = 0, A(3)u_2 = 0$$

και λύνοντας τα αντίστοιχα ομογενή συστήματα προκύπτει ότι (ειδικές) λύσεις τους είναι οι $u_1 = (1, 2)^\top$ και $u_2 = (1, 3)^\top$. Προφανώς ισχύει ότι $\text{null}(A(1)) = \text{span}\,\{u_1\}$ και $\text{null}(A(3)) = \text{span}\,\{u_2\}$. Επομένως, ως ιδιοδιάνυσμα του για την ιδιοτιμή 1 μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε διάνυσμα του $\text{null}(A(1))$. Συνήθως, επιλέγουμε διανύσματα που έχουν κανονικοποιηθεί με κάποιον τρόπο, π.χ. τέτοια ώστε $\|u_1\|_2 = \|u_2\|_2 = 1$.

Εξετάζουμε το $\det(\lambda I - A)$ όπου λ είναι μία μεταβλητή:

- Αν

$$\begin{aligned}
\lambda I - A &= \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_{11} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \lambda - \alpha_{22} \end{pmatrix} \\
\det(\lambda I - A) &= (-\alpha_{11} + \lambda)(-\alpha_{22} + \lambda) - \alpha_{21}\alpha_{12} \\
&= \lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\lambda + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}
\end{aligned}$$

- Το $\det(A - \lambda I)$ είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού ως προς λ.
- Προσέξτε τους συντελεστές των 2 μεγαλύτερων δυνάμεων λ^2, λ και τη σταθερά:

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= 1, \\
\gamma_1 &= -(\alpha_{11} + \alpha_{22}) \\
\gamma_0 &= \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}
\end{aligned}$$

Ορισμοί με ορίζουσες

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο και ιδιοτιμές

- *Χαρακτηριστικό πολυώνυμο* ενός μητρώου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ονομάζεται το πολυώνυμο βαθμού n με το οποίο ισούται η ορίζουσα

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det\left(\lambda I - A\right) \text{ ή ισοδύναμα} \\ \hat{p}(\lambda) &= \det\left(A - \lambda I\right) = (-1)^n p(\lambda). \end{aligned}$$

- Αν γράψουμε το πολυώνυμο σε δυναμομορφή, τότε

$$p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_1\lambda + \gamma_0$$

  Προσέξτε ότι ο βαθμός του πολυωνύμου είναι ακριβώς n (γιατί;) $\gamma_{n-1} = -\text{trace}\left(A\right)$, $\gamma_0 = (-1)^n \det\left(A\right)$

- Οι ρίζες του χ.π. ονομάζονται ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ (του μητρώου).
- Το πολυώνυμο έχει ακριβώς n ρίζες και άρα n ιδιοτιμές. Μερικές ή όλες μπορεί να είναι ίσες (πολλαπλές). Το σύνολο των ιδιοτιμών λέγεται το φάσμα (spectrum) του .
- Γράφουμε $p(x) = (x-\lambda_1)^{\mu_1}\cdots(x-\lambda_k)^{\mu_k}$ όπου $k \leq n$ είναι το πλήθος των διαφορετικών ιδιοτιμών, $1 \leq \mu_j \leq k$ είναι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμης λ_j και $\sum_{j=1}^{k} \mu_k = n$. Το μ_j λέγεται αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_j.

Είδαμε ότι στην περίπτωση $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\lambda + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}.$$

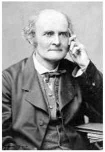
Αντικαθιστούμε το λ με το :

$$\begin{aligned} p(A) &= A^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})A + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12})I \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}\alpha_{21} & \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{12}\alpha_{22} \\ \alpha_{21}\alpha_{11} + \alpha_{22}\alpha_{21} & \alpha_{21}\alpha_{12} + \alpha_{22}^2 \end{pmatrix} - (\alpha_{11} + \alpha_{22}) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}) & 0 \\ 0 & (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Φαίνεται ότι $p(A) = 0$. Αυτό ισχύει για ***οποιοδήποτε*** *$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

Έστω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. Τότε

$$\boxed{p(A) = 0_{n\times n}}.$$



II. *A Memoir on the Theory of Matrices.* By ARTHUR CAYLEY, *Esq., F.R.S.*

Received December 10, 1857,—Read January 14, 1858.

THE term matrix might be used in a more general sense, but in the present memoir I consider only square and rectangular matrices, and the term matrix used without qualification is to be understood as meaning a square matrix; in this restricted sense, a set of quantities arranged in the form of a square, e. g.

$$\left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)$$

is said to be a matrix. The notion of such a matrix arises naturally from an abbreviated notation for a set of linear equations, viz. the equations

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz, \\ Y &= a'x + b'y + c'z, \\ Z &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

may be more simply represented by

$$(X, Y, Z) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)(x, y, z),$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Η det είναι συνάρτηση όλων των στοιχείων του μητρώου, π.χ. για $n = 2$, όλων των

$$\alpha_{11} - \lambda, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22} - \lambda$$

Επομένως ΔΕΝ μπορούμε να πούμε ότι $p(A) = \det(A - AI)\det(0) = 0$.

