ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Ε. Γαλλόπουλος & Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

2023 – 2024

1. Διανυσματικοί χώροι

Άσκηση 1

Αν ο X είναι διανυσματικός χώρος επί του σώματος $\mathbb{F}$, και V και W είναι υπόχωροι του X, ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές; Θυμίζουμε ότι

$$V \subseteq X \text{ είναι υπόχωρος } \Leftrightarrow \text{ για } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \text{ και } \lambda, \mu \in \mathbb{F} \ \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in V.$$

$$V + W = \{\mathbf{v} + \mathbf{w} : \mathbf{v} \in V \text{ και } \mathbf{w} \in W\}.$$

1. $\{\lambda\mathbf{x} : \mathbf{x} \in V \text{ και } \lambda \in \mathbb{F}\} = V$
2. $\{\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} : \mathbf{x} \in V, \mathbf{y} \in V \text{ και } \lambda \in \mathbb{F}, \mu \in \mathbb{F}\} = V + V = V.$
3. $V + W$ είναι υπόχωρος του X.
4. $V \cap W$ είναι υπόχωρος του X.
5. $V \cup W$ είναι υπόχωρος του X.

Αντιπαράδειγμα για το 5. $X = \mathbb{R}^3$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} : x, z \in \mathbb{R} \right\}$.

΄Ασκηση 2

Ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$;

1. $U = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = x_2 \right\}.$
2. $U = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : 2x_1 - x_2 = 1 \right\}.$
3. $U = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\}.$
4. $U = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = 1 \right\}.$
5. $U = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 = 0 \right\}.$
6. $U = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 x_2 = 1 \right\}.$

΄Ασκηση 3

Να περιγραφούν όλοι οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$.

Λύση.

1. Υπόχωροι διάστασης 0: $\{\mathbf{0}\}$.
2. Υπόχωροι διάστασης 1: ΄Ολες οι ευθείες που περνούν από την αρχή των αξόνων, δηλαδή με εξίσωση $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{u}$, $t \in \mathbb{R}$, με $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, ισοδύναμα
$$L = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right\} \quad \text{με } a \neq 0, \text{ ή } b \neq 0, \text{ ή } c \neq 0.$$
3. Υπόχωροι διάστασης 2: ΄Ολα τα επίπεδα που περιέχουν την αρχή των αξόνων, δηλαδή με εξίσωση $ax + by + cz = 0$, ισοδύναμα (αν $c \neq 0$)
$$W = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}\right\}.$$
4. Υπόχωροι διάστασης 3. $\mathbb{R}^3$.

2. Γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, βάση

Άσκηση 4

Να βρεθεί μια βάση για το επίπεδο-υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ με εξίσωση $3x-2y-z=0$.

Άσκηση 5

Σωστό ή Λάθος; Εάν $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου τότε

1. Τα $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Σ Λ
2. Τα $\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Σ Λ
3. Τα $\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_3-\mathbf{u}_1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Σ Λ

Άσκηση 6

Εάν $\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_n\}$ είναι ένα **ορθοκανονικό σύνολο** σε διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$, δείξτε ότι το σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

3. Επίλυση συστημάτων, Μητρώα

Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο (n γραμμές, m στήλες), γράφουμε

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Ορίζουμε

1. **Εικόνα** του A : $\operatorname{range} A = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = A\mathbf{x}$ για κάποιο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}$.
2. **Μηδενόχωρος** του A : $\operatorname{null} A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.
3. **Χώρος στηλών** του A : $C(A) = \operatorname{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$.
4. **Χώρος γραμμών** του A : $R(A) = C(A^{\mathrm{T}}) \subseteq \mathbb{R}^m$.

Αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{a}_m x_m = \mathbf{b}.$$

Συμπέρασμα

Θεώρημα 1

Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση αν και μόνο αν $\mathbf{b} \in \operatorname{range} A = C(A)$.

Άσκηση 7

Σωστό ή Λάθος; Εάν $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{pmatrix}$ το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$ έχει λύση.

Άσκηση 8 (Τάξη μητρώου)

Εάν $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ τί εννοούμε λέγοντας $\operatorname{rank} A$;

1. $\dim(\operatorname{null} A)$.
2. $\dim(\operatorname{range} A)$.
3. $\min\{n, m\}$.

