# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

## Διάλεξη 8

## Χώροι με εσωτερικό γινόμενο
## Ορθοκανονικά σύνολα

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

21 Νοεμβρίου 2022

## 1. Εσωτερικό γινόμενο

Εάν $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ το γινόμενο $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ ορίζεται ως γινόμενο μητρώων και

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Το γινόμενο αυτό το γνωρίζουμε ως το **εσωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, και το συμβολίζουμε με $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, ή $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

### Ορισμός (8.1)

Εάν $X$ είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος μια πραγματική συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ θα λέγεται **εσωτερικό γινόμενο** (inner product) εάν:

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ και $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$.
3. $\langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$.

Ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ συμβολίζεται και ως $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Λέγεται, έτσι, και **στικτό γινόμενο** (dot product), ή **βαθμωτό γινόμενο** (scalar product).

Παρατηρούμε ότι εάν $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} \rangle &= \langle \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle && \text{(από την (4))} \\ &= \lambda\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \mu\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle && \text{(από τις (2) και (3))} \\ &= \lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \mu\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle && \text{(από την (4)).} \end{aligned}$$

**Ορισμός (8.2)**

Ένας διανυσματικός χώρος $X$ στον οποίο έχει οριστεί ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ λέγεται **χώρος με εσωτερικό γινόμενο**. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

**Παράδειγμα (8.3 Το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο)**

Ο $\mathbb{R}^n$ με $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο.
(1) $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$ και $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
(2) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})^{\mathrm{T}}\mathbf{w} = (\mathbf{u}^{\mathrm{T}} + \mathbf{v}^{\mathrm{T}})\mathbf{w} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{w} + \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}$.
(3) $(\lambda\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \lambda u_1 v_1 + \lambda u_2 v_2 + \cdots + \lambda u_n v_n = \lambda(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n) = \lambda\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$.
(4) $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}$ λόγω μεταθετικότητας του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{R}$.
Κατά συνέπεια η σχέση $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$.

## Παρατήρηση (8.2)

Εάν το $A$ είναι ένα $n\times m$ μητρώο και το $B$ ένα $m\times k$ μητρώο, με το γνωστό συμβολισμό για τις γραμμές και τις στήλες, από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού μητρώων έπεται ότι

$$AB=\begin{pmatrix} A_{1*}^{\mathrm{T}}B_{*1} & A_{1*}^{\mathrm{T}}B_{*2} & \cdots & A_{1*}^{\mathrm{T}}B_{*k} \\ A_{2*}^{\mathrm{T}}B_{*1} & A_{2*}^{\mathrm{T}}B_{*2} & \cdots & A_{2*}^{\mathrm{T}}B_{*k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n*}^{\mathrm{T}}B_{*1} & A_{n*}^{\mathrm{T}}B_{*2} & \cdots & A_{n*}^{\mathrm{T}}B_{*k} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \langle A_{1*},B_{*1}\rangle & \langle A_{1*},B_{*2}\rangle & \cdots & \langle A_{1*},B_{*k}\rangle \\ \langle A_{2*},B_{*1}\rangle & \langle A_{2*},B_{*2}\rangle & \cdots & \langle A_{2*},B_{*k}\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle A_{n*},B_{*1}\rangle & \langle A_{n*},B_{*2}\rangle & \cdots & \langle A_{n*},B_{*k}\rangle \end{pmatrix},$$

έτσι

$$AB=\left(A_{i*}\cdot B_{*j}\right)=\left(\langle A_{i*},B_{*j}\rangle\right)=\left(A_{i*}^{\mathrm{T}}B_{*j}\right)$$

με $i=1,2,\ldots,n$ και $j=1,2,\ldots,k$.

## Άσκηση (8.1)

(α΄) Δείξτε ότι η σχέση
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3. \tag{1}$$
ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$.

(β΄) Δείξτε ότι
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{v}. \tag{2}$$

## Άσκηση (8.2)

Εάν $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$, και $A$ είναι ένα αντιστρέψιμο $3 \times 3$ μητρώο δείξτε ότι η σχέση
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} \tag{3}$$
ορίζει ένα εσωτρικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$. Σημειώνουμε ότι
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = (A\mathbf{u})^{\mathrm{T}} A\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A\mathbf{v}.$$

## Παρατήρηση (8.3)

Υπό το πρίσμα του αποτελέσματος της Άσκησης 8.2 βλέπουμε ότι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$ υλοποιείται και ως

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = I\mathbf{u} \cdot I\mathbf{v}$$

όπου $I$ είναι το $3 \times 3$ ταυτοτικό μητρώο. Επιπλέον το εσωτερικό γινόμενο στην Άσκηση 8.1 δίνεται από τη σχέση (3) με

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Τα αποτελέσματα των Ασκήσεων 8.1 και 8.2 γενικεύονται και ισχύουν στον $\mathbb{R}^n$. Ειδικά αν $A$ είναι ένα αντιστρέψιμο $n \times n$ μητρώο, τότε η σχέση

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A \mathbf{v}$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$.