Απόδειξη Cayley-Hamilton Αργότερα ..

Ένα άλλο θέμα: Έστω ότι $Ax = \lambda x$. Τότε $A(\gamma x) = \lambda(\gamma x)$, δηλ. αν πολλαπλασιάσουμε το ιδιοδιάνυσμα με βαθμωτό, έχουμε πάλι ιδιοδιάνυσμα και η ιδιοτιμή παραμένει αμετάβλητη. Αν όμως γράψουμε $(\gamma A)x = (\gamma\lambda)x$ δηλ. αν πολλαπλασιάσουμε το μητρώο με βαθμωτό, το ιδιοδιάνυσμα παραμένει αμετάβλητο και η ιδιοτιμή πολλαπλασιάζεται με το βαθμωτό.

... επιπλέον των $AB \neq BA$, $= 0$ ακόμα και αν $\neq 0$, $B \neq 0$, ... που έπεται από το θεώρημα Cayley-Hamilton:

Για τις δυνάμεις $A^n = -\gamma_{n-1}A^{n-1} - \gamma_{n-2}A^{n-2} - \cdots + \gamma_1 A + \gamma_0 I.$

Δηλ. για κάθε μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, οι δυνάμεις μεγαλύτερες από $n-1$ μπορούν να γραφτούν ως γραμμικός συνδυασμός χαμηλοτέρων δυνάμεων!

Για το αντίστροφο (αν υπάρχει)

$$
\begin{aligned}
0 &= A^n + \gamma_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \gamma_1 A + \gamma_0 I \\
&= A^{-1}\left(A^n + \gamma_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \gamma_1 A + \gamma_0 I\right)
\end{aligned}
$$

επομένως

$$
A^{-1} = -\frac{1}{\gamma_0}\left(A^{n-1} + \gamma_{n-1}A^{n-2} + \cdots + \gamma_1 I\right)
$$

Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ορίζεται ως ιδιοτιμή κάθε βαθμωτός λ για τον οποίο το μητρώο $A - \lambda I$ δεν είναι αντιστρέψιμο και ιδιοχώρος του A που αντιστοιχεί στο λ ο μηδενόχωρος του $A - \lambda I$. **Θα δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή.**

- Δίνεται $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Έστω ένα μη μηδενικό $x \in \mathbb{R}^n$. Τα $n+1$ διανύσματα

$$x, Ax, A^2x, \ldots, A^nx$$

θα είναι οπωσδήποτε γραμμικά εξαρτημένα (γιατί?).

- Επομένως υπάρχουν συντελεστές $\gamma_0, \cdots, \gamma_n$, όχι όλοι μηδέν (και εξαρτώμενοι από το x) τέτοιοι ώστε

$$0 = \gamma_0 x + \gamma_1 Ax + \cdots \gamma_n A^n x = p(A)x$$

- Δεν γνωρίζουμε ακριβώς το βαθμό του πολυωνύμου! Μπορεί να είναι μικρότερος του n.
- Αφού $p(A)x = 0$ και $x \neq 0$, το μητρώο $p(A)$ δεν είναι αντιστρέψιμο.
- Αντικαθιστώντας το A με βαθμωτή μεταβλητή ζ, $p(\zeta) = 0$, και έστω ότι $\deg p = m \leq n$ και ότι οι ρίζες του είναι $\rho_1, \ldots, \rho_m \in \mathbb{C}$. Τότε

$$p(z) = \gamma(\zeta - \rho_1)(\zeta - \rho_2)(\zeta - \rho_m).$$

όπου γ είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου.

- Έπεται ότι ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες του

$$p(A) = \gamma(A - \rho_1 I)(A - \rho_2 I), (A - \rho_m I)$$

δεν είναι αντιστρέψιμος. Ιδιοτιμή αποκαλείται κάθε ρ_j για το οποίο ο παράγοντας $A - \rho_j I$, δεν είναι αντιστρέψιμος.

Βασικός ορισμός

Για κάθε μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και μεταβλητή λ, η ορίζουσα $p(\lambda) = \det\left(\lambda I - \right)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n. Λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο και αν το γράψουμε

$$p(\lambda) \quad = \quad \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_1\lambda + \gamma_0$$

τότε $\gamma_{n-1} = -\mathrm{trace}\left(A\right)$ και $\gamma_0 = (-1)^n \det(A)$.

