Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΓΕΣ 19 Σεπτεμβρίου 2024

Συμπληρώστε τα στοιχεία σας στα σχετικά πεδία.		
ΕΠΩΝΥΜΟ :	ΟΝΟΜΑ :	
ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ :	ΕΤΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ : 20....	
ΑΙΘΟΥΣΑ :	ΣΤΗΛΗ :	ΜΟΝΑΔΕΣ:

Οδηγίες/Επεξηγήσεις

Στο διαγώνισμα υπάρχουν ερωτήσεις

- με την ένδειξη ■ στις οποίες πρέπει απλά να κυκλώσετε, ή να δώσετε, ίσως με μια σύντομη αιτιολόγηση, την τελική απάντηση ή λύση, μετά από σχετική προεργασία.
- δίχως κάποια ένδειξη στις οποίες καλείσθε να δώσετε μια πλήρη αλλά "οικονομική απόδειξη-λύση" για το ζητούμενο στο χώρο που παρέχεται.

τα οποία απαρτίζουν 7 Θέματα. Σε όλες τις περιπτώσεις συστήνεται και σε κάποιες επιβάλλεται να "δουλέψετε" κάθε ερώτημα ή υποερώτημα στο πρόχειρο ώστε η απάντησή σας να μην είναι τυχαία.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 15 λεπτά. Η παράδοση των γραπτών αρχίζει μία ώρα μετά από την έναρξη της εξέτασης. Μαζί με το γραπτό παραδίδετε υπογεγραμμένο και το φύλλο Α4.

Καλή Επιτυχία!

Λύσεις και Σχόλια

Θ1. Δίνεται το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix},$$

όπου α, β, γ, δ είναι πραγματικοί αριθμοί, και έστω $q = \alpha\beta\gamma\delta$.

Τι πληροφορία έχουμε. Το μητρώο είναι άνω τριγωνικό και το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου είναι ίσο με q.

(α΄) ■ Αν $q = 3$, τότε $\operatorname{rank} A = 4$.

Το γεγονός ότι κανένα στοιχείο της διαγωνίου δεν είναι μηδέν, αφού $q = 3$, συνεπάγεται ότι καμία στήλη δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων (γιατί;), επομένως οι 4 στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

(β΄) ■ Αν $q = 3$, τότε $\det A = 3$.

Το μητρώο είναι άνω τριγωνικό κατά συνέπεια $\det A = \alpha\beta\gamma\delta$ (αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη), ισοδύναμα $\det A = q = 3$.

(γ΄) ■ Να βρεθούν οι ιδιοτιμές λ_j του A

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\det(\lambda I - A) = 0$, ισοδύναμα $(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)(\lambda - \delta) = 0$ (τριγωνικό μητρώο), άρα οι 4 ιδιοτιμές του A είναι τα στοιχεία της διαγωνίου του A.

(δ΄) Αν $\alpha = \beta = \delta = 1$ και $\gamma = 0$

i. Να βρεθεί μια βάση για το χώρο στηλών του A και

ii. Να βρεθεί μια βάση για το χώρο γραμμών του A.

Το A γίνεται

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

όπου R είναι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A. **ΠΡΟΣΟΧΗ:** Τα δύο μητρώα **δεν** είναι ίσα, όπως πολλοί/πολλές γράφετε απερίσκεπτα, γράφοντας το σύμβολο ¨=¨ μεταξύ τους, εκνευρίζοντας αφάνταστα όποιον/όποια βλέπει το γραπτό. Τα μητρώα είναι γραμμοϊσοδύναμα. Αν είστε στην Αθήνα και με το λεωφορείο (Gauss-Jordan) έρχεστε στην Πάτρα, δεν σημαίνει ότι αφού τη μια στιγμή είστε εκεί και την άλλη εδώ η Αθήνα και η Πάτρα είναι το ίδιο, απλά συνδέονται μεταξύ τους και μάλιστα με μοναδικό τρόπο αν ακολουθήσετε συγκεκριμένη οδική αρτηρία και καλύψετε συγκεκριμένο αριθμό χιλιομέτρων. Καταλαβαρδίγκος; Οι οδηγοί στο R, για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων, είναι τρεις, άρα $\operatorname{rank} R = \operatorname{rank} A = 3$, κατά συνέπεια ο χώρος στηλών και ο χώρος γραμμών του A είναι τριδιάστατοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$. Επιπλέον οι οδηγοί βρίσκονται στην 1η, 2η και 4η στήλη και στην 1η, 2η και τρίτη γραμμή του R, έτσι