### Άσκηση (8.3)

Εάν $p$ και $q$ είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ δύο με $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ και $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ ορίζουμε

$$\langle p, q \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Δείξτε ότι η σχέση αυτή είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{P}_2$.

### Παράδειγμα (8.4)

Στο χώρο $\mathscr{C}[a,b]$ των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a,b]$ η σχέση

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x \tag{4}$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο. Πράγματι αν $f, g, h \in \mathscr{C}[a,b]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε (1)

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x \geq 0$$

από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος αφού $f^2(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

## Παράδειγμα (συνέχεια)

Επιπλέον από τις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων και του ολοκληρώματος έπεται ότι

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0 \overset{*}{\Leftrightarrow} f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b] \Leftrightarrow f = 0.$$

* *Αν η $h$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, $h(x) \geq 0$ και $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0$, τότε $h(x) = 0$ στο $[a,b]$.*

(2) Από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος

$$\begin{aligned}\langle f+g, h\rangle &= \int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(f(x)h(x)+g(x)h(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle.\end{aligned}$$

(3) Όμοια

$$\langle \lambda f, g\rangle = \int_a^b \lambda f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\langle f,g\rangle.$$

### Παράδειγμα (συνέχεια)

(4) Τέλος

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \langle g,f\rangle.$$

Κατά συνέπεια η (4) ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο $\mathscr{C}[a,b]$.

### Ορισμός (8.3)

Έστω ότι $X$ είναι ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Θα λέμε ότι τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ του $X$ είναι **ορθογώνια** (orthogonal) ή **κάθετα** (perpendicular) μεταξύ τους αν $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$. Αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι ορθογώνια γράφουμε $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$.

Για παράδειγμα αν $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ και $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, τότε

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (1)(-2)+(2)(1)+(3)(0) = -2+2 = 0,$$

επομένως τα δύο διανύσματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους, $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$.

## Παράδειγμα (8.5)

Ας συμβολίσουμε με $\mathbb{P}_n[-1,1]$ τον χώρο των πολυωνύμων βαθμού έως $n$ περιορισμένων στο διάστημα $[-1,1]$. Μια βάση για τον χώρο αυτό είναι η $\mathscr{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Παρατηρούμε ότι

$$\langle x^k, x^l \rangle = \int_{-1}^{1} x^k x^l \, \mathrm{d}x = \frac{1}{k+l+1} x^{k+l+1} \Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{k+l+1}\left[1-(-1)^{k+l+1}\right]$$

$k, l = 0, 1, \ldots, n$ ($x^0 = 1$). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\langle x^k, x^l \rangle = \begin{cases} 0 & \text{αν } k+l \text{ είναι περιττός} \\ \dfrac{2}{k+l+1} & \text{αν } k+l \text{ είναι άρτιος} \end{cases}$$

Έτσι αν $k+l$ είναι περιττός αριθμός, τότε τα $x^k$ και $x^l$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους στο διάστημα $[-1,1]$.

Στην περίπτωση μιγαδικού διανυσματικού χώρου, δηλαδή ενός διανυσματικού χώρου πάνω στο σώμα των μιγαδικών αριθμών, έχουμε

## Ορισμός (8.4)

Εάν $X$ είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος μια συνάρτηση $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ θα λέγεται **εσωτερικό γινόμενο** (inner product) εάν ισχύουν τα παρακάτω:

1. $\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle \geq 0$ και $\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
2. $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle$, για κάθε $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in X$.
3. $\langle \lambda\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \lambda\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$, για κάθε $\mathbf{u},\mathbf{v} \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle = \overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}$, για κάθε $\mathbf{u},\mathbf{v} \in X$.

Όπου στην (4) με $\bar{z}$ συμβολίζουμε τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού $z$.

