Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διδάσκοντες: Ε. Γαλλόπουλος & Ε. Στεφανόπουλος — 18 ιουνιου 2018

Στοιχεία Εξεταζόμενου/ης			
ΕΠΩΝΥΜΟ:		ΟΝΟΜΑ:	
ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ:		ΕΤΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ:	
ΑΙΘΟΥΣΑ:		ΣΤΗΛΗ:	

Βαθμολογία													
Θ1	Θ2	Θ3	Θ4	Θ5	Θ6	Θ7	Θ8	Θ9	Θ10	Θ11	Θ12	Άθροισμα	Βαθμός
6	4	20	6	9	8	6	6	8	6	12	9	100	

Στο διαγώνισμα υπάρχουν τριών ειδών ερωτήματα. (1) Σε αυτά με την ένδειξη Α Ψ, (αληθής ή σωστό και ψευδής ή λάθος) καλείσθε να επιλέξετε και να κυκλώσετε την τιμή Α ή Ψ. (2) Σε ερωτήματα στα οποία πρέπει να δώσετε μια σύντομη εξήγηση για την απάντηση που επιλέξατε. (3) Σε ερωτήματα στα οποία καλείσθε να δώσετε μια πλήρη αλλά ¨οικονομική απόδειξη-λύση¨ για το ζητούμενο.

Η διαρκεια της εξετασης ειναι 2 ωρες και 45 λεπτα. Αποχωρηση απο την εξεταση επιτρεπεται μετα απο 1 ωρα και 15 λεπτα απο την εναρξη.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Θ1. επιλεξτε και κυκλωστε αναλογα. Εάν το $\mathbf{b}$ είναι μια από τις στήλες του μητρώου A τότε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(α΄) Έχει λύση πάντα. — **Α** Ψ

(β΄) Δεν έχει λύση. — Α **Ψ**

(γ΄) Σε κάποιες περιπτώσεις έχει λύση και σε κάποιες άλλες δεν έχει. — Α **Ψ**

Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση **αν και μόνο αν** το διάνυσμα $\mathbf{b}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του μητρώου A.

Θ2. επιλεξτε και κυκλωστε αναλογα. Για το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(α΄) Η τάξη του, $\operatorname{rank} A$, είναι: — **1** 2 3

(β΄) Η ορίζουσά του, $\det A$, είναι: — 9 6 **0**

Οι στήλες του A είναι ίσες μεταξύ τους, επίσης οι γραμμές του A είναι πολλαπλάσια του $(1\ 1\ 1)$ κατά συνέπεια $\operatorname{rank} A = 1$ και $\det A = 0$, βλέπε Θ.6.

Παρατήρηση. Μπορούμε να δούμε ότι

$$\det A = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

και $\operatorname{rank} A = 1$.

Θ3. Αν για το μητρώο A το R είναι η αναγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή του

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(α΄) Να βρεθεί μια βάση για τον χώρο στηλών $\operatorname{range} A$ του A.

Οι γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του R είναι η 1η και 2η, άρα και του A, επομένως

$$\operatorname{rank} A = 2 = \dim(\operatorname{range} A) = \dim(\operatorname{range} A^{\mathrm{T}})$$

και

$$\operatorname{range} A = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

(β΄) Να βρεθεί μια βάση για τον μηδενόχωρο $\operatorname{null} A$ του A.

Αν L είναι το μητρώο αναγωγής ($LA = R$), τότε $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow LA\mathbf{x} = L\mathbf{0} \Leftrightarrow R\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ισοδύναμα

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 \\ x_2 = -3x_3 - x_4 \end{cases}$$

οπότε

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_4 \\ -3x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

κατά συνέπεια, αφού τα δύο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα,

$$\operatorname{null} A = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

(γ΄) Να βρεθεί μια βάση για τον χώρο γραμμών $\operatorname{range} A^{\mathrm{T}}$ του A.

Κάθε γραμμή του R είναι γραμμικός συνδυασμός γραμμών του A (πώς προκύπτει το R;) και αντιστρόφως (γιατί;), επομένως από τις δύο γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές του R παίρνουμε

$$\operatorname{range} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

(δ΄) Ποιά είναι η διάσταση του αριστερού μηδενόχωρου $\operatorname{null} A^{\mathrm{T}}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
Από τις σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων των υποχώρων που παράγονται από το A, εδώ $\dim(\operatorname{range} A) + \dim(\operatorname{null} A^{\mathrm{T}}) = \dim \mathbb{R}^3$, μέσω του (α΄) έπεται ότι $\dim(\operatorname{null} A^{\mathrm{T}}) = 3 - 2 = 1$.