i. Μια βάση για το χώρο στηλών του A αποτελείται από την 1η, 2η και 4η στήλη του A, οπότε

$$\mathcal{B}_C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ii. Μια βάση για το χώρο γραμμών του A αποτελείται από την 1η, 2η και 3η γραμμή του A, οπότε

$$\mathcal{B}_R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Υπάρχουν άρειρες το πλήθος βάσεις τόσο του χώρου στηλών του A όσο και του χώρου γραμμών του A και η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή μας δίνει ένα τέτοιο ζευγάρι. Πάντως κάθε βάση αποτελείται από ΤΡΙΑ διανύσματα.

(ε΄) ■ Για ποια/ποιες τιμή/τιμές του q είναι $\dim(\operatorname{null} A) \geq 1$; $\quad q = 0.$

$\mathbf{x} \in \operatorname{null} A$ αν και μόνο αν $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ και για να περιέχει ο $\operatorname{null} A$ διάνυσμα άλλο πέραν του $\mathbf{0}$ πρέπει το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ να έχει μη μηδενικές λύσεις και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν το A είναι μη αντιστρέψιμο, ισοδύναμα $\det A = 0$, ισοδύναμα $q = 0$.

Θ2. Αν

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$$

τότε

(α΄) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda d + a & \lambda e + b & \lambda f + c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3\lambda.$

Από τις ιδιότητες της ορίζουσας υπολογίζουμε

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda d + a & \lambda e + b & \lambda f + c \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 0 = 3\lambda$$

(β΄) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ \lambda d + a & \lambda e + b & \lambda f + c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -3.$

Από τις ιδιότητες της ορίζουσας υπολογίζουμε

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ \lambda d + a & \lambda e + b & \lambda f + c \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0 - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -3$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Όποιος/όποια δεν απάντησε σωστά στα Θ1 και Θ2, λογικά, δεν πρέπει να περάσει το μάθημα, ανεξάρτητα από το τι έγραψε στο υπόλοιπο διαγώνισμα. Δεν το έκανα αλλά θα έπρεπε να γίνει. Είναι σαν να εξετάζεστε για δίπλωμα οδήγησης και ενώ κατά την εξέταση έχετε περάσει με κόκκινο, έχετε παραβιάσει STOP, έχετε παρκάρει πάνω σε διάβαση πεζών εσείς πιστεύετε ότι πρέπει να πάρετε το δίπλωμα. Να τρελαθούμε τώρα ή να το αφήσουμε για αργότερα; Απαντήσεις όπως

$$|\cdot| = 3\lambda^3, \qquad |\cdot| = \frac{3}{\lambda}, \qquad |\cdot| = \frac{\lambda}{3}, \qquad \cdots$$

και άλλα ευφάνταστα είναι αποτελέσματα μιας άλλης Άλγεβρας, άγνωστης μέχρι σήμερα στο σύμπαν.

Θ3. Έστω $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+dz\\x+y+z\\-y+z\end{pmatrix}.$$

(α΄) Να βρεθεί το μητρώο αναπαράστασης του T.

Από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού έπεται ότι για $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

$$T(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix}2x+dz\\x+y+z\\-y+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & d\\1 & 1 & 1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = A\mathbf{u}$$

άρα το μητρώο αναπαράστασης είναι το A.

(β΄) Να βρεθεί τιμή του d για την οποία ο T δεν έχει αντίστροφο.

Ο $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ δεν έχει αντίστροφο αν και μόνο αν το A^{-1} δεν υπάρχει, ισοδύναμα $\det A = 0$, έτσι υπολογίζοντας

$$\begin{vmatrix}2 & 0 & d\\1 & 1 & 1\\0 & -1 & 1\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{vmatrix} - 0 + d\begin{vmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{vmatrix} = 4 - d$$

επομένως ο T δεν έχει αντίστροφο ($\det A = 0$) αν και μόνο αν $d = 4$.

