ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ε. Γαλλόπουλος & Ε. Στεφανόπουλος

CEID

Διάλεξη 12

22 Μαΐου 2018

Έννοιες, λέξεις κλειδιά, υπενθύμιση I

Υπενθύμιση της 11ης δ.

- Κανονικές μορφές και κανονική μορφή Jordan.
- Παραγοντοποίηση Schur.

Έννοιες, λέξεις κλειδιά, υπενθύμιση II

Σήμερα θα συζητήσουμε (όροι 12ης δ.):

- Γραμμικοί μετασχηματισμοί
- Μητρώα γραμμικών μετασχηματισμών
- Αλλαγή βάσης
- Πολλαπλασιασμός μητρώων ως σύνθεση μετασχηματισμών

Υπό συζήτηση ενότητες

Μητρώα και Γραμμικοί μετασχηματισμοί (Strang, κεφ. 7)

Ορισμός

Ένας μετασχηματισμός $\mathcal{T} : V \to W$ μεταξύ δ.χ. V και W για τον οποίο ισχύει ότι

$$\mathcal{T}(\alpha v + \beta w) = \alpha \mathcal{T}(v) + \beta \mathcal{T}(w)$$

καλείται γραμμικός μετασχηματισμός (ΓΜ). Από τη γραμμικότητα έπεται ότι $\mathcal{T}(0) = 0$.

Παραδείγματα

$\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τ.ώ. για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 + 3\xi_1 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$\alpha \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\xi_1 + \beta\psi_1 \\ \alpha\xi_2 + \beta\psi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha\xi_1 + \beta\psi_1 \\ (\alpha\xi_2 + \beta\psi_2) + 3(\alpha\xi_1 + \beta\psi_1) \end{pmatrix}$$
$$\to \alpha \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 + 3\xi_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 + 3\psi_1 \end{pmatrix}$$

άρα

$$\mathcal{T}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{T}(x) + \beta \mathcal{T}(y)$$

Παραδείγματα I

$\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τ.ώ. για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \xi_1 \cos\phi - \xi_2 \sin\phi \\ \xi_1 \sin\phi + \xi_2 \cos\phi \end{pmatrix}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \alpha \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} (\alpha\xi_1 + \beta\psi_1)\cos\phi - (\alpha\xi_2 + \beta\psi_2)\sin\phi \\ (\alpha\xi_1 + \beta\psi_1)\sin\phi + (\alpha\xi_2 + \beta\psi_2)\cos\phi \end{pmatrix} \\ &\to \alpha \begin{pmatrix} \xi_1 \cos\phi - \xi_2 \sin\phi \\ \xi_1 \sin\phi + \xi_2 \cos\phi \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \psi_1 \cos\phi - \psi_2 \sin\phi \\ \psi_1 \sin\phi + \psi_2 \cos\phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

άρα

$$\mathcal{T}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{T}(x) + \beta \mathcal{T}(y)$$

<u>Παρατήρηση</u>: Ο εν λόγω ΓΜ $\mathcal{T}$ επιτελεί αριστερόστροφη περιστροφή του ορίσματος κατά γωνία ϕ.

Παραδείγματα

$\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ όπου για κάποιο $a_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq 0$, ισχύει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα

$\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ όπου για κάποιο $a_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq 0$, ισχύει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ όπου για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \to \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> Αποδείξτε ότι οι παραπάνω μετασχηματισμοί δεν είναι γραμμικοί.

Παραδείγματα

$\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ όπου για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \alpha \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} & \to \begin{pmatrix} \alpha\xi_2 + \beta\psi_2 \\ \alpha\xi_1 + \beta\psi_1 \end{pmatrix} \\ & \to \alpha \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

άρα

$$\mathcal{T}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathcal{T}(x) + \beta\mathcal{T}(y)$$

Παραδείγματα

$\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ όπου για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$, επιτελεί προβολή:

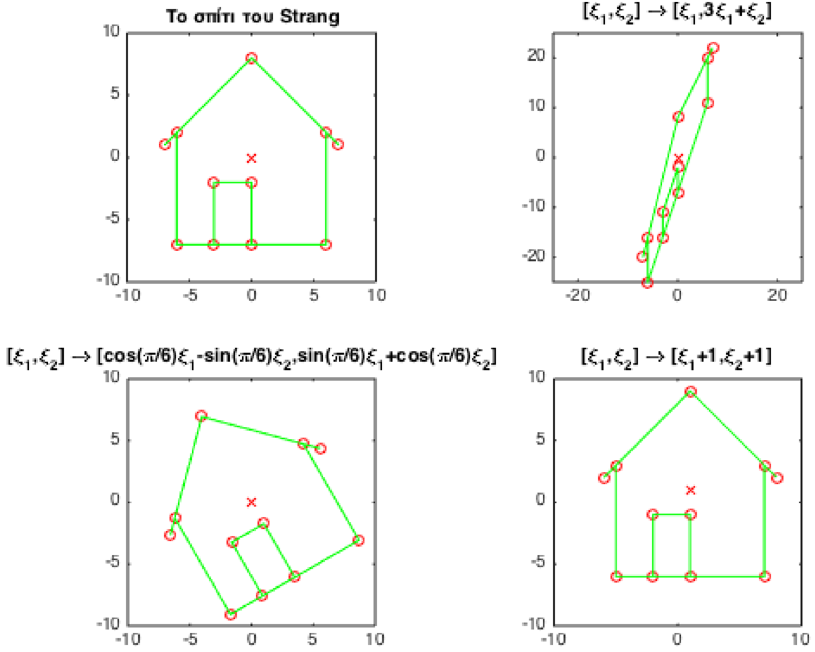
$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \alpha \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} & \to \begin{pmatrix} \alpha\xi_1 + \beta\psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \to \alpha \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

άρα

$$\mathcal{T}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{T}(x) + \beta \mathcal{T}(y)$$


Το σπίτι του Strang
$[\xi_1,\xi_2] \to [\xi_1, 3\xi_1+\xi_2]$
$[\xi_1,\xi_2] \to [\cos(\pi/6)\xi_1-\sin(\pi/6)\xi_2, \sin(\pi/6)\xi_1+\cos(\pi/6)\xi_2]$
$[\xi_1,\xi_2] \to [\xi_1+1, \xi_2+1]$
10
5
0
-5
-10
20
-20

Μητρώα που συνδέονται με γραμμικούς μετασχηματισμούς

Για οποιονδήποτε γραμμικό μετασχηματισμό

$$\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

υπάρχει διάνυσμα $a \in \mathbb{R}^n$ τ.ώ,

$$\mathcal{T}(x) = a^\top x, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Αντίστοιχα, αν

$$\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

υπάρχει μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ τ.ώ,

$$\mathcal{T}(x) = Ax, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Παραδείγματα γραμμικών μετασχηματισμών

Στο χώρο $\mathbb{R}^2$

Είδαμε ήδη ότι η προβολή και η περιστροφή είναι ΓΜ.

Στον $\mathbb{R}^{2\times 2}$, ως προς την τυπική βάση

Ανάκλαση $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$

Κλιμάκωση $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

Διάτμηση $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ (η γραμμή $x = \zeta$ μετακινείται κατά κατά $\alpha\zeta$ ως προς το y).

Προσοχή: Αξίζει να εξετάσετε την εφαρμογή των παραπάνω σε ένα μοναδιαίο διάνυσμα, $x = (\cos\phi, \sin\phi)^\top$.

Παραδείγματα ΓΜ Ι

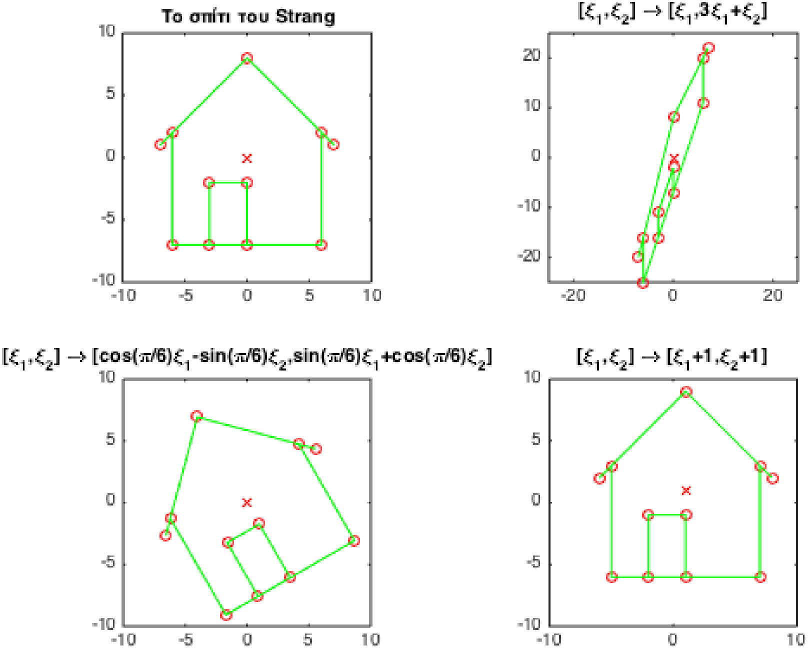
Προβολή $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2$, και $\mathcal{T}$ τ.ώ. $\mathcal{T}\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$ Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

