ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διάλεξη 2

Μητρώα

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

10 Οκτωβρίου 2022

1. Γραμμικά συστήματα και Μητρώα. Το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{aligned} \tag{1}$$

με αγνώστους x, y, z μπορεί να παρασταθεί ως ισότητα διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ ως

$$\begin{pmatrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

ή ισοδύναμα ως απόρροια των πράξεων των διανυσμάτων ως

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

ή σε ακόμη περισσότερο ``κωδικοποιμένη'' μορφή ως

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Το αντικείμενο

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

περιέχει καταχωρημένο σε κατάλληλη θέση τον συντελεστή κάθε αγνώστου κάθε εξίσωσης. Η πρώτη γραμμή περιέχει τους συντελεστές της πρώτης εξίσωσης, ή πρώτη στήλη τους συντελεστές του πρώτου αγνώστου και ούτω καθεξής. Η διάταξη αυτή μπορεί να ιδωθεί ως ένα πολύστηλο διάνυσμα και ονομάζεται **μητρώο**, ή **μήτρα** (matrix), ή και (όπως λανθασμένα έχει επικρατήσει) πίνακας. Επισημαίνουμε ότι ο τρόπος γραφής (4) του αρχικού συστήματος εμπεριέχει την πράξη του πολλαπλασιασμού του μητρώου των συντελεστών του συστήματος με το διάνυσμα των αγνώστων του συστήματος

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Συγκεκριμένα από την ισοδυναμία των (2), (3) και (4) προκύπτει

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Σημειώνουμε ότι το αρχικό σύστημα μπορεί να παρασταθεί με το μητρώο όλων των δεδομένων (data) του συστήματος, το **επαυξημένο** (augmented) μητρώο όπως ονομάζεται,

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

στο οποίο, όπως και στην περίπτωση του μητρώου των συντελεστών, αναγνωρίζουμε τι περιέχει η κάθε γραμμή και η κάθε στήλη. Για παράδειγμα η πρώτη στήλη περιέχει τους συντελεστές του πρώτου αγνώστου με τη σειρά που εμφανίζονται σε κάθε εξίσωση του συστήματος, και ανάλογα η δεύτερη γραμμή περιέχει τα δεδομένα της δεύτερης εξίσωσης με τη σωστή σειρά παράθεσης.

Ορισμός (2.1)

Έστω ότι τα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, όπου γράφουμε

$$\mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Τη διάταξη-παράθεση

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

λέμε **μητρώο** με n γραμμές και m στήλες, ή απλά $n \times m$ μητρώο. Λέμε επίσης ότι το μητρώο A έχει **διάσταση** $n \times m$. Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο γράφουμε $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Ορισμός (2.2)

Το σύνολο των $n \times m$ μητρώων $A = \left(a_{ij}\right)$ με $a_{ij} \in \mathscr{F}$, όπου $\mathscr{F} = \mathbb{R}$, ή $\mathscr{F} = \mathbb{C}$, το σώμα των πραγματικών ή των μιγαδικών αριθμών, συμβολίζουμε με $\mathbb{M}^{n,m}(\mathscr{F})$. Πολλές φορές γράφουμε απλά $\mathbb{M}^{n,m}$ αν δεν χρειάζεται να γίνει ιδιαίτερη αναφορά στο σώμα. Ενίοτε γράφουμε $\mathbb{R}^{n\times m}$ αντί του $\mathbb{M}^{n,m}(\mathbb{R})$ και $\mathbb{C}^{n\times m}$ αντί του $\mathbb{M}^{n,m}(\mathbb{C})$. Ένα $n \times n$ μητρώο λέγεται **τετραγωνικό**.

Παράδειγμα (2.1)

Σύμφωνα με τον ορισμό τα

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$$

είναι μητρώα διαστάσεων 1×3, 2×2, 3×2, 2×3, 3×1, και 1×1 αντίστοιχα.

Ένα $n \times 1$ μητρώο είναι ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$, ή στο $\mathbb{C}^n$. Πολλές φορές όταν δεν δημιουργείται σύγχυση ένα 1×1 μητρώο $\left(a\right)$ μπορούμε να το ταυτίζουμε με τον αριθμό a.

