Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΓΕΣ 5 Σεπτεμβρίου 2019

+2/19/1010

Στοιχεία Εξεταζόμενου/ης		
ΕΠΩΝΥΜΟ :	ΟΝΟΜΑ :	
ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ :	ΕΤΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ :	
ΑΙΘΟΥΣΑ :	ΣΤΗΛΗ :	ΜΟΝΑΔΕΣ/ΒΑΘΜΟΣ:

Οδηγίες/Επεξηγήσεις

Στο διαγώνισμα υπάρχουν κυρίως τριών ειδών ερωτήματα.

1. Ερωτήματα με την ένδειξη Σ/Λ. Αυτά είναι ερωτήματα του τύπου σωστό/λάθος και καλείσθε να επιλέξετε την σωστή απάντηση κυκλώνοντας το αντίστοιχο γράμμα.
2. Ερωτήματα με την ένδειξη ■ στα οποία καλείσθε να δώσετε μια πλήρη αλλά "οικονομική" απόδειξη-λύση για το ζητούμενο.
3. Ερωτήματα στα οποία πρέπει να δώσετε μόνο την απάντηση δίχως εξήγηση.

Σε όλες τις περιπτώσεις συστήνεται να "δουλέψετε" κάθε ερώτημα ή υποερώτημα στο πρόχειρο ώστε η απάντησή σας να μην είναι τυχαία.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά. Η παράδοση των γραπτών αρχίζει 1 ώρα και 15 λεπτά μετά από την έναρξη της εξέτασης.

Καλή Επιτυχία!

ΛΥΣΕΙΣ – ΣΧΟΛΙΑ

Θ1. Δίνονται τα μητρώα

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}.$$

Κυκλώστε τον σωστό χαρακτηρισμό οποτεδήποτε η πράξη είναι έγκυρη

Σ/Λ CBA Σ/Λ $AA^{\mathrm{T}}C$ Σ/Λ BAC Σ/Λ $A^{\mathrm{T}}C$

Αν το γινόμενο PQR ορίζεται, τότε $(PQ)R = P(QR)$ (προσεταιριστική ιδιότητα), κατά συνέπεια αν το γινόμενο PQ ή το QR δεν ορίζεται δεν μπορεί να ορίζεται το PQR.

ΕΑΝ ΑΥΤΟ ΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑ, ΤΟ ΟΠΟΙΟ ΑΦΟΡΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΓΝΩΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ, ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΑΠΑΝΤΗΘΕΙ ΣΩΣΤΑ, ΤΟΤΕ ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΟΒΑΡΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Θ2. (Βλέπε Θ9.) Εάν A είναι το 3×4 επαυξημένο μητρώο για το σύστημα

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

με $a_1 \neq 0$, να συμπληρωθεί η **αναγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή** R του A σε κάθε μια από τις περιπτώσεις:

(α΄) Το σύστημα δεν έχει λύση.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & c' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & d' \\ 0 & 0 & 0 & d'' \end{pmatrix}, \qquad d' \neq 0 \quad \text{ή} \quad d'' \neq 0$$

αν $\operatorname{rank} A = 2$ αν $\operatorname{rank} A = 1$.

Το μητρώο των συντελεστών, έστω A_0 έχει τάξη $\operatorname{rank} A_0 < 3$ και το σταθερό διάνυσμα δεν ανήκει στο range A_0.

(β΄) Το σύστημα έχει μοναδική λύση.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & d' \\ 0 & 0 & 1 & d'' \end{pmatrix}.$$

Το μητρώο των συντελεστών A_0 έχει τάξη $\operatorname{rank} A_0 = 3$ άρα είναι γραμμοϊσοδύναμο με το ταυτοτικό μητρώο.

(γ΄) Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c & d \\ 0 & 1 & c' & d' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

αν $\operatorname{rank} A = 2$ αν $\operatorname{rank} A = 1$.

Το μητρώο των συντελεστών A_0 έχει τάξη $\operatorname{rank} A_0 < 3$ και το σταθερό διάνυσμα ανήκει στο range A_0.

Θ3. Εάν $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \alpha$, υπολογίστε

(α') $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 3\alpha.$$

(β') $$\begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix} = 2^3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 8\alpha.$$

(γ') $$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+a_1 & b_2+a_2 & b_3+a_3 \\ b_1-c_1 & b_2-c_2 & b_3-c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1-c_1 & b_2-c_2 & b_3-c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & +a_2 & a_3 \\ b_1-c_1 & b_2-c_2 & b_3-c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{vmatrix} + 0 = 0 - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\alpha.\end{aligned}$$

Θ4. Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - z \\ y + 3z \end{pmatrix}.$$

(α') Το μητρώο A του μετασχηματισμού, δηλαδή εκείνο για το οποίο $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, είναι το

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(β') ■ Να βρεθεί ο πυρήνας του μετασχηματισμού, $\ker(T)$.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(T) \;&\Leftrightarrow\; T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 2x - z \\ y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow\; \begin{cases} 2x - z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

Έτσι

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z/2 \\ -3z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1/2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

κατά συνέπεια

$$\ker(T) = \left\{ t\begin{pmatrix} 1/2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Θ5. **Σκεφτείτε γεωμετρικά.** Έστω ότι το A είναι ένα 3×3 μητρώο ορθογώνιας προβολής επί ενός επιπέδου Π, υπόχωρου του $\mathbb{R}^3$. Επιλέξτε κυκλώνοντας το σωστό χαρακτηρισμό για τον ισχυρισμό.