- Το πολυώνυμο έχει ακριβώς n ρίζες $\lambda_1, \cdots \lambda_n \in \mathbb{C}^n$ που αποκαλούμε **ιδιοτιμές** του .
- Γράφουμε $p(x) = (x-\lambda_1)^{\mu_1}\cdots(x-\lambda_k)^{\mu_k}$ όπου $k \le n$ είναι το πλήθος των διαφορετικών ιδιοτιμών, $1 \le \mu_i \le k$ είναι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμης λ_j και $\sum_{j=1}^{k} \mu_k = n$. Το μ_j λέγεται αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_j.
- Για κάθε ιδιοτιμή λ, υπάρχει **ιδιοδιάνυσμα** $x \in \mathbb{C}^n$ τ.ώ. $Ax = \lambda x$.
- Ισχύει ότι $p(A) = 0$ **(θεώρημα Cayley-Hamilton)**.
- τα ιδιοζεύγη (ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα) μητρώων παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο σε πληθώρα εφαρμογών.
- Διαφορετικά μητρώα μπορεί να έχουν ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Είδαμε ότι αν p_n είναι το χ.π. του $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τότε $p_n(A) = 0$. Το ερώτημα είναιαν υπάρχουν πολυώνυμα μικρότερου βαθμού, π.χ. q_k, $k < n$ τ.ώ. $q_k(A) = 0$.

Ορισμός

Το ελάχιστο πολυώνυμο ενός μητρώου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι το ελάχιστου βαθμού πολυώνυμο q για οποίο ισχύει ότι $q(A) = 0$. Αν θέσουμε το μεγιστοβάθμιο συντελεστή ίσο με 1, τότε το ελάχιστο πολυώνυμο είναι μονικό και μοναδικό.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του διαιρεί ακριβώς το χ.π. του A. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$p(x) = (x-2)^4$, $q(x) = (x-2)^4$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $p(x) = (x-2)^4$, $q(x) = (x-2)^3$

Άλλα πολυώνυμα: Ελάχιστο πολυώνυμο (minimal polynomial) II

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, p(x) = (x-2)^4, q(x) = (x-2)^2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, p(x) = (x-2)^4, q(x) = x-2$$

Μία ιδέα επίλυσης του ΑΠΙ (ΜΟΝΟΝ ΓΙΑ ΠΟΛΥ ΜΙΚΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ - ΔΗΛ. ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΝΑΓΚΕΣ ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ!)

1. Εύρεση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Δαπανηρή και αριθμητικά προβληματική για μεγάλα προβλήματα.
2. Υπολογισμός των ριζών του (που είναι οι ιδιοτιμές). Αν $n \geq 5$ τότε δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος υπολογισμού των ριζών και πρέπει να χρησιμοποιηθεί (επαναληπτικός) αλγόριθμος προσέγγισης ριζών πολυωνύμου[2].
3. Για κάθε ιδιοτιμή, επίλυση του $(A - \lambda I)x = 0$ και επιλογή των ιδιοδιανυσμάτων (ανεύρεση των ειδικών λύσεων). Αλγόριθμος εύρεσης μηδενοχώρου. Η ΤΕΤΡΙΜΜΕΝΗ ΛΥΣΗ $x = 0$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑ

Για κάθε ιδιοτιμή λ_j, συνήθως ενδιαφέρει ένα σύνολο από γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που είναι βάση για το $\text{null}(\lambda_j I - A)$. Αυτά είναι ειδικές λύσεις του $(\lambda I - A)x = 0$. Συνήθως τα διανύσματα επιλέγονται κανονικοποιημένα.
Τα παραπάνω είναι μόνο για μικρά προβλήματα και δεν χρησιμοποιείται: Στην πράξη (π.χ. στη MATLAB) χρησιμοποιούνται ειδικοί αλγόριθμοι (συνάρτηση eig) για την εύρεση των ιδιοτιμών (πχ. αλγόριθμος QR. Μάλιστα, το χ.π. υπολογίζεται μετά από κλήση στην eig για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και με υπολογισμό των συντελεστών της δυναμομορφής από την παραγοντοποιημένη μορφή. Δηλαδή, η διαδικασία που ακολουθείται έχει την αντίθετη φορά από αυτήν που χρησιμοποιούμε εδώ[3].

[2] Η αδυναμία αυτή αποτελεί ένα βασικό εύρημα των Μαθηματικών του 19ου αιώνα (Abel, Rufffini, και Galois)

[3] Η αριθμητική επίλυση του ΑΠΙ είναι ένα σημαντικό επιστημονικό αντικείμενο των περιοχών της Υπολογιστικής Γραμμικής Άλγεβρας και της Αριθμητικής Ανάλυσης.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3), \Lambda(A) = \{1, 3\}$,
$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 1, \lambda_2 = 3, \mu_2 = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2\,\mathrm{i} & 0 & -2\,\mathrm{i} \\ 2\,\mathrm{i} & 4 & -2\,\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2\,\mathrm{i} & 4 & 2\,\mathrm{i} \\ -2\,\mathrm{i} & 0 & 2\,\mathrm{i} & 4 \end{pmatrix}$$

$p(\lambda) = (\lambda - 4)^2(\lambda - 4 - 4\mathbf{i})(\lambda - 4 + 4\mathbf{i})$,
$\Lambda(A) = \{2, 4 + 4\mathbf{i}, 4 - 4\mathbf{i}\}, \lambda_1 = 4, \mu_1 = 2$,
$\lambda_2 = 4 + 4\mathbf{i}, \mu_2 = 4 - 4\mathbf{i}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2, \Lambda(A) = \{1\}$,
$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$,
$\Lambda(A) = \{1, 2\}, \lambda_1 = 1, \mu_1 = 1$,
$\lambda_2 = 2, \mu_2 = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) \quad = \quad \lambda^4 - 8\lambda^3 + 16\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 4)^2$$

επομένως

$$\lambda_1 = 0, \mu_1 = 2, \lambda_2 = 4, \mu_2 = 2.$$

και

$$\Lambda(A) = \{0, 4\}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, Βρήκαμε ότι $\lambda_1 = 1, \mu_1 = 1, \lambda_2 = 3, \mu_2 = 1$.