Κατά τη διόρθωση αυτής της ερώτησης, όπως και στο Θ2, διαπιστώνεται ότι κάποιοι/κάποιες δεν γνωρίζουν πως να υπολογίσουν μια ορίζουσα. Μα είναι δυνατόν να εξετάζεστε στη Γραμμική Άλγεβρα χωρίς να γνωρίζετε τα στοιχειώδη;

(γ΄) ■ Για d διάφορο της τιμής που βρήκατε στο (β΄) η εικόνα του T είναι $\operatorname{Image} T = \mathbb{R}^3$.

Για $d \neq 4$ είναι

$$\operatorname{Image} T = \operatorname{range} A = \text{χώρος στηλών του } A = \mathbb{R}^3$$

αφού το A έχει τρεις γραμμικά ανεξάρτητες στήλες.

Θ4. Θεωρήστε τα 2×2 με ελλειπή στοιχεία μητρώα A και B

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(α΄) ■ Συμπληρώστε τα υπόλοιπα στοιχεία του A ώστε να είναι ορθογώνιο.

Μαθαίνουμε (παπαγαλίζοντας;) να λέμε ότι το τετραγωνικό μητρώο A είναι ορθογώνιο αν $A^{-1} = A^T$ (και γράφτηκε σε πολλά γραπτά), ισοδύναμα $A^{\mathrm{T}}A = I$. Τι σημαίνει όμως η τελευταία ισότητα; Τα στοιχεία του γινομένου δύο μητρώων είναι τα εσωτερικά γινόμενα των στηλών των μητρώων και η τελευταία σχέση ισοδυναμεί με το εξής: αν $\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_k$ είναι στήλες του A, τότε $\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k = 1$, αν $j = k$ και $\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k = 0$, αν $j \neq k$ (γιατί; ποια εσωτερικά γινόμενα βρίσκονται στη κύρια διαγώνιο και ποια εκτός;) Κατά συνέπεια έχουμε, που είναι και ο καλύτερος ορισμός, ότι ένα τετραγωνικό μητρώο είναι ορθογώνιο αν οι στήλες του είναι **ορθοκανονικά** διανύσματα. Αν λοιπόν πάρουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & a \\ a & -1/3 \end{pmatrix}$$

ώστε το εσωτερικό γινόμενο των στηλών να είναι ίσο με μηδέν, θέλουμε απλά

$$(1/3)^2 + a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 8/9 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{2}/3$$

οπότε μπορούμε να επιλέξουμε $a = 2\sqrt{2}/3$.

(β΄) ■ Συμπληρώστε τα υπόλοιπα στοιχεία του B ώστε να είναι

$$\operatorname{range} B = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = W.$$

Η υπόθεση για το B λέει ότι αν $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, τότε

$$B\mathbf{u} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}, \qquad \text{για κάποιο } t \text{ στο } \mathbb{R}.$$

Γιατί; Για σκεφτείτε το λίγο, γράψτε ένα παράδειγμα να το δείτε και να σας μείνει. Αυτό ισοδυναμεί με το ότι η δεύτερη γραμμή του B είναι διπλάσια της πρώτης, εξού και η μορφή του B παραπάνω.

(γ΄) ■ Είναι το B που βρήκατε (στο ii) μητρώο προβολής επί του W; ΝΑΙ ΟΧΙ

Η απάντηση είναι ΟΧΙ αφού

$$B^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 5/2 \\ 5/2 & 5 \end{pmatrix} \neq B.$$

Είδαμε, είδαμε, είδαμε λέει ένα τραγούδι του Γ. Μαρκόπουλου από τη Θητεία. Είδα και εγώ, και τα είδα όλα, να επιλέγετε την απάντηση ΝΑΙ ή ΟΧΙ στην ερώτηση δίχως να έχετε βρει το μητρώο B στο (β΄). Παιδιά λίγη σοβαρότητα!

Θ5. Έστω ότι το M είναι ένα 6×6 μητρώο.

(α') ■ Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του M, ως γραμμικός συνδυασμός των δυνάμεων της ανεξάρτητης μεταβλητής λ, είναι της μορφής

$$p(\lambda) = \lambda^6 + a_5\lambda^5 + a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \tag{1}$$

Αν το μητρώο είναι $n \times n$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι βαθμού n. Η χαρακτηριστική ιδιότητα είναι ότι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι 1. Η μορφή του πολυωνύμου είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι $p(\lambda) = \det(\lambda I - M)$. Η ερώτηση ήταν σαφής, θέλουμε το πολυώνυμο ως "γραμμικό συνδυασμό των δυνάμεων της ανεξάρτητης μεταβλητής λ" κατά συνέπεια η απάντηση $p(\lambda) = \det(\lambda I - M)$ δεν είναι ικανοποιητική αφού είναι ο ορισμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου και μπορεί κάλιστα να βρίσκεται στο "σκονάκι" επιπλέον ο βαθμός δεν εμφανίζεται.