Άσκηση 9

Σωστό ή Λάθος; Το παρακάτω σύστημα έχει λύση για κάθε ξ αν και μόνο αν η τάξη του μητρώου είναι ίση με 3. Σ Λ

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 10

Έστω

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Εάν $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ και $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{b} \rangle = 0$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, m$, δείξτε ότι το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ δεν έχει λύση.

Άσκηση 11

Σωστό ή Λάθος; Έστω A ένα τετραγωνικό μητρώο. Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

1. Έχει μοναδική λύση. Σ Λ
2. Έχει ή δεν έχει λύση ανάλογα τα A, $\mathbf{b}$. Σ Λ
3. Έχει λύση αλλά όχι μοναδική. Σ Λ
4. Έχει λύση μόνο για $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Σ Λ
5. Έχει λύση για όλα τα $\mathbf{b}$. Σ Λ
6. Έχει λύση μόνο για μερικά $\mathbf{b}$. Σ Λ

Θεώρημα 2 (Θεμελιώδες Θεώρημα)

Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο τάξης r, τότε

1. $\dim(\operatorname{null} A) = m - r$.
2. $\dim(\operatorname{null} A^{\mathrm{T}}) = n - r$.
3. $\mathbb{R}^m = \operatorname{null} A \oplus \operatorname{range} A^{\mathrm{T}}$ *επιπλέον* $(\operatorname{null} A)^{\perp} = \operatorname{range} A^{\mathrm{T}}$.
4. $\mathbb{R}^n = \operatorname{null} A^{\mathrm{T}} \oplus \operatorname{range} A$ *επιπλέον* $(\operatorname{range} A)^{\perp} = \operatorname{null} A^{\mathrm{T}}$.

Άσκηση 12

Σωστό ή Λάθος; Έστω A ένα $n \times n$ μητρώο. Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν

1. $\dim(\operatorname{null} A) = 0$. Σ Λ
2. $\dim(\operatorname{null} A) = n$. Σ Λ
3. $\operatorname{rank} A = n$. Σ Λ
4. $\det A = 0$. Σ Λ

Τί μπορεί να ειπωθεί αν $\det A = 0$;

΄Ασκηση 13

Αν για το μητρώο A το R είναι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Να βρεθεί μια βάση για τον χώρο στηλών $\operatorname{range} A$ του A.
2. Να βρεθεί μια βάση για τον μηδενόχωρο $\operatorname{null} A$ του A.
3. Να βρεθεί μια βάση για τον χώρο γραμμών $\operatorname{range} A^{\mathrm{T}}$ του A.
4. Ποιά είναι η διάσταση του αριστερού μηδενόχωρου $\operatorname{null} A^{\mathrm{T}}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
5. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

΄Ασκηση 14

Δίνεται το μητρώο A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Δίχως να εκτελέσετε τη διαδικασία της απαλοιφής επιλέξτε ποιο από τα παρακάτω μητρώα είναι η ανηγμένη κλιμακωτή του A.

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

΄Ασκηση 15

Είναι το μητρώο A σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Ορίζουσες

Άσκηση 16

Εάν $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 2$, τότε υπολογίστε

1. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$

2. $\begin{vmatrix} 2a_1 & a_2 & 2a_3 \\ 2b_1 & b_2 & 2b_3 \\ 2c_1 & c_2 & 2c_3 \end{vmatrix} =$

3. $\begin{vmatrix} -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{vmatrix} =$

4. $\begin{vmatrix} a_1 & 3a_3 & a_2 \\ 2b_1 & 6b_3 & 2b_2 \\ c_1 & 3c_3 & c_2 \end{vmatrix} =$

5. $\begin{vmatrix} 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 \\ 2c_1+b_1 & 2c_2+b_2 & 2c_3+b_3 \\ b_1-3c_1 & b_2-3c_2 & b_3-3c_3 \end{vmatrix} =$

6. $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ 2b_1 & 2b_1 & 2b_1 \\ c_1 & c_1 & c_1 \end{vmatrix} =$

Άσκηση 17

Σωστό ή Λάθος; Εάν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. $\det(\lambda A) = \lambda \det A$. Σ Λ
2. $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. Σ Λ
3. $\det(A+B) = \det A + \det B$. Σ Λ

