Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διδάσκοντες: Ε. Γαλλόπουλος & Ε. Στεφανόπουλος — 6 σεπτεμβριου 2018

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΛΥΣΕΙΣ – ΣΧΟΛΙΑ

Οδηγίες/Επεξηγήσεις

Στο διαγώνισμα υπάρχουν κυρίως τριών ειδών ερωτήματα.

- Ερωτήματα με την ένδειξη □ είναι ερωτήματα του τύπου "σωστό/λάθος" και καλείσθε να μαυρίσετε (ή "μπλεδίσετε") το τετράγωνο **μόνο** αν η έκφραση που ακολουθεί είναι **πάντα** αληθής.
- Ερωτήματα με την ένδειξη △ στα οποία πρέπει να δώσετε μόνο την απάντηση δίχως εξήγηση. Μια συντομότατη εξήγηση ή απόδειξη, αν κρίνετε ότι είναι απαραίτητη, είναι οπωσδήποτε ευπρόσδεκτη.
- Ερωτήματα στα οποία καλείσθε να δώσετε μια πλήρη αλλά "οικονομική απόδειξη-λύση" για το ζητούμενο.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 45 λεπτά.
Η παράδοση των γραπτών αρχίζει 1 ώρα και 15 λεπτά μετά από την έναρξη της εξέτασης.
Καλή Επιτυχία!

ΓΕΝΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ

Στα ερωτήματα με την ένδειξη □ η απάντηση δεν δίνεται ανάλογα με το τι θα δείξει η ρίψη ενός νομίσματος. Τέτοιου τύπου ερώτημα είναι, για παράδειγμα, και η πρόταση γάμου! Η απάντηση είναι (ή θα έπρεπε να είναι) αποτέλεσμα σοβαρής ανάλυσης-προετοιμασίας. Μη μας ξεγελάει το (σύνηθες) "I do", "I do" που ακούγεται (συνήθως), στις ταινίες, από τα χείλη του προσώπου που ερωτήθηκε αμέσως μετά την διατύπωση της ερώτησης-πρότασης. Το πρόσωπο που απαντά περιμένει την ερώτηση, έχει κάνει ανάλυση των δεδομένων και "σαν έτοιμο από καιρό" περιμένοντας το συγκεκριμένο ερώτημα έχει έτοιμη (τις περισσότερες τουλάχιστον φορές) την απάντηση που θα δώσει. Η διαφορά με την εξέταση είναι ότι ενώ ο/η εξεταζόμενος/η έχει προετοιμαστεί μελετώντας το περιεχόμενο του υπό εξέταση μαθήματος, δεν γνωρίζει ποιά θα είναι τα ερωτήματα (πάντα βέβαια μπορεί να μαντέψει μερικά), κατά συνέπεια μια επιτόπου ανάλυση είναι απαραίτητη. Γι το λόγο αυτό εξάλλου δίνεται το πρόχειρο.

Όταν ζητάται να μαυριστεί το τετράγωνο □, εκεί που κρίνεται ότι πρέπει, αυτό που περιμένει να δει ο εξεταστής είναι ένα ■. Το ■ με επάνω του ένα ╳ τι σημαίνει; Αναίρεση του μαυρίσματος, το ╳ σημαίνει και διαγραφή (φτου να πάρει δεν έχω blanco μαζί μου), ή "καραμαύρισμα" μαύρισμα δηλαδή με έμφαση, μαύρισμα με τόνο; Και αν στην ίδια ομάδα ερωτημάτων υπάρχουν και οι δύο τύποι, δηλαδή μαυρισμένο τετράγωνο και μαυρισμένο και "χιτωμένο" τα πράγματα είναι εύκολα. Αν όμως στην ίδια ομάδα ερωτημάτων υπάρχει μόνο ο τύπος μαυρισμένο και χιτωμένο, αυτό τι σημαίνει; Η απάντηση, σύμφωνα με τα προηγούμενα, δεν είναι μονοσήμαντη.

Τέλος επειδή "οι καλοί λογαριασμοί ..." Το να εκτιμά κάποιος/α ότι μπορεί να "περάσει" το μάθημα ενώ δεν έχει απαντήσει **ολόσωστα** στα Θ8 και Θ7 είναι σαν να θέλει να προσληφθεί σε θέση ναυαγοσώστη ενώ δεν μπορεί όχι μόνο να κολυμπάει αλλά ούτε να ... επιπλέει! Βέβαια γίνονται και θαύματα.

Στις λύσεις, παρουσιάζεται η σχετική με το ερώτημα θεωρία (με πράσινο) και η αιτιολόγηση της απάντησης ή η λύση (με κόκκινο).