Θέτουμε $(1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ και επιλύουμε $A(1)x = 0$:

Η τάξη deg $(A(1)) = 1$, και βρίσκουμε από τις ειδικές λύσεις ότι μητρώο μηδενοχώρου για το $A(1)$ είναι το $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Κανονικοποιούμε και επιλέγουμε ιδιοδιάνυσμα για το λ_1:

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Θέτουμε $(3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ και επιλύουμε $A(3)x = 0$: Η τάξη deg $(A(3)) = 1$, και βρίσκουμε από τις ειδικές λύσεις ότι μητρώο μηδενοχώρου για το $A(3)$ είναι το $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Κανονικοποιούμε και επιλέγουμε ιδιοδιάνυσμα για το λ_2: $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Αν πολλαπλασιάσουμε $(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 3\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 3\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Δείτε ότι αν $X = (x_1, x_2)$ και $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, τότε

$$AX = X\Lambda$$

Το X είναι αντιστρέψιμο γιατί οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές (βλ. επόμενες διαφάνειες.) Είναι επίσης ορθογώνιο (λόγω συμμετρίας του A, θα το δούμε και αυτό αργότερα).

Ισχύει επομένως ότι

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή

$$X^{-1}AX = X^{\top}AX = \Lambda.$$

Προσοχή

Ο μετασχηματισμός $A \rightarrow X^{-1}AX$ λέγεται μετασχηματισμός ομοιότητας του A με το X. Όταν το X είναι ορθογώνιο, όπως εδώ, χαρακτηρίζεται ως ορθογώνιος μετασχηματισμός ομοιότητας. Στην περίπτωση που εξετάζουμε, η εφαρμογή του μετασχηματισμού, μετατρέπει το A σε διαγώνιο μητρώο, που περιέχει τις ιδιοτιμές. Λέμε ότι το μητρώο είναι διαγωνιοποιήσιμο. Ένα μητρώο με n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα διαγωνιοποιείται με το μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων του.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, Βρήκαμε ότι $\lambda_1 = 0, \mu_1 = 2, \lambda_2 = 2, \mu_2 = 2$.

Θέτουμε $(0) = -A$ και επιλύουμε $-Ax = 0$:

Η τάξη deg $(A(0)) = 2$, και βρίσκουμε από τις ειδικές λύσεις ότι μητρώο μηδενοχώρου για το $A(0)$ είναι το $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Κανονικοποιούμε και επιλέγουμε ιδιοδιανύσματα για το

$\lambda_1 = 0$: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Θέτουμε $(4) = 4I - A$ και επιλύουμε $(4I - A)x = 0$:

Η τάξη deg $(A(4)) = 2$, και βρίσκουμε από τις ειδικές λύσεις ότι μητρώο μηδενοχώρου για το $A(4)$ είναι το $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Κανονικοποιούμε και επιλέγουμε ιδιοδιανύσματα για το $\lambda_2 = 4$: $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Για το $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. βρήκαμε ότι $\Lambda(A) = \{1\}$, $\lambda_1 = 1, \mu_1 = 2$.

Θέτουμε $(1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ και επιλύουμε $A(1)x = 0$.

Η τάξη deg $(A(1)) = 1$, επομένως η διάσταση του null$(A(1)) = 1$. Παρατηρούμε ότι null$(A(1)) < \mu_1$.

Βρίσκουμε από τις ειδικές λύσεις ότι μητρώο μηδενοχώρου για το $A(1)$ είναι το $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Κανονικοποιούμε, οπότε το ιδιοδιάνυσμα για το λ_1 είναι $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Προσοχή: Όλα τα ιδιοδιανύσματα του A για το $\lambda_1 = 1$ είναι πολλαπλάσια του x_1. Δεν υπάρχουν άλλα! Εφόσον η μόνη ιδιοτιμή είναι το $\lambda_1 = 1$, αυτό είναι το μοναδικό ιδιοδιάνυσμα του A.

Γραμμική ανεξαρτησία ιδιοδιανυσμάτων

Πρόταση

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη[4] Έστω ότι $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ όπου $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Τότε αν υπάρχουν μη μηδενικά γ_1, γ_2 τ.ώ.

$$0 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = \gamma_1 Ax_1 + \gamma_2 Ax_2 = \gamma_1 \lambda_1 x_1 + \gamma_2 \lambda_2 x_2.$$

Ισχύει επίσης ότι $0 = \lambda_2(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) = \lambda_2 \gamma_1 x_1 + \lambda_2 \gamma_2 x_2$ επομένως

$$\gamma_1 \lambda_1 x_1 + \cancel{\gamma_2 \lambda_2 x_2} = \lambda_2 \gamma_1 x_1 + \cancel{\lambda_2 \gamma_2 x_2}$$

δηλ. $0 = \gamma_1 \lambda_1 x_1 - \lambda_2 \gamma_1 x_1$ επομένως $\lambda_1 = \lambda_2$, άρα άτοπο.