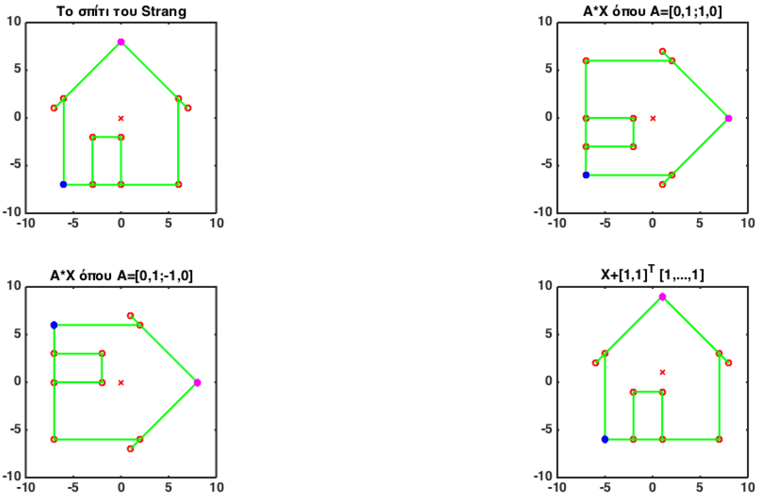
Παραδείγματα ΓΜ ΙΙ

<u>Κλιμάκωση και εξύψωση</u>: $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^3$, και $\mathcal{T}$ τ.ώ. $\mathcal{T}\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\gamma_1\xi_1\\ \gamma_2\xi_2\\ 0\end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix}\gamma_1 & 0\\ 0 & \gamma_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$



Το σπίτι του Strang
$[\xi_1,\xi_2] \to [\xi_1,3\xi_1+\xi_2]$
$[\xi_1,\xi_2] \to [\cos(\pi/6)\xi_1-\sin(\pi/6)\xi_2,\sin(\pi/6)\xi_1+\cos(\pi/6)\xi_2]$
$[\xi_1,\xi_2] \to [\xi_1+1,\xi_2+1]$
10
5
0
-5
-10
20
-20



Το σπίτι του Strang
A*X όπου A=[0,1;1,0]
A*X όπου A=[0,1;-1,0]
X+[1,1]^T [1,...,1]
10
5
0
-5
-10
-10 -5 0 5 10

Θεμελιώδης Γραμμικός Μετασχηματισμός

Αν $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και ορίσουμε το μετασχηματισμό

$$\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ ως } \mathcal{T}(v) = Av$$

αυτός θα είναι οπωσδήποτε γραμμικός.

Απόδειξη.

$$\mathcal{T}(\alpha v_1 + \beta v_2) = A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha A v_1 + \beta A v_2 = \alpha \mathcal{T}(v_1) + \beta \mathcal{T}(v_2).$$ □

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> Αυτό είναι το πιο σημαντικό και γενικό είδος ΓΜ.

$$\boxed{\text{κάθε ΓΜ μπορεί να αναπαρασταθεί ως μητρώο}}$$

Στη συνέχεια θα δούμε ορισμένες έννοιες που ήδη ορίσαμε για τα μητρώα στην περίπτωση των ΓΜ. Η ορολογία είναι κάπως διαφορετική.

ΓΜ και Μητρώα

Βασική ιδέα

Κάθε ΓΜ μπορεί να αναπαρασταθεί με μητρώο

Βασικά ερωτήματα

- Ποιό είναι το μητρώο;
- Είναι μοναδικό;
- Πώς το κατασκευάζουμε;

Μητρώα και Γραμμικοί μετασχηματισμοί (Strang, κεφ. 7)

Ορισμός

Ένας μετασχηματισμός $\mathcal{T} : V \rightarrow W$ μεταξύ δ.χ. V και W για τον οποίο ισχύει ότι

$$\mathcal{T}(\alpha v + \beta w) = \alpha \mathcal{T}(v) + \beta \mathcal{T}(w)$$

καλείται γραμμικός μετασχηματισμός (ΓΜ). Από τη γραμμικότητα έπεται ότι $\mathcal{T}(0) = 0$.

Παραδείγματα

Παράδειγμα: $V=\mathbb{R}^3, W=\mathbb{R}$ και $\mathcal{T}$ τ.ώ. $\mathcal{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x-2y+z$.

Παράδειγμα $V=\mathbb{R}^3, W=\mathbb{R}^3$ και $\mathcal{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ (προβολή)

Παράδειγμα $V=\mathbb{R}^3, W=\mathbb{R}^2$, $\mathcal{T}$ τ.ώ. $\mathcal{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα: $\mathcal{V}=\mathbb{R}^3, \mathcal{W}=\mathbb{R}^2$, και $\mathcal{T}$ τ.ώ. $\mathcal{T}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1\xi_1 \\ \gamma_2\xi_2 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα: $\mathcal{V}=\mathbb{R}^2, \mathcal{W}=\mathbb{R}^3$, και $\mathcal{T}$ τ.ώ. $\mathcal{T}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1\xi_1 \\ \gamma_2\xi_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ποικιλία μετασχηματισμών

