Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΓΕΣ

30 Ιουνιου 2022

ΕΠΩΝΥΜΟ: ΦΩΣΤΗΡΑΣ	ΟΝΟΜΑ: ΑΣΤΕΡΙΟΣ
ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ:	ΕΤΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ:

ΑΙΘΟΥΣΑ: ΣΤΗΛΗ: **ΜΟΝΑΔΕΣ**: 76

Οδηγίες/Επεξηγήσεις

Στο διαγώνισμα υπάρχουν τεσσάρων ειδών ερωτήματα.

- Ερωτήματα του τύπου "Σωστό/Λάθος" ή "Ναι/Όχι" και καλείσθε, μετά από ένα σύντομο έλεγχο να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.
- Ερωτήματα με την ένδειξη ■ στα οποία πρέπει να δώσετε μόνο την τελική απάντηση ή λύση, μετά από σχετική προεργασία στο πρόχειρο.
- Ερωτήματα στα οποία καλείσθε να δώσετε μια πλήρη αλλά "οικονομική απόδειξη-λύση" για το ζητούμενο.
- Ένα ερώτημα πολλαπλής επιλογής.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 1 ώρα και 45 λεπτά.

Καλή Επιτυχία!

Θ1. Ένα 3×3 μητρώο A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$ και $\lambda_3 = 2$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(α) Είναι το μητρώο A αντιστρέψιμο; Ναι Όχι

Γιατί το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του A.

(β) Είναι το μητρώο A διαγωνοποιήσιμο; Ναι Όχι

Γιατί τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(γ) ■ Στη περίπτωση αυτή

Αν $X = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{pmatrix}$, τότε

$$AX = \begin{pmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & A\mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \lambda_2\mathbf{x}_2 & \lambda_3\mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = X\Lambda$$

κατά συνέπεια

$$A = X \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X^{-1}$$

Θ2. Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$. Επιλέξτε κυκλώνοντας το σωστό χαρακτηρισμό για τον ισχυρισμό.

(α') Εάν το 0 είναι ιδιοτιμή του A, τότε $\det A = 0$. Σ Λ
$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_5 = 0$.

(β') Εάν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{u}$ ώστε $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$, τότε $\operatorname{rank} A \leq 4$. Σ Λ
Το $\mathbf{u}$ είναι τότε ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda = 0$, οπότε $\det A = 0$, κατά συνέπεια οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες, επομένως $\operatorname{rank} A < 5$.

(γ') Εάν το A είναι ορθογώνιο, τότε υπάρχει το A^{-1}. Σ Λ
Εάν το A είναι ορθογώνιο, τότε $A^{\mathsf{T}}A = I$, κατά συνέπεια $A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$ το οποίο υπάρχει πάντα.

(δ') ■ $\det(3A) = 3^5 \det A$.

Θ3. Αν X και Y είναι διανυσματικοί χώροι, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ είναι μια βάση για τον X, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ είναι μια βάση για τον Y, και $F : X \to Y$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός τέτοιος ώστε

$$F(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \qquad F(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \qquad F(\mathbf{u}_3) = \mathbf{v}_3$$

το μητρώο αναπαράστασης του μετασχηματισμού είναι το (επιλέξτε)

(α') $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$ (β') $\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0 \end{pmatrix}$ (γ') $\begin{pmatrix} 1&1&1\\0&1&1\\0&0&1 \end{pmatrix}$ (δ') $\begin{pmatrix} 1&0&0\\1&1&0\\1&1&1 \end{pmatrix}$ (ε') Κανένα από τα προηγούμενα

$$A_F = \begin{pmatrix} (F\mathbf{u}_1)_{\mathcal{V}} & (F\mathbf{u}_2)_{\mathcal{V}} & (F\mathbf{u}_3)_{\mathcal{V}} \end{pmatrix}$$

Θ4. Έστω $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ με $\operatorname{rank} A = n$. Ορίζουμε την απεικόνιση $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με τη σχέση $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, τότε

(α') Ο F είναι γραμμικός μετασχηματισμός. Σ Λ

(β') ■ $\min\{m, n\} = n$, αφού $n = \operatorname{rank} A \leq \min\{m, n\}$.