Πόρισμα

Αν ένα μητρώο $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε θα έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

[4] Δείτε την πλήρη απόδειξη στο βιβλίο του Strang:

Έστω ότι γνωρίζουμε n ιδιοζεύγη (λ_j, x_j) του $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1, Ax_2 = \lambda_2 x_2, \ldots, Ax_n = \lambda_n x_n$$

Συλλέγουμε και διατυπώνουμε με μητρώα:

$$A[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [x_1 \ldots, x_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

Επομένως

$$AX = X\Lambda,$$

όπου $\Lambda = \mathrm{diag}([\lambda_1, \ldots, \lambda_n])$ και $X = [x_1 \ldots, x_n]$.

ΠΡΟΣΕΞΤΕ Αν το X είναι αντιστρέψιμο,

$$X^{-1}AX = \Lambda,$$

δηλ. χρησιμοποιώντας τα μητρώα X (με στήλες τα δεξιά ιδιοδιανύσματα) και X^{-1} (με στήλες του X^{-*} τα αριστερά ιδιοδιανύσματα) διαγωνιοποιήσαμε το A.

Κάθε μητρώο για το οποίο υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα χαρακτηρίζεται ως διαγωνιοποιήσιμο, ειδάλλως λέγεται μη διαγωνιοποιήσιμο.

Θεώρημα: Ένα μητρώο είναι διαγωνιοποιήσιμο αν και μόνον αν το ελάχιστο πολυώνυμο του μητρώου έχει απλές ρίζες.

Αν $\in \mathbb{C}^{n\times n}$ και $\lambda \in \Lambda(A)$ τότε

$$\text{det}\left(\lambda I - A\right) = 0$$

άρα αν συμβολίσουμε με r την τάξη του $\lambda I - A$,

$$r = \text{deg}\left(\lambda I - A\right) \leq n - 1.$$

Αφού το μητρώο είναι τετραγωνικό, οι διαστάσεις του μηδενοχώρου και του αριστερού μηδενοχώρου του $A - \lambda I$ είναι ίσες και

$$1 \leq n - r = \dim(\text{null}(\lambda I - A)) = \dim(\text{null}(\bar{\lambda} I - A^*)) \leq n - 1$$

Ιδιοδιανύσματα είναι τα μέλη των μηδενοχώρων αυτών:

δεξιά ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής λ είναι τα $x \in \text{null}(\lambda I - A)$ δηλ. τ.ώ. $Ax = \lambda x$.

αριστερά ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής λ είναι τα $y \in \text{null}(\bar{\lambda} I - A^*)$, δηλ. τ.ώ. $y^* A = \lambda y^*$.

Άρα για κάθε ιδιοτιμή λ υπάρχουν

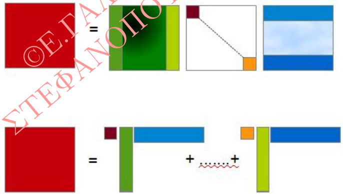
διανύσματα $x \in \text{null}(A - \lambda I)$ ώστε $Ax = \lambda x$ που λέγονται δεξιά ιδιοδιανύσματα του A για την ιδιοτιμή λ.

διανύσματα $y \in \text{null}(A^* - \bar{\lambda} I)$ ώστε $y^* A = \lambda y^*$ που λέγονται αριστερά ιδιοδιανύσματα του A για την ιδιοτιμή λ.

Ανάπτυγμα μητρώου συναρτήσει ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων

Αν το μητρώο A διαθέτει n γ.α. ιδιοδιοδιανύσματα, τότε $A = X\Lambda X^{-1}$ όπου Λ το διαγώνιο μητρώο των ιδιοτιμών και X το μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων.
Θυμηθείτε τη γραφή γινομένου μητρώων ως άθροισμα μητρώων πρώτης τάξης (στήλη του 1ου επί γραμμή του 2ου).
Θέτουμε για ευκολία $Y = (X^{-1})^*$, δηλ. Y είναι το συζυγές αντίστροφο του X, τότε μπορούμε να γράψουμε το A με βάση το φασματικό ανάπτυγμα.

$$
\begin{aligned}
A &= X\Lambda Y^* \\
&= \lambda_1 x_1 y_1^* + \lambda_2 x_2 y_2^* + \cdots + \lambda_n x_n y_n^*
\end{aligned}
$$



Προσοχή: Για κάθε διαφορετική ιδιοτιμή λ_j:

