

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη 3

Το αντίστροφο μητρώο και μητρώα ειδικής μορφής

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

17 Οκτωβρίου 2022

1. Το αντίστροφο μητρώο

Για τα μητρώα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

υπολογίζουμε

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

κατά συνέπεια το A και το B συμπεριφέρονται ως αντίστροφα στοιχεία αφού το γινόμενό τους είναι ίσο με το μοναδιαίο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.

Ορισμός (3.1)

Έστω ότι το A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο. Αν υπάρχει μητρώο B ώστε

$$AB = BA = I$$

λέμε ότι το A είναι **αντιστρέψιμο** και το B θα λέγεται (το) **αντίστροφο** του A .

Παράδειγμα (3.1)

Για το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

παρατηρούμε ότι για κάθε 3×3 μητρώο

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

είναι

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(γιατί;). Άρα το γινόμενο AB δεν μπορεί να είναι ίσο με το ταυτοτικό μητρώο, κατά συνέπεια το A δεν είναι αντιστρέψιμο.

Θεώρημα (3.1)

Το αντίστροφο μητρώο, αν υπάρχει, είναι μοναδικό.

Απόδειξη. Έστω A ένα αντιστρέψιμο μητρώο και έστω ότι B και C είναι τέτοια ώστε $AB = BA = I$ και $AC = CA = I$. Τα B, C έχουν την ίδια διάσταση, επιπλέον από τις ιδιότητες του γινομένου και του αντιστρόφου έχουμε

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Ορισμός (3.2)

Το αντίστροφο μητρώο του τετραγωνικού μητρώου A , εφόσον αυτό υπάρχει, συμβολίζουμε με A^{-1} .

Έτσι αν το A είναι αντιστρέψιμο

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Άσκηση (3.1)

Αν

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{με } ad - bc \neq 0,$$

τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Θεώρημα (3.2)

Εάν A και B είναι αντιστρέψιμα μητρώα ίδιας διάστασης, τότε το μητρώο AB είναι αντιστρέψιμο και $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I,$$

κατά συνέπεια το μητρώο AB είναι αντιστρέψιμο και από τη μοναδικότητα του αντίστροφου έπεται ότι $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Παρατήρηση (3.1)

Εάν το τετραγωνικό μητρώο A είναι αντιστρέψιμο, το A^2 είναι αντιστρέψιμο

$$(A^2)^{-1} = (AA)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^2$$

και επαγωγικά το A^n είναι αντιστρέψιμο, με $n = 1, 2, 3, \dots$, και $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.
Ορίζουμε λοιπόν

$$A^{-n} = (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Έτσι έχουμε ορίσει τις ακέραιες δυνάμεις του A με τη σχέση

$$A^n = \begin{cases} \underbrace{AA \cdots A}_{n \text{ φορές}} & n = 1, 2, \dots \\ I & n = 0 \\ (A^{-1})^{-n} & n = -1, -2, \dots \end{cases}$$

Επίσης από τη σχέση

Παρατήρηση (συνέχεια)

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I = (A^{-1}A)^T = A^T(A^{-1})^T$$

συμπεραίνουμε ότι αν το A είναι αντιστρέψιμο, τότε και το A^T αντιστρέφεται και $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, από την μοναδικότητα του αντίστροφου. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε

$$A^{-T} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Άσκηση (3.2)

Εάν το A είναι ένα τετραγωνικό, αντιστρέψιμο μητρώο δείξτε ότι

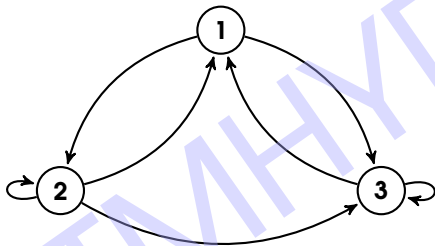
- (α) Το A^{-1} είναι αντιστρέψιμο και $(A^{-1})^{-1} = A$.
- (β) Εάν $\lambda \neq 0$, το λA είναι αντιστρέψιμο και

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

- (γ) Εάν k και l είναι ακέραιοι αριθμοί, τότε

$$A^k A^l = A^{k+l}, \quad \text{και} \quad (A^k)^l = A^{kl}.$$

Εφαρμογή. Στη θεωρία γραφημάτων ένα κατευθυνόμενο γράφημα με n κόμβους μπορεί να παρασταθεί με ένα κατάλληλο $n \times n$ μητρώο $M = (m_{ij})$. Αν $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ είναι κόμβοι και υπάρχει ακμή από το i στο j γράφουμε $m_{ij} = 1$ διαφορετικά $m_{ij} = 0$. Για παράδειγμα το μητρώο που το περιγράφει το σχήμα



είναι το $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Το μητρώο $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

καταμετρά όλα τα μονοπάτια μήκους δύο μεταξύ των κόμβων, γενικότερα το M^k τα μονοπάτια μήκους k , στο γράφημα. Πράγματι ο κόμβος 1 συνδέεται με τον εαυτό του με δύο μονοπάτια μήκους 2, τα 121 και 131. Όμοια ο κόμβος 2 συνδέεται με τον 3 με τρία μονοπάτια, τα 223, 233, και 213.