(ε΄) Αν για $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ το $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ είναι μια λύση του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος.
Η γενική ή πλήρης λύση του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι ίση με τη **γενική λύση** του ομοιογενούς συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ σύν μια **ειδική** λύση του $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, έτσι από το (β΄) παίρνουμε

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

όπου c_1, c_2 είναι πραγματικές παράμετροι.

Θ4. Δώστε μια σύντομη εξήγηση για το αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή λάθος

(α΄) Εάν τα διανύσματα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε και τα $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
Για $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ θεωρούμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} c_1(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + c_2(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ c_1\mathbf{u}_1 + (c_1 + c_2)\mathbf{u}_2 - c_2\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

απ΄ όπου έπεται ότι $c_1 = c_1 + c_2 = -c_2 = 0$, αφού τα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έτσι προκύπτει ότι $c_1 = c_2 = 0$, κατά συνέπεια τα $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
Παρατήρηση. Για να ελέγξουμε αν τα διανύσματα $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα/εξαρτημένα διαμορφώνουμε την εξίσωση

$$c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + c_3\mathbf{w}_3 = \mathbf{0}.$$

(1) Αν η εξίσωση έχει μοναδική λύση την μηδενική, δηλαδή $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ τότε τα διανύσματα είναι γραμμικά **ανεξάρτητα**
(2) Αν η εξίσωση έχει (πέραν της προφανούς μηδενικής) μη μηδενική λύση, δηλαδή ένα τουλάχιστον από τα c_1, c_2, c_3 είναι διάφορο του μηδενός, τότε τα διανύσματα είναι γραμμικά **εξαρτημένα**.
Ένα σχόλιο σχετικό με τις απαντήσεις που δόθηκαν είναι ότι συνδυάζοντας γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα μπορούμε να πάρουμε τόσο γραμμικά ανεξάρτητα όσο και γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα. Για παράδειγμα για τα διανύσματα της εκφώνησης ορίζουμε τα

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 \qquad &&\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \qquad &&\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \\ &\mathbf{z}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \qquad &&\mathbf{z}_2 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2 \qquad &&\mathbf{z}_3 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1. \end{aligned}$$

Θεωρούμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ c_1\mathbf{u}_1 + c_2(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + c_3(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ (c_1 + c_2 + c_3)\mathbf{u}_1 + (c_2 + c_3)\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow c_1 + c_2 + c_3 = c_2 + c_3 = c_3 = 0 \end{aligned}$$

αφού τα διανύσματα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Από το τελευταίο σύστημα με προς τα πίσω αντικατάσταση προκύπτει ότι $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, κατά συνέπεια τα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$

είναι **γραμμικά ανεξάρτητα**.
Θεωρούμε την εξίσωση

$$
\begin{aligned}
c_1\mathbf{z}_1 + c_2\mathbf{z}_2 + c_3\mathbf{z}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\
c_1(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + c_2(\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_2) + c_3(\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\
(c_1 - c_3)\mathbf{u}_1 + (-c_1 - c_2)\mathbf{u}_2 + (c_2 + c_3)\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow c_1 - c_3 = -c_1 - c_2 = c_2 + c_3 = 0
\end{aligned}
$$

αφού τα διανύσματα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Από το τελευταίο σύστημα παρατηρούμε ότι για $c_1 = c_3$ και $c_2 = -c_3$ το σύστημα ικανοποιείται, έτσι η $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$ είναι λύση του συστήματος, οπότε

$$\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 = \mathbf{0},$$

κατά συνέπεια τα $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$ είναι **γραμμικά εξαρτημένα**.
Συμπέρασμα. Δεν είναι η πράξη μεταξύ των αρχικών διανυσμάτων που κάνει τα νέα διανύσματα ανεξάρτητα ή εξαρτημένα, αλλά ο **συγκεκριμένος γραμμικός συνδυασμός**.