Κλιμάκωση, **Διάτμηση**, **Προβολή**, **Περιστροφή**, **Ανάκλαση**, **Ανύψωση**

- Οι παραπάνω ΓΜ αναπαρίστανται με μητρώα με ειδική δομή.
- Σε πολλές περιπτώσεις, το σύνολο των ΓΜ μιας κατηγορίας ικανοποιεί τις απαραίτητες συνθήκες ως προς τη σύνθεση ΓΜ για να χαρακτηριστεί αλγεβρική **ομάδα**.
- Τα αντίστοιχα μητρώα αποτελούν ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό.
- Για παράδειγμα, οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί, δηλ. όσοι διατηρούν την ευκλείδεια απόσταση.

Γραμμικός μετασχηματισμός **κλιμάκωσης**

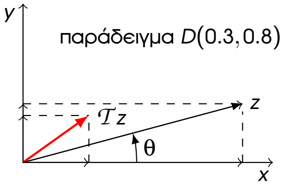
$$\mathcal{T}\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\zeta_1\gamma_1\\ \zeta_2\gamma_2\end{pmatrix}$$

Μητρώο: $D(\gamma_1,\gamma_2) = \begin{pmatrix}\gamma_1 & 0\\ 0 & \gamma_2\end{pmatrix}$.

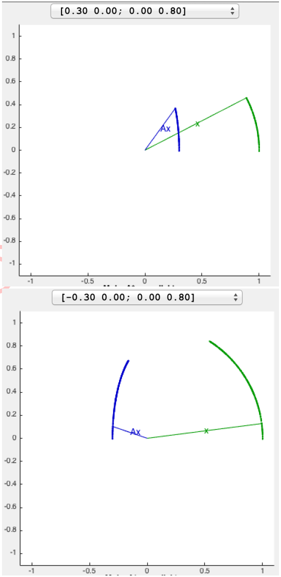
Ιδιότητες: Διαγώνιο μητρώο

1. $(D(\gamma_1,\gamma_2))^{-1} = D(\frac{1}{\gamma_1},\frac{1}{\gamma_2})$
2. Προσέξτε ότι $z \in \mathbb{R}^n$ και $Dz \in \mathbb{R}^n$ είναι συγγραμμικά μόνον αν $D = \gamma I$ για κάποιο γ.

παράδειγμα $D(0.3, 0.8)$



.



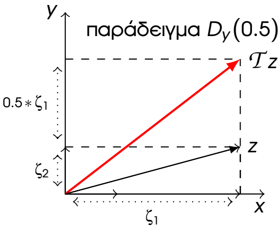
Γραμμικός μετασχηματισμός **διάτμησης**

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_1\gamma+\zeta_2\end{pmatrix} \text{ ή } \mathcal{T}\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\zeta_1+\gamma\zeta_2\\ \zeta_2\end{pmatrix}$$

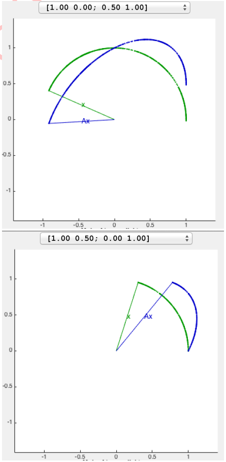
Μητρώο: $D_y(\gamma) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \gamma & 1\end{pmatrix}$ ή $D_x(\gamma) = \begin{pmatrix}1 & \gamma\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Ιδιότητες: τριγωνικό μητρώο

1. $(D(\gamma))^{-1} = D(-\gamma)$



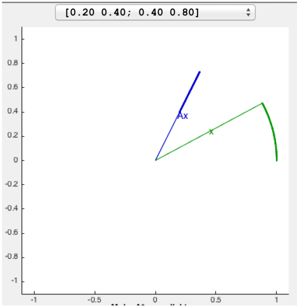
.



Γραμμικός μετασχηματισμός **ορθογώνιας προβολής**

Ορθογώνια προβολή στο δ.υ. $\mathrm{span}\{c\}$ όπου $c = (\gamma_1, \gamma_2)^\top$:

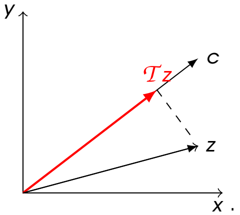
$$\mathcal{T}\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix} = \frac{\zeta_1\gamma_1 + \zeta_2\gamma_2}{\gamma_1^2+\gamma_2^2}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} = \frac{c^\top z}{c^\top c}c$$



<u>Μητρώο</u>: $P(\gamma_1,\gamma_2) = \frac{1}{\gamma_1^2+\gamma_2^2}\begin{pmatrix}\gamma_1^2 & \gamma_1\gamma_2\\ \gamma_1\gamma_2 & \gamma_2^2\end{pmatrix} = \frac{cc^\top}{c^\top c}$