(α΄) $A^2 = A$. Σ/Λ

Αν $\mathbf{u} \in \Pi$, τότε $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$, κατά συνέπεια

$$A^2\mathbf{v} = A(A\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

αφού $A\mathbf{v} \in \Pi$ για κάθε $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

(β΄) Το A^{-1} υπάρχει. Σ/Λ

Ας υποθέσουμε ότι το μητρώο A προβάλει επί του xy-επιπέδου, τότε

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \forall z \in \mathbb{R}$$

έτσι αν υπήρχε το A^{-1}, τότε θα είχαμε ότι

$$A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

όπου z είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός! Διαφορετικά, αν υπήρχε το A^{-1} από το (α΄) για κάθε διάνυσμα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ θα είχαμε

$$A^2\mathbf{u} = A\mathbf{u} \Leftrightarrow A^{-1}A^2\mathbf{u} = A^{-1}A\mathbf{u} \Leftrightarrow A\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

το οποίο είναι άτοπο αν $\mathbf{u} \notin \Pi$, κατά συνέπεια το A^{-1} δεν υπάρχει.

(γ΄) $\operatorname{rank} A = 2$. Σ/Λ

Ο χώρος στηλών του A είναι το επίπεδο Π το οποίο παράγεται από δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$, άρα το A έχει δύο γραμμικά ανεξάρτητες στήλες, ισοδύναμα $\operatorname{rank} A = 2$.

(δ΄) Υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ ώστε $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Σ/Λ

Αν το $\mathbf{u}$ είναι κάθετο στο Π, τότε $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Διαφορετικά, αφού $\operatorname{rank} A = 2$, τότε το σύστημα $A\mathbf{x} = 0$ έχει μη μηδενικές λύσεις, συνεπώς υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{u}$ με $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Διαφορετικά αν $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Pi$ θέτουμε $\mathbf{u} = \mathbf{v} - A\mathbf{v}$, τότε από το (α′) παίρνουμε

$$A\mathbf{u} = A(\mathbf{v} - A\mathbf{v}) = A\mathbf{v} - A^2\mathbf{v} = A\mathbf{v} - A\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

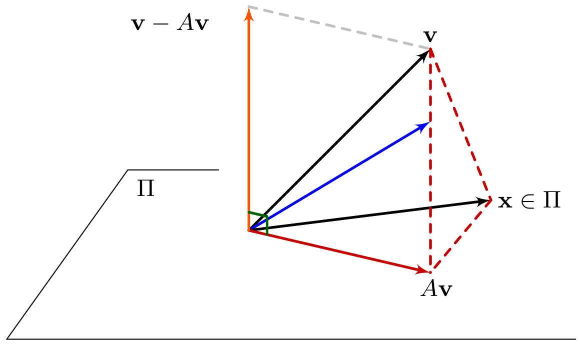
(ε΄) Το A είναι ορθογώνιο μητρώο. Σ/Λ

Αν το A ήταν ορθογώνιο, τότε θα ήταν $\det A = \pm 1$, κατά συνέπεια ο χώρος στηλών του A θα ήταν ο $\mathbb{R}^3$ και όχι το επίπεδο Π.

(ϛ΄) Εάν $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ είναι ένα διάνυσμα να βρεθεί η βέλτιστη προσέγγιση του $\mathbf{v}$ από διάνυσμα του Π, δηλαδή υπολογίστε

$$\min_{\mathbf{x} \in \Pi} \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{v} - A\mathbf{v}\|$$

βλέπε Σχήμα στην επόμενη σελίδα.



Έστω $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Pi$. Το διάνυσμα $A\mathbf{v}$ είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbf{v}$ επί του επιπέδου Π, κατά συνέπεια αν $\mathbf{x}$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα του Π, το “κόκκινο” τρίγωνο είναι ορθογώνιο

$$\mathbf{v} - A\mathbf{v} \perp \Pi \Rightarrow \mathbf{v} - A\mathbf{v} \perp A\mathbf{v}$$

με υποτείνουσα την “$\mathbf{v} - \mathbf{x}$”.

Όσο για το (β′) αν $\mathbf{v}'$ είναι ένα διάνυσμα “πάνω ή κάτω” από το $\mathbf{v}$ (το μπλε διάνυσμα) το οποίο “ρίχνει την ίδια σκιά όταν φωτίζεται από το A” (προβάλλεται) με το $\mathbf{v}$ στο Π, τότε $A\mathbf{v}' = A\mathbf{v}$, αλλά $\mathbf{v}' \neq \mathbf{v}$, επομένως η προβολή δεν είναι ένα-προς-ένα, ισοδύναμα το A δεν αντιστρέφεται.