Θ1. ☐ ΜΑΥΡΙΣΤΕ ΑΝ Η ΕΚΦΡΑΣΗ ΕΙΝΑΙ ΑΛΗΘΗΣ. Για $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ θεωρούμε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

☐ Αν $\operatorname{rank} A = n$, τότε $n < m$. (2) $\Rightarrow n \leq m$.

☐ Αν $\operatorname{rank} A = m$, τότε $\operatorname{range} A = \mathbb{R}^n$. (2) $\Rightarrow m \leq n$ ισοδύναμα $\operatorname{range} A \subseteq \mathbb{R}^n$.

■ Αν το σύστημα έχει λύση για κάθε $\mathbf{b}$, τότε $m \geq n$. (1) $\Rightarrow m \geq \dim \mathbb{R}^n$ ισοδύναμα $m \geq n$.

■ Αν για $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ είναι $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, τότε $\operatorname{rank} A \geq m$.
(1) $\Rightarrow$ οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες άρα $\operatorname{rank} A = m$ (από τη (2) $\operatorname{rank} A \leq m$).

ΘΕΩΡΙΑ: Το A έχει n γραμμές και m στήλες, έτσι

$$A = \begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2, & \dots & \mathbf{a}_m\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Για $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \cdots \mathbf{a}_m x_m = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Επίσης

$$\operatorname{rank} A = \dim(\operatorname{range} A) \leq \min\{n, m\}. \tag{2}$$

Θ2. ☐ ΜΑΥΡΙΣΤΕ ΑΝ Η ΕΚΦΡΑΣΗ ΕΙΝΑΙ ΑΛΗΘΗΣ. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

■ Το A είναι ορθογώνιο αν και μόνο αν $AA^{\mathrm{T}} = I$. Εξ ορισμού.

☐ Εάν το A είναι ορθογώνιο τότε $\det A = 1$. (3) $\Rightarrow \det A = \pm 1$.

■ Εάν το A είναι ορθογώνιο, τότε $\operatorname{range} A = \mathbb{R}^n$. Υπάρχει το A^{-1} ισοδύναμα $\operatorname{rank} A = n$.

☐ Εάν $\operatorname{null} A = \{\mathbf{0}\}$, το A είναι ορθογώνιο.
$\operatorname{null} A = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow$ υπάρχει το A^{-1} (για τετραγωνικά μητρώα) αλλά εν γένει $A^{-1} \neq A^{\mathrm{T}}$. Βλέπε και Θ1 (δ).

ΘΕΩΡΙΑ: Το A είναι ορθογώνιο ανν $AA^{\mathrm{T}} = I$ ισοδύναμα $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$. Έτσι

$$\det(AA^{\mathrm{T}}) = \det I \Leftrightarrow (\det A)(\det A^{\mathrm{T}}) = 1 \Leftrightarrow (\det A)^2 = 1. \tag{3}$$

Επίσης για

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = A^{\mathrm{T}} = A \quad \text{και} \quad \det A = -1.$$

Θ3. ☐ ΜΑΥΡΙΣΤΕ ΑΝ Η ΕΚΦΡΑΣΗ ΕΙΝΑΙ ΑΛΗΘΗΣ. Τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_9$, είναι ορθογώνια μη μηδενικά διανύσματα στο $\mathbb{R}^9$

☐ Το μητρώο $U = \begin{pmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_9\end{pmatrix}$ είναι ορθογώνιο. (4) & (5).

■ Το $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_9\}$ είναι μια βάση για το $\mathbb{R}^9$.
Τα εννέα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο $\mathbb{R}^9$.

■ Το μητρώο $U = \begin{pmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_9\end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμο.
Το τετραγωνικό μητρώο U έχει γραμμικά ανεξάρτητες στήλες.

■ Εάν $U^\dagger$ είναι το ψευδοαντίστροφο του $U = \begin{pmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_9\end{pmatrix}$, τότε $UU^\dagger U = U$.
Το U αντιστρέφεται, οπότε $U^\dagger = U^{-1}$, έτσι $UU^\dagger U = UU^{-1}U = IU = U$.

ΘΕΩΡΙΑ: Το A είναι ορθογώνιο αν και μόνο αν οι στήλες του A αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύνολο (ισοδύναμα $AA^{\mathrm{T}} = I$). Οι στήλες του μητρώου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = A^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

είναι ορθογώνια διανύσματα, αλλά

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = A^{\mathrm{T}}. \tag{5}$$

Αν τα **μη μηδενικά** διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ είναι ορθογώνια, τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k &= \mathbf{0} \\ c_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_j\rangle + c_2\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_j\rangle + \cdots + c_k\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_j\rangle &= \langle \mathbf{0}, \mathbf{u}_j\rangle \qquad 1 \leq j \leq k \\ c_j\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j\rangle &= 0 \\ c_j\|\mathbf{u}_j\|^2 &= 0 \end{aligned}$$

άρα $c_j = 0$, αφού $\mathbf{u}_j \neq \mathbf{0}$.