(β') ■ Προσδιορίστε τους συντελεστές ή τον συντελεστή του πολυωνύμου, όπως τους γράψατε στο (α'), ώστε το M να είναι **μη** αντιστρέψιμο.

Παρατηρήστε ότι αν $a_0 = 0$ τότε $p(0) = 0$, ισοδύναμα το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του M, ισοδύναμα το M είναι μη αντιστρέψιμο (βλέπε Θ7). Σημειώνουμε ότι

$$\begin{aligned} a_0 &= \det M = \text{γινόμενο των ιδιοτιμών} \\ a_0 &= p(0) = \det(0I - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A \end{aligned}$$

επομένως θέλουμε $a_0 = 0$ στην (1).

Θ6. Έστω ότι τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι **μοναδιαία** διανύσματα του $\mathbb{R}^6$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|,$$

όπου $\|\cdot\|$ είναι η νόρμα που παράγεται από το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο,

(α') Δείξτε ότι $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, έτσι υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 &\Leftrightarrow \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \\ &\Leftrightarrow \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\Leftrightarrow 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο.

(β') Υπολογίστε το $\|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\|$. Όπως στο (α') έχουμε

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \pm 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

άρα $\|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$.

Το εσωτερικό γινόμενο των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ το γράφουμε ως $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, ή ως $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Γράφοντας $\mathbf{uv}$ αφενός δεν είναι σαφές τι εννοείτε με αυτό και αφετέρου οδηγήστε σε συμπεράσματα (από παραδρομή θέλω να πιστεύω) του τύπου "αν $\mathbf{uv} = 0$, τότε $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, ή $\mathbf{v} = \mathbf{0}$" που εμφανίστηκε σε πολλά γραπτά και προφανώς είναι λάθος.

Θ7. Για ποιές τιμές της παραμέτρου ρ είναι όλες οι ιδιοτιμές του μητρώου

$$A(\rho) = \begin{pmatrix} \rho & \rho & \rho \\ 3 & \rho & \rho \\ 4 & \rho & 5 \end{pmatrix}$$

διάφορες του μηδενός; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Επειδή η ορίζουσα ενός τετραγωνικού μητρώου είναι ίση με το γινόμενο των ιδιοτιμών του μητρώου, το ζητούμενο είναι ισοδύναμο με το ότι η ορίζουσα του A πρέπει να είναι διάφορη του μηδενός. Έτσι

(α΄) ΜΕ ΤΟ ΜΑΤΙ: Αν $\rho = 0$, τότε η πρώτη γραμμή του A είναι η μηδενική, κατά συνέπεια $\det A = 0$ από τις ιδιότητες της ορίζουσας. Αν $\rho = 3$ τότε η πρώτη και η δεύτερη γραμμή του A είναι ίσες, οπότε και πάλι από τις ιδιότητες της ορίζουσας θα είναι $\det A = 0$. Όμοια αν $\rho = 5$, τότε η δεύτερη και η τρίτη στήλη του A είναι ίσες, οπότε και πάλι θα έχουμε $\det A = 0$. Έχουμε λοιπόν ότι οι τρεις ιδιοτιμές του A είναι διάφορες του μηδενός αν και μόνο αν $\rho \notin \{0, 3, 5\}$.

(β΄) ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ:

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} \rho & \rho & \rho \\ 3 & \rho & \rho \\ 4 & \rho & 5 \end{vmatrix} &= \rho \begin{vmatrix} \rho & \rho \\ \rho & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} \rho & \rho \\ \rho & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} \rho & \rho \\ \rho & \rho \end{vmatrix} \\ &= \rho(5\rho - \rho^2) - 3(5\rho - \rho^2) + 0 \\ &= (\rho - 3)(5\rho - \rho^2) \\ &= \rho(\rho - 3)(5 - \rho) \end{aligned}$$

επομένως $\det A \neq 0$ αν αν και μόνο αν $\rho \neq 0$, $\rho \neq 3$, $\rho \neq 5$.