Παρατηρούμε ότι εάν $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in X$ και $\zeta,\xi \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u},\zeta\mathbf{v}+\xi\mathbf{w}\rangle &= \overline{\langle \zeta\mathbf{v}+\xi\mathbf{w},\mathbf{u}\rangle} && \text{(από την (4))}\\
&= \overline{\zeta\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle} + \overline{\xi\langle \mathbf{w},\mathbf{u}\rangle} && \text{(από τις (2) και (3))}\\
&= \bar{\zeta}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \bar{\xi}\langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle && \text{(από την (4)).}
\end{aligned}$$

### Άσκηση (8.4)

Αν $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ και $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ είναι διανύσματα στο $\mathbb{C}^n$ δείξτε ότι η σχέση

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := a_1\overline{b_1} + a_2\overline{b_2} + \cdots + a_n\overline{b_n}$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο.

## 2. Νόρμα διανύσματος

### Ορισμός (8.5)

Εάν $X$ είναι ένας διανυσματικός χώρος μια συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ λέγεται **νόρμα** (norm) εάν για κάθε $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ στο $X$ ικανοποιούνται οι σχέσεις

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$ και $\|\mathbf{u}\| = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
2. $\|\lambda\mathbf{u}\| = |\lambda|\|\mathbf{u}\|$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$).
3. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Για $\mathbf{u} \in X$ ο (μη αρνητικός) πραγματικός αριθμός $\|\mathbf{u}\|$ λέγεται νόρμα του $\mathbf{u}$.

Η ιδιότητα $(3)$ είναι η **τριγωνική ανισότητα**.

Το μέτρο του $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ είναι νόρμα. Οι ιδιότητες (1) και (2) έπονται από την

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2} = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

όπου $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Για την (3) υπολογίζουμε,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta + \|\mathbf{v}\|^2 \\
&\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\
&= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2
\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται η (3) παίρνοντας ρίζες.

Τη νόρμα του $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{a}\| = \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\Big)^{1/2}, \tag{5}$$

τη λέμε **$\ell_2$-νόρμα** στο $\mathbb{R}^n$ και τη συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$.

## Παράδειγμα (8.6)

Αν $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\|\mathbf{a}\| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα. Πράγματι $\|\mathbf{a}\| \geq 0$, σαν άθροιμα μη αρνητικών ποσοτήτων, ενώ $\|\mathbf{a}\| = 0$ αν και μόνο αν $|a_k| = 0$, για όλα τα $k$, άρα ο νόμος $(1)$ στον ορισμό της νόρμας ικανοποιείται. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\|\lambda\mathbf{a}\| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

από την οποία προκύπτει η $(2)$. Η $(3)$, η τριγωνική ανισότητα είναι άμεση συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας της απόλυτης τιμής

$$|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Τη νόρμα αυτή λέμε **$\boldsymbol{\ell_1}$-νόρμα** στο $\mathbb{R}^n$ και τη συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_1$.

### Παράδειγμα (8.7)

Αν $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\|\mathbf{a}\| = \max_{1 \le k \le n} |a_k|.$$

Οι συνθήκες (1) και (2) του ορισμού της νόρμας ικανοποιούνται η δε (3), η τριγωνική ανισότητα, έπεται από το γεγονός ότι για $k = 1, 2, \dots, n$

$$|a_k + b_k| \le |a_k| + |b_k| \le \max_{1 \le k \le n} |a_k| + \max_{1 \le k \le n} |b_k|,$$

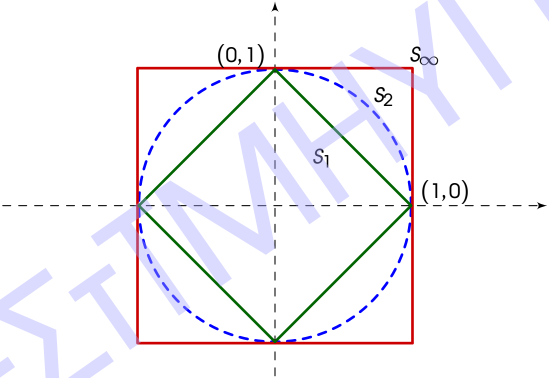
επομένως

$$\max_{1 \le k \le n} |a_k + b_k| \le \max_{1 \le k \le n} |a_k| + \max_{1 \le k \le n} |b_k|.$$

Η $\|\cdot\|$ λοιπόν είναι νόρμα. Συνήθως τη συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_\infty$ και τη λέμε **maximum-νόρμα** ή $\ell_\infty$**-νόρμα** στο $\mathbb{R}^n$.