2. Μητρώα ειδικής μορφής

Ορισμός (3.3)

Έστω $A = (a_{ij})$ ένα τετραγωνικό μητρώο.

- ① Λέγοντας **κύρια διαγώνιο** του A εννοούμε τη “διαγώνιο” του A η οποία αποτελείται από τα στοιχεία a_{ii} .
- ② Το A λέγεται **διαγώνιο** (diagonal) αν $a_{ij} = 0$ για $i \neq j$.
- ③ Το A λέγεται **άνω τριγωνικό** (upper triangular) αν $a_{ij} = 0$ για $i > j$, δηλαδή τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά.
- ④ Το A λέγεται **κάτω τριγωνικό** (lower triangular) αν $a_{ij} = 0$ για $i < j$, δηλαδή τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά.

Άσκηση (3.3)

Δείξτε ότι το γινόμενο διαγωνίων μητρώων είναι επίσης διαγώνιο και στη συνέχεια διατυπώστε ένα κανόνα για τον πολλαπλασιασμό διαγωνίων μητρώων.

Παράδειγμα (3.2)

Δείξτε ότι ο γραμμικός συνδυασμός 3×3 άνω τριγωνικών μητρώων είναι άνω τριγωνικό μητρώο

Αρκεί να δείξουμε ότι για τυχαία 3×3 άνω τριγωνικά μητρώα A και B και πραγματικές ή μιγαδικές σταθερές r και s ο γραμμικός συνδυασμός $rA + sB$ είναι 3×3 μητρώο. Πράγματι

$$\begin{aligned} rA + sB &= r \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & b_6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ 0 & ra_4 + sb_4 & ra_5 + sb_5 \\ 0 & 0 & ra_6 + sb_6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

είναι άνω τριγωνικό μητρώο.

Άσκηση (3.4)

Δείξτε ότι αν

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

και A είναι ένα 3×3 άνω τριγωνικό μητρώο, τότε υπάρχουν σταθερές c_1, c_2, \dots, c_6 ώστε

$$A = c_1 M_1 + c_2 M_2 + \dots + c_6 M_6.$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = aM_1 + bM_2 + cM_3 + pM_4 + qM_5 + tM_6.$$

Παράδειγμα (3.3)

Θεωρούμε τα άνω τριγωνικά μητρώα

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & b_6 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & b_6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 + a_2 b_4 & a_1 b_3 + a_2 b_5 + a_3 b_6 \\ 0 & a_4 b_4 & a_4 b_5 + a_5 b_6 \\ 0 & 0 & a_6 b_6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

δηλαδή το γινόμενο AB είναι επίσης άνω τριγωνικό.

4. Μητρώα μετάθεσης

Ας θεωρήσουμε ένα 3×3 μητρώο το οποίο προκύπτει μεταθέτοντας τις γραμμές του ταυτοτικού μητρώου I . Ένα τέτοιο μητρώο θα το λέμε **μητρώο μετάθεσης**. Στη συνέχεια ας δούμε το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ενός τέτοιου μητρώου με ένα διάνυσμα, για παράδειγμα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Το γινόμενο λοιπόν είναι το διάνυσμα που προκύπτει από το αρχικό αν μεταθέσουμε τις ίδιες γραμμές που μετατέθηκαν στο I για να προκύψει το μητρώο μετάθεσης. Από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού μητρώων το ανάλογο αποτέλεσμα συμβαίνει σε κάθε στήλη ενός $3 \times m$ μητρώου αν πολλαπλασιαστεί από τα αριστερά με το μητρώο μετάθεσης (γιατί;). Ειδικότερα το γινόμενο δύο μητρώων μετάθεσης είναι μητρώο μετάθεσης. Τα 3×3 μητρώα μετάθεσης είναι $3! = 6$, τα

$$M_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ενδεικτικά υπολογίζουμε

$$M_3 M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_4$$

$$M_1 M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$M_4 M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

και παρατηρούμε ότι $M_1^T = M_1$ και $M_4^T = M_3$.

Άσκηση (3.5)

Για τα μητρώα μετάθεσης δείξτε ότι

- 1 $M_k^{-1} = M_k^T$, για $k = 0, 1, \dots, 5$.
- 2 Εφοδιασμένα με την πράξη του πολλαπλασιασμού αποτελούν ομάδα.