<u>Ιδιότητες</u>: συμμετρικό, αυτοδύναμο, μη αντιστρέψιμο μητρώο

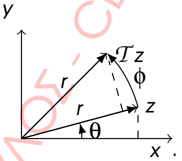
1. $P^2 = P, P^\top = P$



Γραμμικός μετασχηματισμός **περιστροφής**

Στοιχειώδης περιστροφή σε 2 διαστάσεις:

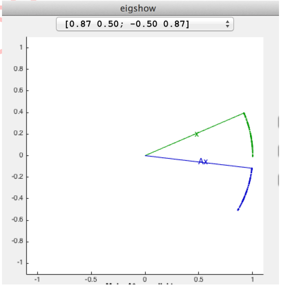
$$\mathcal{T}\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\zeta_1\cos\phi + \zeta_2\sin\phi\\ -\zeta_1\sin\phi + \zeta_2\cos\phi\end{pmatrix}$$



Μητρώο: $R(\phi) = \begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -\sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}$,.

Ιδιότητες:

1. $R(\psi)R(\phi) = R(\phi+\psi) = R(\phi)R(\psi)$
2. επομένως $R(-\phi)R(\phi) = I$
3. $R(-\phi) = R(\phi)^\top$
4. επομένως $\Rightarrow R(\phi)^\top = R(\phi)^{-1}$,
5. $\Rightarrow$ το μητρώο περιστροφής είναι ορθογώνιο.
6. $\|R(\phi)z\|_2 = \|z\|_2$.



Γραμμικός μετασχηματισμός **ανάκλασης**

Ανάκλαση στο δ.υ. $\mathrm{span}\{c\}$ όπου $c = (\gamma_1, \gamma_2)^\top$:
Για δοθέν $c = (\gamma_1, \gamma_2)^\top$, η ανάκλαση είναι ο ΓΜ τ.ώ.

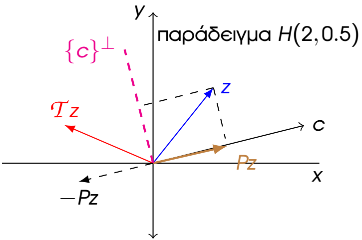
$$\mathcal{T}z = \frac{1}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \begin{pmatrix} -(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\zeta_1 - 2\gamma_1\gamma_2\zeta_2 \\ -2\gamma_1\gamma_2\zeta_1 + (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\zeta_2 \end{pmatrix}$$

θέτοντας
$\cos(-\phi) = \gamma_1/\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}, \sin(-\phi) = \gamma_2/\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$

Μητρώο: $H(\gamma_1, \gamma_2) = I - 2\frac{cc^\top}{c^\top c} = \begin{pmatrix} \cos(2\phi) & \sin(2\phi) \\ \sin(2\phi) & -\cos(2\phi) \end{pmatrix}$

Ιδιότητες: συμμετρικό, ορθογώνιο

1. $H^\top H = I, H^\top = H \Rightarrow H^2 = I$
2. $\|Hz\|_2 = \|z\|_2$
3. Το z ανακλάται περί το $\{u\}^\perp$



.

Υπερβολική περιστροφή (προαιρετικό)

Όπως η περιστροφή επιτελεί την μετακίνηση ενός σημείου κατά μια γωνία επί ενός κύκλου, έτσι και η υπερβολική περιστροφή περιστρέφει ένα σημείο δοθείσα γωνία επί καμπύλης υπερβολής. Ως πρότυπο λαμβάνεται η μοναδιαία υπερβολή. Π.χ. αν (ζ_1, ζ_2) είναι οποιοδήποτε σημείο που κείται επί της μοναδιαίας υπερβολής, δηλ.

$$\{(\zeta_1, \zeta_2) | \zeta_1^2 - \zeta_2^2 = 1\}$$

οπότε

$$\zeta_1 = \cosh(\theta), \zeta_2 = \sinh(\theta)$$

για κάποιο θ τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{T}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta+\psi) \\ \sinh(\theta+\psi) \end{pmatrix}$$

Η αναπαράσταση μητρώου της υπερβολικής περιστροφής είναι

$$\begin{pmatrix} \cosh(\psi) & \sinh(\psi) \\ \sinh(\psi) & \cosh(\psi) \end{pmatrix}$$

Ορθογώνια ομάδα $O(n)$ (προαιρετικό) I

Αποτελείται από τους ΓΜ που διατηρούν τις ευκλείδειες αποστάσεις και το ευκλείδειο μέτρο:

$$O(n) = \{\mathcal{T} \mid \|u\|_2 = \|\mathcal{T}(u)\|_2, \forall u \in \mathcal{V}\}$$

Τα μητρώα που αναπαριστούν αυτούς τους μετασχηματισμούς είναι ορθογώνια.