Οι μοναδιαίες (ως προς τις τρεις διαφορετικές νόρμες) σφαίρες στο $\mathbb{R}^2$

$$S_1 = \{\mathbf{x} : \|x\|_1 = 1\}, \qquad S_2 = \{\mathbf{x} : \|x\|_2 = 1\}, \qquad S_\infty = \{\mathbf{x} : \|x\|_\infty = 1\}$$




**Σχήμα:** Οι μοναδιαίες σφαίρες $S_1$, $S_2$, $S_\infty$ στο $\mathbb{R}^2$

## Άσκηση (8.5)

Έστω ότι το $\mathbf{a}$ είναι ένα τυχαίο αλλά σταθερό διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$.

- (α') Να δειχθεί ότι $\|\mathbf{a}\|_2 \leq \|\mathbf{a}\|_1$.
- (β') Να δειχθεί ότι $\|\mathbf{a}\|_\infty \leq \|\mathbf{a}\|_p \leq n^{1/p}\|\mathbf{a}\|_\infty$ για $p = 1, 2$.

## Παρατήρηση (8.4)

Για το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$ παρατηρούμε ότι

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\||\cos\theta| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \tag{6}$$

ισοδύναμα

$$|u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n| \leq \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}\sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} \tag{7}$$

(προσπαθήστε να την αποδείξετε). Στην πραγματικότητα η (6) είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz.

### Θεώρημα (8.2 Η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)

*Εάν $X$ είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$, τότε*

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle^2 \leq \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$$

*για όλα τα διανύσματα **u** και **v** του $X$. Ισότητα ισχύει στην ανισότητα αν και μόνο αν τα **u** και **v** είναι γραμμικά εξαρτημένα.*

**Απόδειξη.** Για $t \in \mathbb{R}$ από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \mathbf{u}-t\mathbf{v},\mathbf{u}-t\mathbf{v}\rangle \\ &= \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle - 2t\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + t^2\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle. \end{aligned}$$

Αν $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ η προς απόδειξη ανισότητα ισχύει σαν ισότητα με τα δύο μέλη ίσα με μηδέν. Για $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ και $t=\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle/\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$ από την τλευταία ανισότητα παίρνουμε

$$0 \leq \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle - \frac{\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle^2}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle} \Rightarrow \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle^2 \leq \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle$$

που είναι το ζητούμενο. Ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν $\langle \mathbf{u}-t\mathbf{v},\mathbf{u}-t\mathbf{v}\rangle = 0$, ισοδύναμα, από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου $\mathbf{u}-t\mathbf{v}=\mathbf{0}$, ή $\mathbf{u}=t\mathbf{v}$, δηλαδή τα **u** και **v** είναι γραμμικά εξαρτημένα.

**Θεώρημα (8.3)**

*Σε ένα διανυσματικό χώρο $X$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ η σχέση $\|\mathbf{u}\| = \langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle^{1/2}$, $\mathbf{u}\in X$ ορίζει νόρμα. Τη νόρμα αυτή λέμε* **επαγόμενη νόρμα***.*

Υπό το πρίσμα του τελευταίου αποτελέσματος επαναδιατυπώνουμε

**Θεώρημα (8.4 Η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)**

*Εάν $X$ είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και νόρμα που ορίζεται με τη σχέση $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$, τότε*

$$|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$$

*για όλα τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ του $X$. Ισότητα ισχύει στην ανισότητα αν και μόνο αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.*

**Σημείωση** Στη περίπτωση μιγαδικού διανυσματικού χώρου με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ισχύει και πάλι η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz

$$|\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle|^2 \leq \langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle.$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν της πραγματικής περίπτωσης.

## Άσκηση (8.6)

Κατά την απόδειξη της ανισότητας Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz δείξαμε ότι $\|\mathbf{u}\|^2 - 2t\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + t^2\|\mathbf{v}\|^2 \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Από το συμπέρασμα που εξάγεται για την διακρίνουσα αυτού του τριωνύμου (ποιό;) προκύπτει μια άλλη απόδειξη της ανισότητας (πώς;).

## Άσκηση (8.7)

Αν με $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{C})$ συμβολίσουμε τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a,b]$ οι οποίες παίρνουν μιγαδικές τιμές, δείξτε ότι η σχέση

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο. Συμπεράνατε ότι η σχέση

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\int_a^b f(x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \tag{9}$$

είναι μια νόρμα στο $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{C})$.