Ομάδες

Ορισμός

Έστω \mathcal{G} ένα μη κενό σύνολο στο οποίο έχει ορισθεί μια πράξη $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \ni (x, y) \rightarrow x \cdot y \in \mathcal{G}$. Θα λέμε ότι η δομή (\mathcal{G}, \cdot) είναι **ομάδα** (group) εάν ικανοποιούνται οι νόμοι:

- 1 $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, για κάθε $x, y, z \in \mathcal{G}$. (Προσεταιριστικότητα της πράξης).
- 2 Υπάρχει $e \in \mathcal{G}$, ώστε $e \cdot x = x \cdot e = x$ για κάθε $x \in \mathcal{G}$. (ουδέτερο στοιχείο).
- 3 Για κάθε $x \in \mathcal{G}$, υπάρχει $x^{-1} \in \mathcal{G}$, ώστε $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = e$. (αντίστροφο στοιχείο).

Οι $(\mathbb{Q}, +)$, (\mathbb{Q}^*, \cdot) , $(\mathbb{R}, +)$, (\mathbb{R}^*, \cdot) , όπου “+” και “·” είναι οι συνήθεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμός, αντίστοιχα, είναι ομάδες. Όμοια οι $(\mathbb{C}, +)$ και (\mathbb{C}^*, \cdot) είναι ομάδες. Επίσης η δομή $(\mathbb{R}^n, +)$ είναι ομάδα.

Παράδειγμα (Δ3.4)

Έστω A ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο. Κάθε ένα-προς-ένα απεικόνιση του A επί του A λέγεται **μετάθεση** (permutation) του A . Αν $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, ο τρόπος που συνήθως συμβολίζουμε μια μετάθεση, έστω s , του A είναι

$$s = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ s(a_1) & s(a_2) & \dots & s(a_n) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Το σύνολο των μεταθέσεων του A συμβολίζουμε με S_A .

- Έστω $s_1, s_2 \in S_A$ και ας θεωρήσουμε τη σύνθεση $s_1 \circ s_2$, όπου $(s_1 \circ s_2)(a_i) = s_1(s_2(a_i))$. Επειδή οι s_1 και s_2 είναι ένα-προς-ένα έχουμε

$$s_1(s_2(a_i)) = s_1(s_2(a_j)) \Rightarrow s_2(a_i) = s_2(a_j) \Rightarrow a_i = a_j,$$

δηλαδή η $s_1 \circ s_2$ είναι ένα-προς-ένα. Επίσης $s_1(s_2(A)) = s_1(A) = A$, δηλαδή η $s_1 \circ s_2$ είναι επί του A κατά συνέπεια $s_1 \circ s_2 \in S_A$.

Αν $s_i, s_j \in S_A$ ορίζουμε το γινόμενο, γράφουμε απλά, $s_i s_j$ να είναι η σύνθεση $s_i \circ s_j$. Η (S_A, \cdot) είναι ομάδα.

Παράδειγμα (Δ3.5)

Μια **γραμμική κίνηση** (linear motion) στο \mathbb{R}^2 είναι μια απεικόνιση $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η οποία “μετακινεί” ή μετασχηματίζει το σημείο (x, y) στο σημείο (x', y') ώστε

$$\begin{aligned}x' &= ax + by, \\y' &= cx + dy,\end{aligned}\quad \text{με} \quad ad - bc \neq 0. \quad (3)$$

Η ποσότητα $ad - bc$ λέγεται **ορίζουσα** (determinant) του μετασχηματισμού T και τη γράφουμε ως

$$J_T := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad (4)$$

Η σχέση $J_T \neq 0$ εξασφαλίζει ότι η T είναι ένα-προς-ένα, κατά συνέπεια η αντίστροφη απεικόνιση T^{-1} υπάρχει. Πράγματι, λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$\begin{aligned}x &= \frac{d}{ad - bc}x' + \frac{-b}{ad - bc}y', \\y &= \frac{-c}{ad - bc}x' + \frac{a}{ad - bc}y' .\end{aligned} \quad (5)$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επιπλέον υπολογίζοντας την ορίζουσα του αντίστροφου μετασχηματισμού βρίσκουμε

$$J_{T^{-1}} = \frac{da - bc}{(ad - bc)^2} = \frac{1}{ad - bc} \neq 0,$$

κατά συνέπεια η αντίστροφη απεικόνιση T^{-1} είναι επίσης γραμμική κίνηση. Εάν $T(x, y) = (x', y')$ και $T'(x', y') = (x'', y'')$, όπου η T' δίνεται όπως στην (3) με a', b', c', d' στη θέση των a, b, c, d αντίστοιχα, και με $T'T$ συμβολίσουμε τη σύνθεση $T' \circ T$, τότε

$$\begin{aligned}x'' &= a'x' + b'y' = a'(ax + by) + b'(cx + dy) \\ &= (a'a + b'c)x + (a'b + b'd)y \\ y'' &= c'x' + d'y' = c'(ax + by) + d'(cx + dy) \\ &= (c'a + d'c)x + (c'b + d'd)y\end{aligned}$$