Θ6. Επιλέξτε κυκλώνοντας το σωστό χαρακτηρισμό για τον ισχυρισμό.

Σ/Λ Το υποσύνολο $Y = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

Το Y είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 3x$, κατά συνέπεια μονοδιάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

Σ/Λ Το επίπεδο $Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x + y + z = 1 \right\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Το Z δεν περιέχει το σημείο $(0, 0, 0)$, κατά συνέπεια το Z δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ αφού δεν περιέχει το μηδενικό διάνυσμα.

Σ/Λ Ένα μητρώο του οποίου οι γραμμές, ως διανύσματα-στήλες, και οι στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα είναι τετραγωνικό.

Επειδή

$$\operatorname{rank} A = \text{πλήθος γραμμ. ανεξ. στηλών} = \text{πλήθος γραμμ. ανεξ. γραμμών}$$

και όλες οι γραμμές όπως και όλες οι στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε το πλήθος των γραμμών ισούται με το πλήθος των στηλών, άρα το μητρώο είναι τετραγωνικό.

Θ7. ■ Έστω ότι το 4×4 μητρώο A ικανοποιεί τη σχέση

$$A^3 - 4A^2 + 3A - 2I = O,$$

όπου O είναι το μηδενικό 4×4 μητρώο.

(α΄) Δείξτε ότι το A αντιστρέφεται και βρείτε μια έκφραση για το αντίστροφο A^{-1}.

Το τετραγωνικό μητρώο A αντιστρέφεται αν και μόνο αν υπάρχει B ώστε $AB = I$. Από τη δοσμένη εξίσωση παίρνουμε

$$\begin{aligned} A^3 - 4A^2 + 3A &= 2I \\ A(A^2 - 4A + 3I) &= 2I \\ A\left(\frac{1}{2}A^2 - 2A + \frac{3}{2}I\right) &= I \end{aligned}$$

κατά συνέπεια

$$A^{-1} = \frac{1}{2}A^2 - 2A + \frac{3}{2}I.$$

(β΄) Εξηγείστε γιατί το πολυώνυμο $p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda - 2$ είναι ή δεν είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μητρώου A δίνεται από το σχέση

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A),$$

όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι 4ου βαθμού, κατά συνέπεια το δοσμένο πολυώνυμο ΔΕΝ μπορεί να είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

Θ8. Επιλέξτε κυκλώνοντας το σωστό χαρακτηρισμό για τον ισχυρισμό. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Σ/Λ Εάν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{u}$ ώστε $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$, τότε $\det A = 0$.
Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μη μηδενικές λύσεις αν και μόνον αν $\operatorname{rank} A < n$, ισοδύναμα το A^{-1} δεν υπάρχει, ισοδύναμα $\det A = 0$. Διαφορετικά, αν $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$ με $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του A, ισοδύναμα το $\lambda = 0$ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A ισοδύναμα ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A, η $\det A$, ισούται με το 0.

Σ/Λ Εάν $\operatorname{null} A = \mathbf{0}$, τότε $\lambda \neq 0$ για κάθε ιδιοτιμή λ του A.
Εάν $\operatorname{null} A = \mathbf{0}$, το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ **δεν** έχει μη μηδενικές λύσεις, ισοδύναμα $\operatorname{rank} A = n$, ισοδύναμα $\det A \neq 0$, ισοδύναμα το μηδέν δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A.

Σ/Λ Εάν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $p(\lambda) = \lambda^n - 11$, τότε το A αντιστρέφεται.
Ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A είναι $(-1)^n \det A$, οπότε στην περίπτωσή μας $\det A = \pm 11$, έτσι $\det A \neq 0$, άρα το A^{-1} υπάρχει.

Σ/Λ Εάν το 0 είναι ιδιοτιμή του A, τότε οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.
Εάν το 0 είναι ιδιοτιμή του A, τότε $\det A = 0$, ισοδύναμα το A δεν αντιστρέφεται, ισοδύναμα οι στήλες του A **είναι γραμμικά εξαρτημένες**.

Σ/Λ Εάν το A είναι ορθογώνιο, τότε υπάρχει το A^{-1}.
Εάν το A είναι ορθογώνιο, τότε $\det A = \pm 1$, (απόρροια της σχέσης $A^{\mathrm{T}}A = I$), δηλαδή $\det A \neq 0$, οπότε υπάρχει το A^{-1}.

Θ9. ■ Για το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(α΄) Να βρεθεί μια βάση για τον χώρο στηλών του A.
Βλέπουμε ότι η πρώτη και δεύτερη στήλη του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, ενώ η τρίτη είναι πολλαπλάσιο της δεύτερης, έτσι

$$\text{Βάση του } \operatorname{range} A = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Διαφορετικά βρίσκουμε την αναγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή του A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = R,$$

όπου βλέπουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

(β΄) Να βρεθεί μια βάση για τον μηδενόχωρο του A.
Από τον ορισμό του μηδενόχωρου θέλουμε

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 2x &= 0 \\ y &= z \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

όπου $z \in \mathbb{R}$, επομένως

$$\text{Βάση του } \operatorname{null} A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$