- ο μηδενόχωρος null$(\lambda_j I - A)$ λέγεται ιδιόχωρος της ιδιοτιμής λ_j.
- Η διάσταση του ιδιόχωρου χαρακτηρίζεται ως γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_j.
- Για κάθε ιδιοτιμή ισχύει ότι

$$1 \leq \text{γεωμ. πολλ/τα}(\lambda_j) \leq \text{αλγεβρ. πολλ/τα.}(\lambda_j)$$

- Αν μία ή περισσότερες ιδιοτιμές ενός μητρώου έχουν γεωμετρική πολλαπλότητα μικρότερη της αλγεβρικής τους, δηλ.

$$1 \leq \text{γεωμ. πολλ/τα}(\lambda_j) < \text{αλγεβρ. πολλ/τα.}(\lambda_j)$$

αυτές λέγονται ελλειμματικές ή ελαττωματικές ή ελλιπείς [5] και το μητρώο ελλειμματικό ή ελαττωματικό ή ελλιπή.

- Τα ελλειμματικά μητρώα είναι μη διαγωνιοποιήσιμα.

[5] defective

- Κάθε μητρώο $n \times n$ έχει ακριβώς n ιδιοτιμές. Μπορεί όμως να μην υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα οπότε δεν θα είναι διαγωνιοποιήσιμο.

  <u>Παράδειγμα</u> $= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ Κάθε διάνυσμα x τ.ώ $Ax = \lambda x$ είναι πολλαπλάσιο του $x = [1, 0]^\top$.

  <u>Παράδειγμα</u> $A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{4}{3} \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Κάθε διάνυσμα x τ.ώ $Ax = \lambda x$ είναι πολλαπλάσιο του $x = [-\frac{2}{3}, 1]^\top$.
- Αν υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε το μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων X είναι αντιστρέψιμο και επομένως θα είναι διαγωνιοποιήσιμο. Ένα μητρώο $n \times n$ είναι διαγωνιοποιήσιμο αν και μόνον αν έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.
- Αν ένα μητρώο $n \times n$ έχει n διακριτές ιδιοτιμές, θα έχει n γ.α. ιδιοδιανύσματα και θα είναι διαγωνιοποιήσιμο.
- Αν ένα μητρώο έχει επαναλαμβανόμενες ιδιοτιμές, το μητρώο ενδέχεται να μην είναι διαγωνιοποιήσιμο. Για να εξακριβωθεί το κατά πόσον είναι διαγωνιποιήσιμο όχι, χρειάζεται περισσότερη διερεύνηση.

Πολλαπλές ιδιοτιμές και ελλειμματικά μητρώα

- Σε κάθε απλή ιδιοτιμή (αλγ. πολλ/τας ίσης με 1) αντιστοιχούν ένα δεξιό και ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα
- Τι γίνεται όταν μια ιδιοτιμή, π.χ. λ_j, έχει αλγ. πολλ/τα, έστω $\mu_j > 1$?
- Το κρίσιμο ερώτημα είναι κατά πόσον υπάρχουν μ_j γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα[6]
- Είναι κρίσιμο γιατί αν για κάθε ιδιοτιμή υπάρχουν τόσα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα όσα και η αλγεβρική της πολλαπλότητα, τότε το μητρώο δεν είναι ελλειμματικό, άρα είναι διαγωνιοποιήσιμο.
- Επίσης τότε μπορούμε με τα ιδιοδιανύσματα να κατασκευάσουμε βάση για όλον το διανυσματικό χώρο ($\mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{C}^n$). Θα δούμε αργότερα ότι η βάση αυτή μπορεί να είναι προτιμότερη της τυπικής βάσης $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

[6] Στη συνέχεια θα εννοούμε τα δεξιά ιδιοδιανύσματα, αλλά το ίδιο ισχύει για τα αριστερά.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα δυνάμεων μητρώου

- Για κάθε A, αν $Ax = \lambda x$ τότε $A^k x = \lambda^k x$
- ομοίως $\gamma A^j x + \delta A^k x = \gamma \lambda^j x + \delta \lambda^k x$
- άρα αν οι ιδιοτιμές του A είναι $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ τότε οι ιδιοτιμές του πολυωνύμου $q(A) = \gamma_s A^s + \cdots + \gamma_0 I$, είναι

$$
\begin{array}{ccc}
q(\lambda_1) & = & \gamma_s \lambda_1^s + \cdots + \gamma_1 \lambda_1 + \gamma_0 I \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
q(\lambda_n) & = & \gamma_s \lambda_n^s + \cdots + \gamma_1 \lambda_n + \gamma_0 I
\end{array}
$$

δηλ. $\{q(\lambda_1), ..., q(\lambda_n)\}$.

Συμπεράσματα

- Επομένως αν γνωρίζουμε τις ιδιοτιμές του A γνωρίζουμε και τις ιδιοτιμές οποιουδήποτε πολυωνύμου στο A.
- Τα ιδιοδιανύσματα του $q(A)$ είναι ίδια με τα ιδιοδιανύσματα του A.