(γ') $\operatorname{Image}(F) = \operatorname{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$. Η εικόνα του F είναι ο χώρος στηλών του A. Σ Λ

(δ') ■ $\operatorname{Kernel}(F) = \{\mathbf{0}\}$. Αν $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, τότε

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0,$$

αφού τα διανύσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Θ5. Έστω

$$V = \operatorname{span}\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1\\-1\\1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(α') Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^{\perp}$ του V.
Αν $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} \in V^{\perp}$, τότε $\mathbf{u} \perp (\lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2)$ για όλα τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ισοδύναμα

$$x\lambda + y(-\lambda + \mu) + z(\lambda + \mu) = 0 \Leftrightarrow \lambda(x - y + z) + \mu(y + z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

συνεπώς $y = -z$ και $x = -2z$ επομένως

$$V^{\perp} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(β') Αν P είναι το μητρώο προβολής επί του V, τότε το σύστημα $P\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ έχει λύση. Σ Λ

Το σύστημα $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση αν και μόνο αν $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2$. Εδώ είναι $\mathbf{b} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}$. Διαφορετικά από τη μορφή του $\mathbf{v}_2$ θα πρέπει

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu - 1 \\ \mu + 1 \end{pmatrix}$$

το οποίο ισχύει για $\mu = -1$.

Θ6. Έστω ότι το $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ είναι το μητρώο ορθογώνιας προβολής επί ενός διδιάστατου υπόχωρου W του $\mathbb{R}^3$. Επιλέξτε κυκλώνοντας το σωστό χαρακτηρισμό για τον ισχυρισμό.

Το A προβάλει επί του διδιάστατου υπόχωρου W του $\mathbb{R}^3$, ισοδύναμα ο χώρος στηλών του είναι διδιάστατος ($\operatorname{rank} A = 2$) επομένως έχει δύο γραμμικά ανεξάρτητες στήλες.

(α') Υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ώστε $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Σ Λ

Το A έχει δύο οδηγούς συνεπώς το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μη μηδενικές λύσεις.

(β') Το αντίστροφο μητρώο A^{-1} υπάρχει. Σ Λ

$\operatorname{rank} A < 3$.

(γ') $A^2 = A$. Σ Λ

Αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, τότε $A\mathbf{x} \in W$, οπότε $A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, αφού $A\mathbf{x} \in W$.

(δ') ■ Εάν $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ είναι ένα διάνυσμα να βρεθεί η βέλτιστη προσέγγιση του $\mathbf{u}$ από διάνυσμα του W, δηλαδή

$$\min_{\mathbf{x}\in W} \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{u} - A\mathbf{u}\|.$$

Η βέλτιστη προσέγγιση επιτυγχάνεται για $\mathbf{x} = A\mathbf{u} = \operatorname{proj}_W \mathbf{u}$.

Θ7. Δίνεται το μητρώο

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \mu \\ 3 & 2 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

όπου λ, μ είναι πραγματικές παράμετροι.

(α') Να βρεθεί μια κλιμακωτή μορφή για το μητρώο.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \mu \\ 3 & 2 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & \mu - 1 \\ 0 & 8 & \lambda + 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & (\mu - 1)/4 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 & -2\mu \end{pmatrix}$$

(β') Βρείτε συνθήκες στις παραμέτρους ώστε να είναι $\operatorname{rank} M = 2$.

Θα πρέπει να είναι $\lambda = 5$ και $\mu = 0$.

(γ') Έστω ότι το M είναι το επαυξημένο μητρώο για το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, δηλαδή $M = (A \mid \mathbf{b})$. Για τις τιμές των παραμέτρων που βρήκατε στο (α')

i. Να βρείτε μια βάση για την εικόνα $\operatorname{range} A$ του A.
Για $\lambda = 5$ από την κλιμακωτή μορφή του A προκύπτει ότι η πρώτη και η δεύτερη στήλη είναι γραμμικά ανεξάρτητες, επομένως μια βάση για την εικόνα, ή χώρο στηλών του A είναι η

$$\mathcal{B}_R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Σημειώνουμε ότι

$$\text{δεύτερη στήλη του } A = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii. Να βρείτε μια βάση για το μηδενόχωρο $\operatorname{null} A$ του A.
Αν $\mathbf{x} \in \operatorname{null} A$, τότε

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x_1 &= -x_3 \\ x_2 &= -x_3 \end{aligned} \right. ,$$

συνεπώς

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

κατά συνέπεια μια βάση για το μηδενόχωρο του A είναι η

$$\mathcal{B}_N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$