2. Πράξεις μεταξύ μητρώων. Γενικεύοντας τις πράξεις διανυσμάτων πρόσθεση, και πολλαπλασιασμό με σταθερά, για $A = \left(a_{ij}\right)$ και $B = \left(b_{ij}\right)$ $n \times m$ μητρώα και λ μια σταθερά ορίζουμε

$$\begin{aligned}
A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix} \\
\lambda A &= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix} \\
A - B = A + \left(-1\right)B &= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1m} - b_{1m} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2m} - b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \cdots & a_{nm} - b_{nm} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Ορισμός (2.3)

Θα λέμε ότι τα μητρώα A και B είναι ίσα και θα γράφουμε $A = B$, εάν

1. έχουν την ίδια διάσταση, έστω $n \times m$, και
2. αν $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$, τότε $a_{ij} = b_{ij}$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ και για κάθε $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Με O συμβολίζουμε, για κάθε διάσταση, το μητρώο του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με 0. Έτσι αν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο, τότε $A + O = O + A = A$. Εδώ το O έχει διάσταση $n \times m$. Το O ονομάζουμε **μηδενικό μητρώο** ή απλά μηδέν.

Εάν $A = (a_{ij})$ είναι ένα $n \times m$ μητρώο γράφουμε

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \end{pmatrix}, \quad \text{όπου} \quad \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Πολλαπλασιασμός μητρώων. Εάν $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathbb{M}^{n,m}(\mathbb{R})$, και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, όπως στην (5), ορίζουμε το γινόμενο $A\mathbf{b}$ με τη σχέση

$$A\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1m}b_m \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2m}b_m \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \cdots + a_{nm}b_m \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Είναι εποικοδομητικό να θυμόμαστε ότι

$$A\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} b_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} b_m. \quad (9)$$

Γενικεύοντας το πολλαπλασιασμό, αν $A = \left(a_{ij}\right)$ είναι ένα $n \times m$ μητρώο και $B = \left(b_{ij}\right)$ είναι ένα $m \times k$ μητρώο γράφοντας $B = \left(\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_k\right)$ ορίζουμε το **γινόμενο** AB με τη σχέση

$$AB = \left(A\mathbf{b}_1 \ A\mathbf{b}_2 \ \cdots \ A\mathbf{b}_k\right). \quad (10)$$

Έτσι το γινόμενο AB είναι το $n \times k$ μητρώο $C = AB$ με

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_k \end{pmatrix}, \qquad \text{όπου} \qquad \mathbf{c}_j = A\mathbf{b}_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, k \tag{11}$$

ειδικότερα αν $C = \begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix}$, τότε μέσω της (9) προκύπτει ότι

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}. \tag{12}$$

Σημείωση. Από τις (8) και (10) συνάγονται τα παρακάτω συμπεράσματα:

1. Το γινόμενο ενός $n \times m$ μητρώου με διάνυσμα του $\mathbb{R}^k$ ορίζεται μόνο αν $k = m$.
2. Το γινόμενο ενός $n \times m$ μητρώου με ένα $m \times k$ μητρώο είναι ένα $n \times k$ μητρώο, σχηματικά
$$(n \times m) \cdot (m \times k) \to n \times k$$
3. Εάν τα A και B είναι μητρώα συμβατών, όσον αφορά στον πολλαπλασιασμό μητρώων, διαστάσεων, και $C = AB$, τότε το στοιχείο c_{ij} είναι το γινόμενο του μητρώου ``$i$-γραμμή του $A$'' με το μητρώο ``j-στήλη του B'', βλέπε (12).

Παράδειγμα (2.2)

Να υπολογισθούν τα a και b στο γινόμενο που ακολουθεί

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & a & \square \\ \square & b & \square & \square \end{pmatrix}.$$

Σημειώνουμε ότι το γινόμενο ορίζεται και είναι ένα 2×4 μητρώο.

Το a βρίσκεται στην πρώτη γραμμή και στην τρίτη στήλη του γινομένου, άρα

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (1)(0) + (2)(1) + (-2)(-2) = 6.$$

Το b είναι στην δεύτερη γραμμή και στην δεύτερη στήλη του γινομένου, άρα

$$b = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = (2)(-1) + (3)(-3) + (0)(5) = -11.$$

Παρατήρηση (2.1)

Παρατηρείστε ότι αν

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad P = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{pmatrix},$$

τότε

$$AP = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1p_1 + b_1p_2 + c_1p_3 & a_1q_1 + b_1q_2 + c_1q_3 \\ a_2p_1 + b_2p_2 + c_2p_3 & a_2q_1 + b_2q_2 + c_2q_3 \end{pmatrix}$$

ενώ

$$PA = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1a_1 + q_1a_2 & p_1b_1 + q_1b_2 & p_1c_1 + q_1c_2 \\ p_2a_1 + q_2a_2 & p_2b_1 + q_2b_2 & p_2c_1 + q_2c_2 \\ p_3a_1 + q_3a_2 & p_3b_1 + q_3b_2 & p_3c_1 + q_3c_2 \end{pmatrix}$$

κατά συνέπεια $AP \neq PA$ αφού δεν έχουν την ίδια διάσταση.