Διαχείριση δυνάμεων μητρώου μέσω διαγωνιοποίησης

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και ότι γνωρίζουμε X, Λ όπως πριν, δηλ. $X^{-1}AX = \Lambda$.

$$\begin{aligned} A &= X\Lambda X^{-1} \\ A^k &= (X\Lambda X)^k = (X\Lambda X^{-1})(X\Lambda X^{-1}) \cdots (X\Lambda X^{-1}) \\ &= X\Lambda(X^{-1}X)\Lambda(X^{-1}X)\Lambda \cdots (X^{-1}X)\Lambda X^{-1} \\ &= X\Lambda^k X^{-1}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Ο υπολογισμός του A^k ανάγεται στον εύκολο υπολογισμό του Λ^k και σε δύο επιμέρους πολλαπλασιασμούς μητρώων, π.χ. $X\Lambda^k \to (X\Lambda^k)X^{-1}$.

Πέραν του υπολογισμού του A^k, η διάσπαση του μητρώου σε $A = X\Lambda X^{-1}$ διευκολύνει στην διερεύνηση του παρακάτω ζητήματος.

Πώς συμπεριφέρεται το A^k για μεγάλες τιμές του k?

- Υπάρχει κάτι το ιδιαίτερο?
- Υπάρχει όριο, δηλ. κάποιο B τ.ω. $\lim_k A^k = B$ υπό την έννοια ότι $\forall \epsilon > 0, \exists \hat{k}$ τ.ώ. $\|A^k - B\| < \epsilon, \forall k > \hat{k}$?
- Ποιό είναι αυτό?

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{-k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό για οποιοδήποτε k επιθυμούμε, προκύπτει το ζητούμενο, αφού στρογγυλέψουμε

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0.5062 & -0.4938 & 0 \\ -0.4938 & 0.5062 & 0 \\ -0.4938 & 0.4938 & 0.0123 \end{pmatrix}, A^{10} = \begin{pmatrix} 0.5000 & -0.5000 & 0 \\ -0.5000 & 0.5000 & 0 \\ -0.5000 & 0.5000 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

Οι τιμές έχουν υποστεί στρογγύλευση.

Παράδειγμα II

Καθώς $k \longrightarrow \infty$,

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {\color{red}3^{-k}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & {\color{red}3^{-k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

οι όροι στο διαγώνιο μητρώο Λ^k που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές $|\lambda| < 1$ τείνουν στο 0, επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{k \longrightarrow \infty} A^k &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {\color{red}0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & {\color{red}0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Αριστερά ιδιοδιανύσματα

Ποιά είναι η σχέση των ιδιοτιμών/διανυσμάτων του A με αυτά του A^*?

- Αν $Ax = \lambda x$ τότε $x^* A^* = \bar{\lambda} x^*$ επομένως το $\bar{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A^*
- Επομένως οι ιδιοτιμές του A^* είναι οι συζυγείς των ιδιοτιμών του A.

Γενικά δεν υπάρχει απλή σχέση μεταξύ των ιδιοδιανυσμάτων των A, A^*.

- Αν $\bar{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A^* τότε θα υπάρχει ιδιοδιάνυσμα y ώστε $A^* y = \bar{\lambda} y$
- επομένως $y^* A = \lambda y^*$

Ομοιότητα μητρώων

(Strang, 6.6)

Ορισμός

Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Μας δίνεται αντιστρέψιμο $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και θέτουμε $B = X^{-1}AX$. Τότε $\Lambda(B) = \Lambda(A)$. Τα μητρώα A και B αποκαλούνται όμοια και έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιοτιμές.

- $\Lambda(AB) = \Lambda(BA)$

Μεταθετικότητα και ιδιοδιανύσματα

Ισχύει ότι $AB = BA$ αν και μόνον αν υπάρχει ίδιο X που διαγωνιοποιεί αμφότερα τα μητρώα, δηλ.

$$\exists X \text{ τ.ώ. } X^{-1}AX = \Lambda(A), X^{-1}BX = \Lambda(B).$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> Τα παραπάνω αποτελέσματα ισχύουν μόνον όταν έχουμε ένα εμπλεκόμενο μητρώο και δυνάμεις του.

Γενικά - δύο αρνητικά αποτελέσματα και ένα που θα εξετάσουμε:

- $\Lambda(A+B) \neq \Lambda(A) + \Lambda(B)$
- υπάρχουν $\lambda \in \Lambda(AB)$ τέτοια ώστε $\lambda \neq \lambda_i(A)\lambda_j(B)$ για κανένα i, j

Το πρώτο δεν εκπλήσσει, εξάλλου $\det(A) + \det(B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Σχετικά με το γινόμενο: Θυμηθείτε ότι $\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$. Για τις ιδιοτιμές δεν ισχύει κάτι αντίστοιχο με την 1η ισότητα. Υπάρχει όμως κάτι αντίστοιχο με τη δεύτερη ισότητα.

Στη συνέχεια εξετάζουμε πως συνδέονται οι ιδιοτιμές $\Lambda(AB)$ με τις ιδιοτιμές $\Lambda(BA)$.