Άσκηση 18

Σωστό ή Λάθος; Εάν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. $\operatorname{rank} A < n \Leftrightarrow \det A = 0$. Σ Λ
2. $\operatorname{rank} A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$. Σ Λ
3. Αν $\operatorname{rank} A < n$, το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μη μηδενικές λύσεις. Σ Λ

Άσκηση 19

$$\det \begin{pmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

Θεώρημα 3 (Ορθογώνια μητρώα)

Εάν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

1. *Το A είναι ορθογώνιο μητρώο.*
2. *Οι στήλες του A αποτελούν ορθοκανονικό σύνολο.*
3. $A^{\mathrm{T}}A = I$.
4. *Το A αντιστρέφεται και $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$.*
5. $AA^{\mathrm{T}} = I$.
6. *Οι γραμμές του A αποτελούν ορθοκανονικό σύνολο.*

΄Ασκηση 20

Εάν το A είναι ορθογώνιο, τότε $\det A = \pm 1$.

΄Ασκηση 21

Ποιο από τα παρακάτω μητρώα είναι ορθογώνιο;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

΄Ασκηση 22

Δίνεται το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p_A(\lambda)$.
2. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A.
3. Να βρεθούν οι ιδιόχωροι του A.
4. Εξετάστε αν για κάποιες σταθερές λ και μ ισχύει $A^2 = \lambda A + \mu I$.
5. Εξετάστε αν το A είναι διαγωνοποιήσιμο.

Υπόδειξη στο 5. Αν λ_1, λ_2 είναι οι ιδιοτιμές του A με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$, τότε

$$A(\boldsymbol{\xi}_1\ \boldsymbol{\xi}_2) = (\boldsymbol{\xi}_1\ \boldsymbol{\xi}_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

´Ασκηση 23

Εάν A είναι ένα $n \times m$ μητρώο, $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ και

$$A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0},$$

πότε το $\boldsymbol{\xi}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A;

´Ασκηση 24

Ένα 3×3 μητρώο A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ και $\lambda_3 = 2$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Είναι το μητρώο A αντιστρέψιμο; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
2. Είναι το μητρώο A διαγωνοποιήσιμο; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
3. Να βρεθεί το μητρώο A.

Άσκηση 25

Σωστό ή Λάθος; Ο μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με

1. $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικός.
2. $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικός.
3. $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 x_3 + 1 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικός.

Άσκηση 26

Σωστό ή Λάθος; Ο πυρήνας ενός γραμμικού μετασχηματισμού $T : V \to W$ kernel(T) είναι το σύνολο

1. $\{\mathbf{w} \in W : T(\mathbf{0}) = w\}$. Σ Λ
2. $\{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$. Σ Λ
3. $\{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$. Σ Λ

´Ασκηση 27

Να βρεθεί το μητρώο που παριστάνει τον γραμμικό μετασχηματισμό

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 \\ x_1 + x_3 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

´Ασκηση 28

´Ασκηση 24. Αν

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -9 & 9 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

να βρεθούν τα

1. image(T).
2. kernel(T).

7. Προβολές

΄Ασκηση 29

Σωστό ή Λάθος; Έστω P το μητρώο ορθογώνιας προβολής επί του επιπέδου Π με εξίσωση $x+2y+3z=0$ στον $\mathbb{R}^3$.

1. $P^{\mathrm{T}} = P$. Σ Λ
2. $P^2 = P$. Σ Λ
3. $\det P = \pm 1$. Σ Λ
4. Το P είναι ορθογώνιο. Σ Λ
5. $\operatorname{rank} P = 2$. Σ Λ
6. Το σύστημα $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$, όπου $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ έχει λύση. Σ Λ
7. $\operatorname{null} P = \Pi^{\perp}$. Σ Λ

΄Ασκηση 30

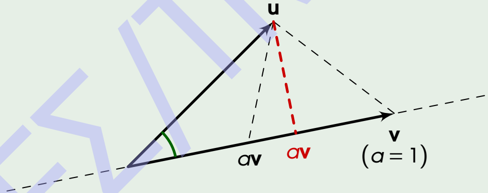
Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ να είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^3$ επί του επιπέδου W με εξίσωση $x+y+z=0$. Να βρεθεί ο τύπος του T.