Θ4. ☐ ΜΑΥΡΙΣΤΕ ΑΝ Η ΕΚΦΡΑΣΗ ΕΙΝΑΙ ΑΛΗΘΗΣ. Έστω $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$

■ Το A έχει πέντε πραγματικές ή μιγαδικές ιδιοτιμές.
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι 5ου βαθμού, κατά συνέπεια έχει πέντε ρίζες στο σώμα των μιγαδικών αριθμών.

■ Το A έχει τουλάχιστον μία πραγματική ιδιοτιμή.
Επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο p_A έχει πραγματικούς συντελεστές αν λ είναι ρίζα του πολυωνύμου και με $\overline{z}$ συμβολίσουμε τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού z, τότε

$$p_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \overline{p_A(\lambda)} = \overline{0} \Rightarrow p_A(\overline{\lambda}) = 0,$$

κατά συνέπεια και ο $\overline{\lambda}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου. Ετσι ένα 5×5 μπορεί να έχει δύο, ή τέσσερεις μιγαδικές ιδιοτιμές, επομένως το μητρώο θα έχει τρείς ή μία πραγματική ιδιοτιμή.

■ Εάν $A = A^{\mathrm{T}}$ οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικές.
Αν λ είναι ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}$, τότε

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = (A\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle$$

από τον ορισμό του συνήθους εσωτερικού γινομένου, ισοδύναμα

$$\langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}\rangle \Leftrightarrow \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \overline{\lambda}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \Leftrightarrow \lambda\|\mathbf{x}\|^2 = \overline{\lambda}\|\mathbf{x}\|^2,$$

κατά συνέπεια $(\lambda - \overline{\lambda})\|\mathbf{x}\|^2 = 0$, ισοδύναμα $\lambda = \overline{\lambda}$, αφού $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, δηλαδή $\lambda \in \mathbb{R}$.

☐ Εάν $\operatorname{null} A = \{\mathbf{0}\}$, το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του A.
Γνωρίζουμε ότι

$$\operatorname{null} A = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \text{το } A \text{ αντιστρέφεται} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

οπότε από την (7) προκύπτει ότι οι ιδιοτιμές του A είναι διάφορες του μηδενός.

ΘΕΩΡΙΑ: Για ένα $n \times n$ μητρώο A ως **χαρακτηριστικό πολυωνύμο** του A ορίζεται το

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A),$$

έτσι
$$p_A(\lambda) = \lambda^n - c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_0.$$
Παρατηρούμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός $n \times n$ μητρώου είναι βαθμού n. Οι **ιδιοτιμές** του $n \times n$ μητρώου A είναι οι ρίζες της εξίσωσης $p_A(\lambda) = 0$. Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A από τις σχέσεις ριζών-συντελεστών προκύπτει ότι

$$c_{n-1} = \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \tag{6}$$
$$c_0 = \det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n. \tag{7}$$

Θ5. □ και △ Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένα συμμετρικό μητρώο

■ Αν $\det A \neq 0$ και λ είναι ιδιοτιμή του A, τότε $\lambda \neq 0$. Βλέπε Θ4 (δ).

■ Αν $\det A \neq 0$ και λ είναι ιδιοτιμή του A, τότε $1/\lambda$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1}
Αφού $\det A \neq 0$ υπάρχει το A^{-1}. Έστω $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, τότε από το (α) είναι $\lambda \neq 0$ και
$$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} = \lambda A^{-1}\mathbf{x} \Rightarrow A^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}.$$

△ Εάν $A^2 = A$ τι συμπεραίνετε για την $\det A$;
$$\det A^2 = \det A \Rightarrow (\det A)^2 = \det A \Rightarrow \det A(\det A - 1) = 0,$$
επομένως $\det A = 0$ ή $\det A = 1$.

△ Εάν $A^2 = A$ και για το μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{u}$ ισχύει $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, τι συμπεραίνετε για το λ;
Από την $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με το μητρώο A παίρνουμε
$$A^2\mathbf{u} = A\lambda\mathbf{u} \Rightarrow A\mathbf{u} = \lambda A\mathbf{u} \Rightarrow \lambda\mathbf{u} = \lambda^2\mathbf{u} \Rightarrow (\lambda - \lambda^2)\mathbf{u} = \mathbf{0},$$
κατά συνέπεια, αφού $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$,
$$\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = 1.$$

Θ6. □ και △ Εάν
$$V = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}, \qquad W = \operatorname{span}\left\{\mathbf{w} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

■ $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.
$$V = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{και} \quad W = \left\{\begin{pmatrix}z\\z\\-z\end{pmatrix} : z \in \mathbb{R}\right\},$$
έτσι
$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}x+z\\y+z\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-z\\-z\\z\end{pmatrix}\\ &= (x+z)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (y+z)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - z\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \in V + W,\end{aligned}$$

επομένως $\mathbb{R}^3 = V + W$, επιπλέον

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \cap W \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} z = 0 \\ x = y = -z \end{Bmatrix} \Leftrightarrow x = y = z = 0 \Leftrightarrow V \cap W = \{\mathbf{0}\}.$$

□ $V \perp W$.