Χρησιμοποιώντας ομοιότητα, θα δείξουμε πως συνδέονται οι ιδιοτιμές $\Lambda(AB)$ με τις ιδιοτιμές $\Lambda(BA)$. Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Προσοχή, τα μητρώα A, B δεν είναι κατ' αρνάγκη τετραγωνικά, το γινόμενό τους όμως πρέπει να είναι! Τότε αν

$$X = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \Rightarrow X^{-1} = \begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & 0_{m,n} \\ B & 0_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{m,m} & 0_{m,n} \\ B & BA \end{pmatrix}$$

Έστω ότι $m \geq n$, τότε

$$(\lambda_1(AB), \ldots, \lambda_n(AB), \lambda_{n+1}(AB), \ldots \lambda_m(AB), \overbrace{0, \ldots 0}^{n}) = (\lambda_1(BA), \ldots, \lambda_n(BA), \underbrace{0, \ldots 0}_{m})$$

επομένως οι ιδιοτιμές του AB είναι ίδιες με τις ιδιοτιμές του BA συν επιπλέον μία μηδενική ιδιοτιμή πολλαπλότητας $m - n$.

$$\Lambda(AB) = \Lambda(BA) \cup \{0\}$$

$$
\begin{aligned}
Ax &= \lambda x, A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow x^* A^\top = \bar{\lambda} x^* \\
\Rightarrow (x^* A)x &= \|x\|^2 \bar{\lambda} = x^*(Ax) = \lambda \|x\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Ax &= \lambda x, A = A^* \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow x^* A^* = \bar{\lambda} x^* \\
\Rightarrow (x^* A)x &= \|x\|^2 \bar{\lambda} = x^*(Ax) = \lambda \|x\|^2
\end{aligned}
$$

άρα, επειδή $\|x\| \neq 0$,

$$
\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.
$$

Οι ιδιοτιμές των ερμιτιανών και των πραγματικών συμμετρικών μητρώων είναι όλες πραγματικές. Επίσης αν $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τότε και τα ιδιοδιανύσματα είναι πραγματικά.

Έστω διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda \neq \mu$ και

$$\begin{aligned} Ax = \lambda x, \ \ Ay = \mu y \\ y^\top Ax = \lambda y^\top x = y^\top A^\top x \\ (Ay)^\top x = \mu y^\top x \Rightarrow \mu(y^\top x) = \lambda(y^\top x) \end{aligned}$$

οπότε είτε $\lambda = \mu$ ή $y^\top x = 0$.

Τα ιδιοδιανύσματα ενός πραγματικού συμμετρικού μητρώου που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι πάντοτε κάθετα μεταξύ τους

Τι γίνεται με τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε πολλαπλές ιδιοτιμές?

Κάθε συμμετρικό πραγματικό ή ερμιτιανό μητρώο διαθέτει ακριβώς n ιδιοδιανύσματα που είναι κάθετα μεταξύ τους. Δηλαδή διαθέτει ένα πλήρες σύνολο ορθογωνίων ιδιοδιανυσμάτων.

$$\begin{aligned} A[q_1,\dots,q_n] &= [q_1,\dots,q_n]\Lambda \Leftrightarrow [q_1,\dots,q_n]^\top A[q_1,\dots,q_n] = \Lambda \\ Q^\top A Q &= \Lambda \\ A &= \lambda_1 q_1 q_1^\top + \cdots \lambda_n q_n q_n^\top \quad \text{φασματικό ανάπτυγμα} \end{aligned}$$

Για κάθε πολυώνυμο p βαθμού n, υπάρχει μητρώο $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με χ.π. ίδιο με p.

Το $p(z) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ είναι το χ.π. του

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix},$$ το συνοδευτικό μητρώο του p.

(υπολ. ριζών πολυωνύμου βαθμού n) $\equiv$ (υπολ. ιδιοτιμών συνοδευτικού μητρώου)

Η περίπτωση των συμμετρικών (πραγματικών) και ερμιτιανών μητρώων

Αν $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ή $A = A^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τότε

- όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές,
- υπάρχουν n γραμμικά ιδιοδιανύσματα, $\{q_1, \ldots, q_n\}$,
- τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους, άρα $Q^*Q = I$,
- τα ιδιοδιανύσματα είναι πραγματικά αν το μητρώο είναι πραγματικό,
- το μητρώο είναι διαγωνιοποιήσιμο,
- $Q^*AQ = \Lambda$.

Μία ενδιαφέρουσα αναγωγή

Αφού τα συμμετρικά μητρώα έχουν όλες αυτές τις καλές ιδιότητες, έχει ενδιαφέρον το εξής:
Κάθε τετραγωνικό μητρώο $\mathbb{R}^{n\times n}$ μπορεί να γραφτεί ως

$$A = \frac{A + A^\top}{2} + \frac{A - A^\top}{2},$$

Ο πρώτος όρος είναι συμμετρικός και ο δεύτερος αντισυμμετρικός:

$$\left(\frac{A - A^\top}{2}\right)^\top = -\left(\frac{A - A^\top}{2}\right)$$

Ενδιαφέρον: Οι ιδιοτιμές των αντισυμμετρικών μητρώων είναι όλες φανταστικές.