(β΄) Ο μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1x_2 + 1 \end{pmatrix}.$$

είναι γραμμικός.
Αν ο L είναι γραμμικός μετασχηματισμός τότε

$$L(\mathbf{0}) = L(\mathbf{0} + \mathbf{0}) \Rightarrow L(\mathbf{0}) = L(\mathbf{0}) + L(\mathbf{0}) \Rightarrow L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Εδώ

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 0 \\ 0 \cdot 0 + 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

άρα ο T **δεν** είναι γραμμικός. Επίσης

$$T(\lambda\mathbf{x}) = T\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + x_2) \\ \lambda^2 x_1x_2 + 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1x_2 + 1 \end{pmatrix} = \lambda T\mathbf{x}.$$

Θ5. Για ποιούς τρεις αριθμούς a είναι το μητρώο

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & a & a \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$$

μη αντιστρέψιμο και γιατί συμβαίνει αυτό;
Για $a = 0$ το μητρώο έχει μια μηδενική γραμμή.
Για $a = 1$ η πρώτη και δεύτερη γραμμή ταυτίζονται.
Για $a = 3$ η δεύτερη και τρίτη στήλη ταυτίζονται.
Και στις τρεις περιπτώσεις η τάξη του μητρώου είναι μικρότερη του 3 ($r = 2$), επομένως το μητρώο δεν αντιστρέφεται.

Θ6. ΕΠΙΛΕΞΤΕ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΣΤΕ ΑΝΑΛΟΓΑ. Εάν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

(α΄) $\det A = 0 \Rightarrow \operatorname{rank} A = 0.$ A Ψ

(β΄) $\det A = 0 \Rightarrow \operatorname{rank} A \leq n - 1.$ A Ψ

(γ΄) $\operatorname{rank} A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0.$ A Ψ (δ΄) $\operatorname{rank} A < n \Rightarrow$ Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μη μηδενικές λύσεις. Ⓐ Ψ

Τα αποτελέσματα αυτά προκύπτουν από το γεγονός (Θεώρημα): Εάν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

(α΄) Το A είναι αντιστρέψιμο.

(β΄) Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μοναδική λύση την $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($\operatorname{null} A = \{\mathbf{0}\}$).

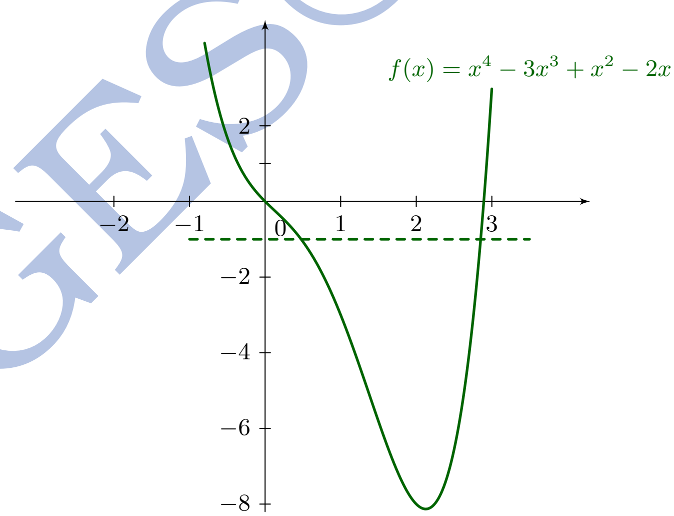
(γ΄) $\operatorname{rank} A = n$.

(δ΄) $\det A \neq 0$.

Θ7. Εάν το τετραγωνικό μητρώο A ικανοποιεί τη σχέση $A^4 - 3A^3 + A^2 - 2A + I = O$, όπου O είναι το μηδενικό μητρώο, δείξτε ότι το A αντιστρέφεται και υπολογίστε το αντίστροφο.
Το τετραγωνικό μητρώο A αντιστέφεται αν υπάρχει μητρώο B ώστε $AB = BA = I$, και στη περίπτωση αυτή είναι $B = A^{-1}$. Από τη δοσμένη σχέση και τις ιδιότητες της άλγεβρας μητρώων, προκύπτει ότι

$$I = -A^4 + 3A^3 - A^2 + 2A = A(-A^3 + 3A^2 - A + 2I)$$
$$I = -A^4 + 3A^3 - A^2 + 2A = (-A^3 + 3A^2 - A + 2I)A$$

άρα το A αντιστρέφεται και $A^{-1} = -A^3 + 3A^2 - A + 2I$.
Παρατήρηση. Η έκφραση $A^4 - 3A^3 + A^2 - 2A + I = O$ **δεν** σχετίζεται κατ΄ ανάγκη με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μητρώου A. Για παράδειγμα ένα 2×2 μητρώο του οποίου το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι 2ου βαθμού μπορεί να ικανοποιεί την παραπάνω σχέση. Για παράδειγμα στο σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x$ και παρατηρούμε ότι η εξίσωση $f(x) = -1$, ισοδύναμα $x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$ έχει δύο λύσεις.