και για την ορίζουσα της σύνθεσης υπολογίζουμε

$$(a'a + b'c)(c'b + d'd) - (a'b + b'd)(c'a + d'c) = (ad - bc)(a'd' - b'c') \neq 0,$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

ισοδύναμα

$$J_{T \circ T'} = J_T J_{T'} \neq 0,$$

κατά συνέπεια η $T'T$ είναι και αυτή μια γραμμική κίνηση. Επιπλέον η ταυτοτική απεικόνιση $I(x, y) = (x, y)$ είναι επίσης γραμμική κίνηση αφού η (3) ικανοποιείται

$$x = 1x + 0y,$$

$$y = 0x + 1y,$$

με $J_I = 1 - 0 \neq 0.$

Δείχνεται εύκολα (και αφήνεται σαν άσκηση) ότι αν T, T', T'' είναι γραμμικές κινήσεις, τότε $(TT')T'' = T(T'T'')$. Επομένως οι κινήσεις αυτές με την πράξη του πολλαπλασιασμού-σύνθεσης αποτελούν ομάδα. Η ομάδα αυτή λέγεται διδιάστατη **γενική γραμμική ομάδα** (general linear group) και συμβολίζεται με $GL(2, \mathbb{R})$.

Είδαμε ότι ο μετασχηματισμός T είναι ένα-προς-ένα, ισοδύναμα αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν $J_T \neq 0$, δηλαδή η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Κάθε τέτοια απεικόνιση μπορεί να εκφραστεί ως το γινόμενο ενός 2×2 μητρώου με διάνυσμα στο \mathbb{R}^2 , συγκεκριμένα

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Είδαμε ότι η σχέση $ad - bc \neq 0$ εξασφαλίζει ότι υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός και δίνεται από τη σχέση

$$T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (7)$$

βλέπε (5), έτσι ώστε αν $\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, τότε $\mathbf{x} = T^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1}\mathbf{y}$ αφού

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(Άσκηση (3.1)). Την ποσότητα $ad - bc$ θα τη λέμε ορίζουσα του μητρώου στην (6).

Παράδειγμα (συνέχεια)

Εάν $T(x, y) = (x', y')$ και $T'(x', y') = (x'', y'')$, όπου η T' δίνεται όπως στην (6) με a', b', c', d' στη θέση των a, b, c, d αντίστοιχα, και με $T'T$ συμβολίσουμε τη σύνθεση $T' \circ T$ δείξαμε ότι

$$T'T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

το οποίο όμως είναι

$$= \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε, ισοδύναμα, τη διδιάστατη γενική γραμμική ομάδα $GL(2, \mathbb{R})$ ως το σύνολο των 2×2 μητρώων με μη μηδενική ορίζουσα (ισοδύναμα των αντιστρέψιμων μητρώων), με πράξη τον πολλαπλασιασμό.

Ορισμός

Έστω \mathcal{F} ένα μη κενό σύνολο στο οποίο έχουν ορισθεί δύο πράξεις, πρόσθεση $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \ni (x, y) \rightarrow x + y \in \mathcal{F}$ και πολλαπλασιασμός, $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \ni (x, y) \rightarrow x \cdot y \in \mathcal{F}$. Η δομή $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ λέγεται **σώμα** (field) εάν ισχύουν οι νόμοι

- F1 $x + y = y + x$, για κάθε $x, y \in \mathcal{F}$.
- F2 $(x + y) + z = x + (y + z)$, για κάθε $x, y, z \in \mathcal{F}$.
- F3 Υπάρχει $0 \in \mathcal{F}$, ώστε $x + 0 = x$, για κάθε $x \in \mathcal{F}$.
- F4 Για κάθε $x \in \mathcal{F}$ υπάρχει $-x \in \mathcal{F}$, ώστε $x + (-x) = 0$.
- F5 $x \cdot y = y \cdot x$, για κάθε $x, y \in \mathcal{F}$.
- F6 $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, για κάθε $x, y, z \in \mathcal{F}$.
- F7 Υπάρχει $1 \in \mathcal{F}$, $1 \neq 0$ ώστε $x \cdot 1 = x$, για κάθε $x \in \mathcal{F}$.
- F8 Για κάθε $x \neq 0$ υπάρχει $x^{-1} \in \mathcal{F}$, ώστε $x \cdot x^{-1} = 1$.
- F9 $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, για κάθε $x, y, z \in \mathcal{F}$.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ και $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ είναι τα τυπικά παραδείγματα της δομής του σώματος.