Ο W δεν είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V γιατί

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V \qquad \text{και} \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in W$$

αλλά

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 1 \neq 0.$$

△ Γράψτε ο μητρώο της ορθογώνιας προβολής επί του υπόχωρου W.

Το ζητούμενο μητρώο είναι το

$$P = \frac{1}{\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}} \mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ΘΕΩΡΙΑ: Αν V και W είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου X

$$X = V \oplus W \Leftrightarrow \begin{cases} X = V + W \\ V \cap W = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Επίσης

$$V \perp W \Leftrightarrow \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad \text{και} \quad \forall \mathbf{w} \in W.$$

Θ7. △ Να περιγράψετε όλους τους υπόχωρους του $\mathbb{R}^3$

(α΄) διάστασης 1:

Είναι **όλες** οι ευθείες που περιέχουν την αρχή των αξόνων, δηλαδή

$$V = t\mathbf{u}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

όπου $\mathbf{u}$ είναι **οποιοδήποτε μη μηδενικό** διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$.

(β΄) διάστασης 2:

Είναι **όλα** τα επίπεδα που περιέχουν την αρχή των αξόνων, δηλαδή

$$V = t\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

όπου $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι **οποιαδήποτε γραμμικά ανεξάρτητα** διανύσματα του $\mathbb{R}^3$.

(γ΄) διάστασης 3:

Είναι **μόνο ένας** ο $\mathbb{R}^3$, αφού αν $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** διανύσματα του $\mathbb{R}^3$, τότε .

$$\begin{aligned} V &= t\mathbf{u} + s\mathbf{v} + r\mathbf{w}, \qquad t, s, r \in \mathbb{R} \\ &= \operatorname{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} \\ &= \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

ΘΕΩΡΙΑ: Αν X είναι ένας διανυσματικός χώρος με $\dim X = n$ και $m \le n$, ένας υπόχωρος του X διάστασης m παράγεται από m **γραμμικά ανεξάρτητα** διανύσματα του X.

Θ8. △ Θεωρώντας τα μητρώα με αντίστοιχα μεγέθη

μητρώο:	A	B	C	D	E
μέγεθος:	3×5	5×2	3×5	3×2	2×3

υπολογίστε το μέγεθος ή γράψτε "δο" (δεν ορίζεται) για κάθε ένα από τα μητρώα

$A^{\mathrm{T}}C$	$CB + D$	$D^{\mathrm{T}}A$	$E^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}$	$DD^{\mathrm{T}} + E^{\mathrm{T}}E$	$(A+C)BE$
5×5	3×2	2×5	3×3	3×3	3×3

Θ9. Για το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y + 3z &= a \\ x + 2y + \mu z &= b \end{aligned}$$

όπου a, b, μ είναι πραγματικές παράμετροι, βρείτε συνθήκες για τις παραμέτρους ώστε το σύστημα να έχει (i) καμία λύση, (ii) μία μόνο λύση, ή (iii) άπειρες λύσεις.
Επιλύοντας με απαλοιφή το σύστημα βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & a \\ 1 & 2 & \mu & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a-2 \\ 0 & 1 & \mu-2 & b-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a-2 \\ 0 & 0 & \mu-1 & b-a+1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως

ΠΛΗΘΟΣ ΛΥΣΕΩΝ	μ	$f(a,b)$
Καμία λύση	$\mu = 1$	$a - b \neq 1$
Μοναδική λύση	$\mu \neq 1$	–
Άπειρες λύσεις	$\mu = 1$	$a - b = 1$

Θ10. Για το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(α΄) Να βρεθεί μια βάση για τον χώρο στηλών του A.
Βρίσκουμε την αναγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή (ΑΓΚΜ) του A

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη και δεύτερη στήλη της ΑΓΚΜ του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, επομένως μια βάση για τον χώρο στηλών του A, range A, είναι η

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

και $\dim(\text{range } A) = 2$.

(β΄) Να βρεθεί μια βάση για τον μηδενόχωρο του A.

Λύνοντας το ομοιογενές σύστημα που αντιστοιχεί στην ΑΓΚΜ του A βρίσκουμε

$$\left.\begin{matrix} x+z=0 \\ y-z=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

επομένως μια βάση για τον μηδενόχωρο του A ($\operatorname{null} A \subseteq \mathbb{R}^3$) είναι η

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

και $\dim(\operatorname{null} A) = 1$.