Αν r και s είναι αυτές οι λύσεις και I είναι το ταυτοτικό μητρώο ($n\times n$ με n οτιδήποτε) τότε τα μητρώα rI και sI ικανοποιούν την δοσμένη σχέση (γιατί;). Αλλά και τα μητρώα

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

και πόσα άλλα ικανοποιούν την ίδια σχέση.
Ερώτημα: Πόσα και ποιά 3×3 και 4×4 διαγώνια μητρώα ικανοποιούν τη δοσμένη σχέση;

Θ8. Ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$;

(α') $U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\}$.
ΝΑΙ

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(β') $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.
ΟΧΙ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V \qquad \text{και} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V \qquad \textbf{αλλά} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin V.$$

(γ') $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 1\}$.
ΟΧΙ

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V.$$

Θ9. ΕΠΙΛΕΞΤΕ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΣΤΕ ΑΝΑΛΟΓΑ. Εάν

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \qquad C = (A\ B), \qquad D = \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

τότε η πράξη μεταξύ των εμπλεκομένων μητρώων ορίζεται
Το C είναι 3×2, το D είναι 2×3 και το AA^{T} είναι 3×3

(α') $AA^{\mathrm{T}}C$ — A Ψ

(β') ACB — A Ψ

(γ') CAA^{T} — A Ψ

(δ') ADB — A Ψ

Θ10. Για τα μητρώα $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, και $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, ελέγξτε ποιό από αυτά είναι ορθογώνιο.
Ένα τετραγωνικό μητρώο M είναι ορθογώνιο αν και μόνο αν

$$M^{\mathrm{T}}M = MM^{\mathrm{T}} = I \Leftrightarrow M^{-1} = M^{\mathrm{T}}.$$

Ισοδύναμα αν με "·" συμβολίσουμε το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

άρα οι στήλες του A είναι ορθογώνιες μεταξύ τους, επιπλέον κάθε στήλη είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Επομένως το A είναι ορθογώνιο.

Αντίθετα για τις στήλες του B παρατηρούμε ότι δεν είναι ορθογώνιες μεταξύ τους αφού

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

κατά συνέπεια το B δεν είναι ορθογώνιο.

Θ11. Δίνεται το $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(α΄) Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1) + 2 = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1).$$

(β΄) Να βρείτε όλες τις ιδιάζουσες τιμές του A.
Παρατηρούμε ότι $\operatorname{rank} A = 1$, κατά συνέπεια υπάρχει μία μόνο μη μηδενική ιδιάζουσα τιμή, σ_1. Έχουμε

$$\operatorname{range} A^{\mathrm{T}} = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1\}, \qquad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{range} A = \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1\}, \qquad \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

και $A\mathbf{v}_1 = \sigma_1 \mathbf{u}_1$, ισοδύναμα

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \sigma_1 \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \sigma_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \sigma_1 = \sqrt{10},$$

και $\sigma_2 = 0$. Βλέπε Strang σελ. 447.

(γ΄) Να υπολογίσετε το ψευδοαντίστροφο του A.
Για

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2) \qquad \text{και} \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2)$$

το ψευδοαντίστροφο $A^\dagger$ είναι

$$A^\dagger = (\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2)\begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(\mathbf{u}_1 \ \ \mathbf{u}_2)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Βλέπε Strang σελ. 501.
Παρατήρηση. Αφού $\operatorname{rank} A = 1$ έπεται ότι

$$A^\dagger = \frac{1}{\sigma_1}\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}(2 \ \ 1) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Βλέπε Διάλεξη 11 σελ. 44.

Θ12. Εάν $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 2$, τότε υπολογίστε

(α΄)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 2^2$$

(β΄)

$$\begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix} = 2^3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 2^4$$

(γ')

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^2 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + 0 = -2.
\end{aligned}
$$