Παράδειγμα (2.3)

Αν

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

τότε

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},$$

οπότε $AB \neq BA$.

Παρατήρηση (2.2)

Εάν το A είναι ένα $n \times m$ μητρώο, τότε γράφοντας, κατ' εξαίρεση, $O_{p \times q}$ το μηδενικό μητρώο διάστασης $p \times q$, έχουμε

1. $O_{k \times n} A = O_{k \times m}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
2. $A O_{m \times l} = O_{n \times l}$, για κάθε $l \in \mathbb{N}$.

Παρατήρηση (2.3)

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

δηλαδή το τετραγωνικό $n \times n$ μητρώο $I = \left(i_{ij}\right)$ με $i_{ii} = 1$, και $i_{ij} = 0$ για $i \neq j$, για κατάλληλο n, συμπεριφέρεται όπως το 1 στον πολλαπλασιασμό.

Ορισμός (2.4)

Το τετραγωνικό $n \times n$ μητρώο $I = \left(\delta_{ij}\right)$, όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker, ($\delta_{ii} = 1$ και $\delta_{ij} = 0$, εάν $i \neq j$) θα το λέμε **ταυτοτικό μητρώο** (identity matrix) και θα το συμβολίζουμε με I ή με I_n αν χρειάζεται να δηλωθεί η διάσταση.

Εάν το A είναι τετραγωνικό μητρώο ορίζουμε για $n=0,1,2,\ldots$ τις **δυνάμεις** του A

$$A^0 = I, \qquad A^1 = A, \qquad A^2 = AA, \qquad A^{n+1} = AA^n.$$

Έτσι αν το A είναι τετραγωνικό μητρώο και m και n είναι μη αρνητικοί ακέραιοι, τότε

$$A^m A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{m \text{ φορές}}\underbrace{AA\cdots A}_{n \text{ φορές}} = A^{m+n}$$

$$(A^m)^n = \underbrace{A^m A^m \cdots A^m}_{n \text{ φορές}} = A^{mn}.$$

Πολυώνυμα μητρώων. Αν A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο και m και n είναι μη αρνητικοί ακέραιοι ορίζεται το μητρώο-γραμμικός συνδυασμός

$$\lambda A^m + \mu A^n$$

με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, είναι τετραγωνικό μητρώο. Έτσι αν p είναι ένα πολυώνυμο, για παράδειγμα αν $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$, ορίζεται το μητρώο $p(A)$ με τη σχέση

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n.$$

Παράδειγμα (2.4)

Έστω A ένα τετραγωνικό μητρώο, και $p(t) = 1 + t^2$. Εάν το A είναι ``ρίζα'' του p, δηλαδή $p(A) = O$, να υπολογισθούν οι θετικές δυνάμεις του μητρώου A.

Από τη σχέση $p(A) = O$ βρίσκουμε

$$I + A^2 = O \Rightarrow A^2 = -I,$$

έτσι από τις ιδιότητες των δυνάμεων μητρώου για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ υπολογίζουμε

$$A^{2n} = (A^2)^n = (-I)^n = (-1)^n I$$
$$A^{2n+1} = A^{2n}A = (-1)^n IA = (-1)^n A.$$

´Ασκηση (2.2)

Να βρεθούν όλα τα 2×2 μητρώα που ικανοποιούν την εξίσωση $I + A^2 = O$, όπου O είναι τη μηδενικό μητρώο.

Πρόταση (2.1)

Εάν τα μητρώα A, B, C έχουν διατάσεις ώστε η κάθε μια από τις πράξεις να μπορεί να εκτελεστεί, και λ, μ είναι σταθερές, τότε ισχύουν οι νόμοι

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A(BC) = (AB)C$
4. $A(B + C) = AB + AC$
5. $(A + B)C = AC + BC$
6. $\lambda A = A\lambda$
7. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
8. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
9. $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$

3. Το ανάστροφο μητρώο

Ορισμός (2.5)

Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο ορίζουμε το **ανάστροφο** μητρώο του A, το οποίο συμβολίζουμε με A^{T}, να είναι το $m \times n$ μητρώο του οποίου οι στήλες είναι οι γραμμές του A με την ίδια διάταξη, δηλαδή η πρώτη στήλη του A^{T} είναι η πρώτη γραμμή του A, η δεύτερη στήλη του A^{T} είναι η δεύτερη γραμμή του A και ούτω καθεξής.