# 3. Ορθοκανονικά σύνολα

**Ορισμός (8.4)**

Σε ένα διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\| \cdot \|$ ένα σύνολο διανυσμάτων $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ λέγεται **ορθοκανονικό** (orthonormal) αν

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0, \qquad \text{αν } i \neq j, \qquad \text{και} \qquad \|\mathbf{u}_i\| = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ισοδύναμα $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij}$, όπου $\delta_{ij}$ είναι το δέλτα του Kronecker.

Για παράδειγμα η κανονική βάση $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ του $\mathbb{R}^3$, με

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

όπως εύκολα διαπιστώνεται, είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

Αντίθετα η βάση $\mathscr{B}_1 = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ του $\mathbb{R}^3$, με

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

δεν είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο αφού

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = (1)(1) + (0)(1) + (0)(0) = 1 \neq 0.$$

Μια βάση η οποία είναι ορθοκανονικό σύνολο θα λέγεται **ορθοκανονική βάση**.

**Θεώρημα (8.5)**

*Έστω ότι $X$ είναι ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και έστω ότι $\mathscr{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_n\}$ είναι μία ορθοκανονική βάση για το $X$, τότε*

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_n \rangle \mathbf{w}_n$$

*για κάθε $\mathbf{x} \in X$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\mathbf{x} \in X$ και έστω $\mathbf{x} = x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n$, τότε αν $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_k \rangle &= \langle x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n, \mathbf{w}_k \rangle \\ &= x_1\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_k \rangle + x_2\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_k \rangle + \cdots + x_n\langle \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_k \rangle \\ &= x_k\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_k \rangle \\ &= x_k, \end{aligned}$$

συνέπεια της ορθοκανονικότητας, δηλαδή ο συντελεστής του $\mathbf{w}_k$ στο ανάπτυγμα του $\mathbf{x}$ ως προς τη βάση $\mathscr{B}$ είναι ίσος με $\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_k \rangle$. Επειδή το $k$ είναι τυχαίο έπεται το ζητούμενο. $\square$

**Ορισμός (8.5)**

Εάν $\mathscr{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_n\}$ είναι μία ορθοκανονική βάση για τον διανυσματικό χώρο $X$ με εσωτερικό γινόμενο, η έκφραση

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_n \rangle \mathbf{w}_n$$

λέγεται **ανάπτυγμα Fourier** του $\mathbf{x}$ ως προς τη βάση $\mathscr{B}$. Οι συντελεστές $\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_k \rangle$ των $\mathbf{w}_k$ λέγονται **συντελεστές Fourier** του $\mathbf{x}$ ως προς τη βάση $\mathscr{B}$.

## Παράδειγμα (8.8)

Τα διανύσματα

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

αποτελούν μια βάση για το $\mathbb{R}^2$ (γιατί;). Παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = (1)(1) + (1)(-1) = 0$$

δηλαδή $\mathbf{b}_1 \perp \mathbf{b}_2$. Επειδή $\|\mathbf{b}_1\| = \|\mathbf{b}_2\| = \sqrt{2}$, τα διανύσματα

$$\mathbf{b}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

αποτελούν μια ορθοκανονική βάση για το $\mathbb{R}^2$. Αν $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_1' &= (2)(1/\sqrt{2}) + (-3)(1/\sqrt{2}) = -1/\sqrt{2} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_2' &= (2)(1/\sqrt{2}) + (-3)(-1/\sqrt{2}) = 5/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Έτσι το ανάπτυγμα Fourier του $\mathbf{x}$ ως πρός τη βάση $\{\mathbf{b}_1', \mathbf{b}_2'\}$ είναι

### Παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{b}_1' + \frac{5}{\sqrt{2}}\mathbf{b}_2'.$$

### Παρατήρηση (8.5)

Εάν σε χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ τα διανύσματα $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$, με $\mathbf{u}_k \neq \mathbf{0}$ για $k = 1, 2, \ldots, n$, είναι ανά δύο ορθογώνια, δηλαδή $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ για $i \neq j$, τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι αν

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

για τυχαίο $k$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathbf{0}, \mathbf{u}_k \rangle &= \langle c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_k \rangle \\ &= c_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_k \rangle + c_2\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_k \rangle + \cdots + c_n\langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_k \rangle \\ &= c_k\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle = c_k\|\mathbf{u}_k\|^2 \end{aligned}$$

επομένως $c_k = 0$, αφού $\mathbf{u}_k \neq \mathbf{0}$. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.