- Τα μητρώα που αναπαριστούμε αυτούς τους μετασχηματισμούς είναι ορθογώνια.
- η ορίζουσα των μητρώων της $O(n)$ είναι ± 1.
- Τα μητρώα με ορίζουσα 1 αντιστοιχούν σε ειδική ορθογώνια ομάδα με το όνομα $SO(n)$.

Ορθογώνια ομάδα $O(n)$ (προαιρετικό) II

Το σύνολο των ΓΜ $O(n)$ είναι αλγεβρική ομάδα ως προς τη σύνθεση (πολλαπλασιασμό μητρώων) γιατί:

1. είναι κλειστό ως προς τη σύνθεση (αντίστοιχα, ως προς τον πολλαπλασιασμό)
2. ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα
3. περιέχει τον ταυτοτικό μετασχηματισμό
4. περιέχει τον αντίστροφο μετασχηματισμό

Θεμελιώδης γραμμικός μετασχηματισμός

Αν $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και ορίσουμε

$$\mathcal{T} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \text{ ως } \mathcal{T}(v) = Av$$

ο μετασχηματισμός $\mathcal{T}$ είναι γραμμικός.

Απόδειξη.

$\mathcal{T}(\alpha v_1 + \beta v_2) = A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha A v_1 + \beta A v_2 = \alpha \mathcal{T}(v_1) + \beta \mathcal{T}(v_2).$ □

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> Αυτό είναι το πιο σημαντικό και γενικό είδος ΓΜ. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε οποιονδήποτε ΓΜ με μητρώο.

Πυρήνας και εικόνα

Για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$,

Πεδίο ορισμού ο δ.χ. $\mathcal{V}$ επί των στοιχείων του οποίου εφαρμόζεται ο $\mathcal{T}$.

Συμπεδίο ο δ.χ. $\mathcal{W}$ στον οποίον απεικονίζονται τα στοιχεία του $\mathcal{V}$ με την εφαρμογή του $\mathcal{T}$.

Πεδίο τιμών (ή εικόνα) $\mathrm{image}(\mathcal{T}) := \{\mathcal{T}v | v \in \mathcal{V}\} \subseteq \mathcal{W}$ (σύνολο εξαγομένων στοιχείων)

Πυρήνας $\mathrm{kernel}(\mathcal{T}) := \{v \in \mathcal{V} | \mathcal{T}v = 0\} \subseteq \mathcal{V}$

Αν $A_{\mathcal{T}}$ είναι μητρώο που αντιστοιχεί στον $\mathcal{T}$ τότε

$$\mathrm{image}(\mathcal{T}) = \mathrm{range}(A_{\mathcal{T}}), \;\; \mathrm{kernel}(\mathcal{T}) = \mathrm{null}(A_{\mathcal{T}})$$

ΓΜ και Μητρώα

Βασική ιδέα

Κάθε ΓΜ μπορεί να αναπαρασταθεί με μητρώο

Βασικά ερωτήματα Ποιό είναι το μητρώο; Είναι μοναδικό; Πώς το κατασκευάζουμε;

ΓΜ και Μητρώα

Βασική ιδέα

Κάθε ΓΜ μπορεί να αναπαρασταθεί με μητρώο

Βασικά ερωτήματα Ποιό είναι το μητρώο; Είναι μοναδικό; Πώς το κατασκευάζουμε;
Ισχύει λόγω γραμμικότητας

$$v = \gamma_1 v_1 + \cdots \gamma_n v_n \Rightarrow \mathcal{T}(v) = \gamma_1 \mathcal{T}(v_1) + \cdots \gamma_n \mathcal{T}(v_n)$$

Προσοχή: Αν $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι βάση του $\mathcal{V}$ και είναι γνωστά τα διανύσματα $\mathcal{T}(v_1), \ldots, \mathcal{T}(v_n)$, τότε από τη γραμμικότητα είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε οποιοδήποτε διάνυσμα $\mathcal{T}(v)$ συνδυάζοντας με τους ίδιους συντελεστές γ_i τα διανύσματα $\mathcal{T}(v_1), \ldots, \mathcal{T}(v_n)$.

Κεντρική ιδέα

Στόχος: Να κατασκευάσουμε μητρώο για την αναπαράσταση του $\mathcal{T}$.

Παρατήρηση: Το μητρώο εξαρτάται από τις βάσεις των δ.χ. $\mathcal{V}, \mathcal{W}$.

1. Επιλέγουμε βάση για το $\mathcal{V}$, έστω $v_1, \ldots, v_n$
2. Επιλέγουμε βάση για το $\mathcal{W}$, έστω $w_1, \ldots, w_m$.
3. Εκφράζουμε κάθε διάνυσμα $\mathcal{T}(v_j) \in \mathcal{W}$ ως προς τη βάση και συλλέγουμε τους συντελεστές σε διανύσματα-στήλες.
4. Δημιουργούμε το μητρώο των στηλών των συντελεστών.