8. Ελάχιστα τετράγωνα

Άσκηση 31

Αν **u** και **v** είναι μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbb{R}^3$, όπως στο σχήμα, να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός a για τον οποίο η απόσταση μεταξύ **u** και a**v** είναι η ελάχιστη δυνατή, ισοδύναμα να βρεθεί το

$$\min_{a \in \mathbb{R}} \|\mathbf{u} - a\mathbf{v}\|.$$



9. All things concidered

1. Αν W είναι το σύνολο των συναρτήσεων $f \in \mathscr{C}[0,1]$ με την ιδιότητα

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

είναι το W διανυσματικός υπόχωρος του $\mathscr{C}[0,1]$;

2. Στο χώρο των πραγματικών 3×3 μητρώων ποιο από τα παρακάτω υποσύνολα αποτελεί υπόχωρο του $\mathbb{R}^{3\times 3}$;
   1. $M_1 = \{A : \operatorname{trace} A = 0\}$.
   2. $M_2 = \{A : \det A = 0\}$.

3. Εάν A είναι ένα $m \times n$ μητρώο για ποια διανύσματα $\mathbf{b}$ οι λύσεις του συστήματος

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

αποτελούν διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^{;}$;

4. Εάν το A είναι 4×4 μητρώο τι μπορεί να ειπωθεί αν $\operatorname{rank} A < 4$;

5. Εάν $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^{\mathrm{T}}$, είναι το A είναι τετραγωνικό;

6. Εάν το A είναι 3×3 μητρώο τι μπορεί να ειπωθεί αν

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{0}?$$

7. Εάν το $A = \begin{pmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3\end{pmatrix}$ είναι ένα 3×3 ορθογώνιο μητρώο, τότε

$$A^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_1 =$$

8. Εάν $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ και $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ είναι δύο βάσεις του $\mathbb{R}^3$ και $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός με $T(\mathbf{u}_j) = \mathbf{v}_j$, για $j = 1, 2, 3$ ποιο είναι το μητρώο αναπαράστασης του T ως προς τις δύο βάσεις;
9. Για ποιές τιμές της παραμέτρου a είναι το μητρώο

$$A(a) = \begin{pmatrix}2 & a & a\\a & a & a\\8 & 7 & a\end{pmatrix}$$

μη αντιστρέψιμο;

10. Δίνεται το μητρώο

$$A(b) = \begin{pmatrix} 3-b & 2 & b^2 \\ 0 & b+2 & b-2 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

   1. Για ποιες τιμές της παραμέτρου b το $A(b)$ είναι μη αντιστρέψιμο.
   2. Να βρεθούν τιμές του b ώστε το 0 να είναι ιδιτιμή του A.

11. Εάν τα A, B, C είναι $n \times n$ μητρώα και

$$(A-B)C = I$$

να εκφραστεί το B μέσω των A και C.

12. Στο $\mathbb{R}^3$ ποιο είναι το μητρώο προβολής επί του xy-επιπέδου;

13. Έστω X ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$. Δείξτε ότι

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\left(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\right)$$

για όλα τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ στο X.

14. Δίνεται το επιπέδο E με εξίσωση $x+y+z=1$.
    1. Είναι το E διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$;
    2. Ποιο είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του E;
15. Εάν $A=\left(a_{ij}\right)$ είναι $n\times n$, $n>1$, και $a_{ij}=ij$, δείξτε ότι $\det A=0$.
16. Εάν $A=\left(a_{ij}\right)$ είναι $n\times n$, $n>1$, και $a_{ij}=i+j$, δείξτε ότι $\det A=0$.
17. Εάν $A=\left(a_{ij}\right)$ είναι $n\times n$, $n>1$, και το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής είναι ίσο με μηδέν, δείξτε ότι $\det A=0$.
18. Εάν το μητρώο A είναι διαγωνοποιήσιμο, είναι το A^{-1} διαγωνοποιήσιμο;
19. Εάν το μητρώο A είναι διαγωνοποιήσιμο, είναι το A^{T} διαγωνοποιήσιμο;
20. Εάν κάθε ιδιοτιμή ενός μητρώου A έχει αλγεβρική πολλαπλότητα ένα είναι το A διαγωνοποιήσιμο;