Παράδειγμα (2.5)

Εάν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

από τον ορισμό του ανάστροφου μητρώου βρίσκουμε

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad C^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι αφενός $C = B^{\mathrm{T}}$ και $C^{\mathrm{T}} = B$ και αφετέρου ότι $\left(C^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} = C$. Επιπλέον

$$C^{\mathrm{T}} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 + 0 + 4 = 5$$

ως 1×1 μητρώο, ενώ

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$CC^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot 0 & 1\cdot(-2) \\ 0\cdot 1 & 0\cdot 0 & 0\cdot(-2) \\ (-2)\cdot 1 & (-2)\cdot 0 & (-2)\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Θεώρημα (2.1)

Εάν A και B είναι μητρώα καταλλήλων διαστάσεων ώστε οι σχετικές πράξεις να μπορούν να εκτελεστούν, τότε

1. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$.
2. $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$.
3. $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$, *για κάθε σταθερά* λ.
4. $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$.

Παρατηρούμε ότι

$$(A^2)^{\mathrm{T}} = (AA)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^2$$

κατά συνέπεια για $n = 0, 1, 2, \ldots$ είναι $(A^n)^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^n$ (γιατί;).

Παρατήρηση (2.4)

Ένα $n \times 1$ πραγματικό μητρώο A είναι ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ και

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \Rightarrow A = (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

όπως γράψαμε ένα διάνυσμα-γραμμή στο $\mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \tag{13}$$

το οποίο είναι αριθμός ως 1×1 μητρώο ή διάνυσμα. Αν $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, κατανοώντας την πράξη $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ ως γινόμενο μητρώων θα γράφουμε

Παρατήρηση (συνέχεια)

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Θυμίζει κάτι αυτό το αποτέλεσμα; Έτσι αν $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}}.$$

Αν M είναι ένα τυπικό μητρώο ας συμβολίσουμε με M_{i*} την i γραμμή του M, ως διάνυσμα-στήλη και με M_{*j} την j στήλη του M ως διάνυσμα. Αν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο και B ένα $m \times k$ μητρώο, τότε το γινόμενο AB μπορεί να γραφεί ως

$$AB = \begin{pmatrix} A_{1*}^{\mathrm{T}} B_{*1} & A_{1*}^{\mathrm{T}} B_{*2} & \dots & A_{1*}^{\mathrm{T}} B_{*k} \\ A_{2*}^{\mathrm{T}} B_{*1} & A_{2*}^{\mathrm{T}} B_{*2} & \dots & A_{2*}^{\mathrm{T}} B_{*k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n*}^{\mathrm{T}} B_{*1} & A_{n*}^{\mathrm{T}} B_{*2} & \dots & A_{n*}^{\mathrm{T}} B_{*k} \end{pmatrix} = \left(A_{i*}^{\mathrm{T}} B_{*j}\right). \tag{14}$$

Ορισμός (2.6)

Ένα τετραγωνικό μητρώο A για το οποίο ισχύει $A^{\mathrm{T}} = A$ λέγεται **συμμετρικό**.

Ας θεωρήσουμε ένα $n \times n$ μητρώο $A = \left(a_{ij}\right)$, τότε $A^{\mathrm{T}} = \left(a'_{ij} =\right)$ με $a'_{ij} = a_{ji}$ (η i-γραμμή του A^{T} είναι η i-στήλη του A και η j-στήλη του A^{T} είναι η j-γραμμή του A). Έτσι αν το A είναι συμμετρικό, τότε

$$a_{ij} = a'_{ij} = a_{ji}$$

για όλα τα i, j, συνεπώς ένα τέτοιο μητρώο είναι συμμετρικό ως προς την κύρια διαγώνιό του, γεγονός που δικαιολογεί τον χαρακτηρισμό συμμετρικό. Για παράδειγμα το

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

είναι συμμετρικό.

Άσκηση (2.4)

Εάν το A είναι ένα $n \times m$ μητρώο δείξτε ότι το καθένα από τα μητρώα $A^{\mathrm{T}}A$ και AA^{T} ορίζεται και είναι συμμετρικό.