Παραδείγματα

Πολύ εύκολο αν ξέρουμε τ $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ τ.ώ. για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ο ρόλος των βάσεων στους ΓΜ

Έστω ο μετασχηματισμός $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ και τα μητρώα βάσης $V = (v_1, \ldots, v_n)$ και $W = (w_1, \ldots, w_m)$ για τον καθένα. Για κάθε v_j,

$$\mathcal{T}(v_j) \quad = \quad W a_j, \text{ όπου } a_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1,j} \\ \vdots \\ \alpha_{m,j} \end{pmatrix}, \text{ για } j = 1, \ldots, n.$$

Ο ρόλος των βάσεων στους ΓΜ

Έστω ο μετασχηματισμός $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ και τα μητρώα βάσης $V = (v_1, \ldots, v_n)$ και $W = (w_1, \ldots, w_m)$ για τον καθένα. Για κάθε v_j,

$$\mathcal{T}(v_j) = Wa_j, \text{ όπου } a_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1,j} \\ \vdots \\ \alpha_{m,j} \end{pmatrix}, \text{ για } j = 1, \ldots, n.$$

Άρα

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}(v_1) & \cdots & \mathcal{T}(v_n) \end{pmatrix} = (w_1, \ldots, w_m) \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \cdots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix}$$

Ο ρόλος των βάσεων στους ΓΜ

Έστω ο μετασχηματισμός $\mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ και τα μητρώα βάσης $V = (v_1, \dots, v_n)$ και $W = (w_1, \dots, w_m)$ για τον καθένα. Για κάθε v_j,

$$\mathcal{T}(v_j) = W a_j, \text{ όπου } a_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1,j} \\ \vdots \\ \alpha_{m,j} \end{pmatrix}, \text{ για } j = 1, \dots, n.$$

Άρα

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}(v_1) & \cdots & \mathcal{T}(v_n) \end{pmatrix} = (w_1, \dots, w_m) \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \cdots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix}$$

άρα

$$\begin{aligned} w &= \mathcal{T}(v) = \gamma_1 \mathcal{T}(v_1) + \cdots + \gamma_n \mathcal{T}(v_n) \\ w &= W A_{\mathcal{T}} c, \ \text{ όπου } c = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^\top. \end{aligned}$$

- Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός $\mathcal{T} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ μπορεί να αναπαρασταθεί με μητρώο, $A_{\mathcal{T}}$, που εξαρτάται από τις αντίστοιχες βάσεις V, W.
- Ανάλογα με την επιλογή βάσεων το μητρώο που αναπαριστά τον μετασχηματισμό μπορεί να είναι διαφορετικό. Επιτελεί όμως τον ίδιο μετασχηματισμό!

<u>Γενικά</u> Τα στοιχεία του μητρώου $A_{\mathcal{T}}$ προκύπτουν από το πώς εκφράζεται η απεικόνιση κάθε διανύσματος της βάσης V ως προς τη βάση W:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}(v_1) & = & \alpha_{11}w_1 + \cdots + \alpha_{m1}w_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{T}(v_n) & = & \alpha_{1n}w_1 + \cdots + \alpha_{mn}w_m, \end{array}$$

$$A_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Επομένως

$$[\mathcal{T}(v_1), \ldots, \mathcal{T}(v_n)] = WA_{\mathcal{T}}$$

τότε αν $v = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j v_j = Vc$,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}(v) & = & \mathcal{T}\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \mathcal{T}(v_j) \\ & = & WA_{\mathcal{T}}c \end{array}$$

Επομένως, αν ένα στοιχείο του $\mathcal{V}$ αναπαρίσταται με το διάνυσμα c ως προς τη βάση V, δηλ. $v = Vc$, τότε το $\mathcal{T}(v) \in \mathcal{W}$ αναπαρίσταται με το διάνυσμα $A_{\mathcal{T}}c$ ως προς το βάση W.

Μητρώο μετασχηματισμού ως προς τις τυπικές βάσεις

Όταν $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n, \mathcal{W} = \mathbb{R}^m$ με τις τυπικές βάσεις

$$V = \{e_1^{(1)}, \ldots, e_n^{(n)}\}, \quad W = \{e_1^{(m)}, \ldots, e_m^{(m)}\}$$

τότε το $A_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ είναι το μητρώο που στην στήλη $j = 1, \ldots, n$ περιέχει τους συντελεστές που εκφράζουν το $\mathcal{T}(e_j^{(n)})$ ως προς τη βάση $e_1^{(m)}, \ldots, e_m^{(m)}$.

ΠΡΟΣΟΧΗ Αν σε ένα μετασχηματισμό αλλάξουμε τη βάση ή τις βάσεις, αλλάζει και το μητρώο (ο μετασχηματισμός παραμένει ίδιος).

Βάσεις και μητρώα

Δοθείσης μίας βάσης $\{v_1, \ldots, v_n\}$ για το δ.χ. $\mathbb{R}^n$, μπορούμε να αναπαραστήσουμε κάθε διάνυσμα v ως:

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

εν συντομία $v = Va$ όπου $V = (v_1, \ldots, v_n)$.

- Το V αποκαλείται μητρώο βάσης.
- Το $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (προσέξτε - αναφερόμαστε σε βάση όλου του $\mathbb{R}^n$) είναι αντιστρέψιμο, άρα ισχύει ότι

$$v = V(V^{-1}v), \quad \text{όπου } a = V^{-1}v.$$

- Τα στοιχεία του $a = V^{-1}v$ είναι οι συντεταγμένες του v ως προς βάση V.
- Το V^{-1} αποκαλείται μητρώο αλλαγής βάσης.
- Η βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ αποκαλείται κανονική βάση. Το μητρώο βάσης γι΄ αυτήν είναι το ταυτοτικό (I).

Η επίλυση γραμμικού συστήματος $Ax = b$ ισοδυναμεί με την αλλαγή βάσης για το διάνυσμα b από την τυπική βάση σε βάση αποτελούμενη από τις στήλες του A.

Μητρώα και Γραμμικοί Μετασχηματισμοί Ι

Το μητρώο αναπαράστασης εξαρτάται από τις βασεις που επιλέγουμε.

Το μητρώο μπορεί να είναι πολύ πιο απλό (π.χ. διαγώνιο) για ορισμένες βάσεις σε σχέση με άλλες.

Μητρώα και Γραμμικοί Μετασχηματισμοί ΙΙ

Τότε το μητρώο αναπαράστασης του μετασχηματισμού που επιτελείται από το A ως προς αυτή τη βάση είναι διαγώνιο (το μητρώο Λ των ιδιοτιμών):

Εξήγηση:

$$y = Ax \Leftrightarrow Q^{-1}y = QQ-1AQ(Q^{-1}x) = \Lambda(Q^{-1}x).$$

Προσέξτε: Τα $VQ-1x$ και $Q^{-1}y$ είναι οι αναπαραστάσεις των διανυσμάτων x, y ως προς τη βάση των ιδιοδιανυσμάτων V.

Παράδειγμα

Δίνεται ο γ. μετασχ. $\mathcal{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από $\mathcal{T}(\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}4\xi_1+\xi_2\\ \xi_1+4\xi_2\end{pmatrix}$. (Από την ανάλυση που προηγήθηκε) το μητρώο του μετασχηματισμού ως προς την κανονική βάση για

$$\mathcal{T}(e_1) = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\ \mathcal{T}(e_2) = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \Rightarrow A_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

Έστω ότι αποφασίζουμε να χρησιμοποιήσουμε μια εναλλακτική βάση $Q = [q_1, q_2]$ που αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα του A,

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Σημειώστε ότι λόγω του ότι το μητρώο είναι πραγματικό και συμμετρικό, διαγωνιοποιείται και η βάση είναι OK επομένως $Q^\top Q = I$. Επίσης, με απλό υπολογισμό βρίσκουμε ότι το μητρώο των ιδιοτιμών είναι

$$Q^{-1}AQ = Q^\top AQ = \Lambda = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

Από εδώ και πέρα μας ενδιαφέρει να εκφράσουμε κάθε διάνυσμα ως προς αυτή τη βάση και να δούμε πώς μετασχηματίζεται μετά από τον $\mathcal{T}$.
Έστω ένα διάνυσμα v εκφρασμένο ως προς τη βάση Q, π.χ. $v = Qe$ όπου $e = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Προσέξτε ότι $v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$. Τότε

$$\mathcal{T}(v) = \mathcal{T}(Qe) = QQ^{-1}AQe = Q\Lambda e$$

δηλαδή το $\Lambda e = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ είναι οι συντελεστές του $\mathcal{T}(v)$ ως προς τη βάση των ιδιοδιανυσμάτων $\{q_1, q_2\}$. Όντως, επαληθεύεται άμεσα ότι $3q_1 + 5q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$, δηλ. όπως και το $Av = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$. Το ενδιαφέρον είναι ότι αν εκφράσουμε ένα διάνυσμα v ως προς τη βάση των ιδιοδιανυσμάτων, Q του μητρώου που εκφράζει τον γραμμικό μετασχηματισμό $\mathcal{T}$ ως προς την κανονική βάση, π.χ. $v = Qc$, τότε οι συντελεστές του $\mathcal{T}(v)$ ως προς την βάση Q είναι το γινόμενο του διαγώνιου μητρώου των ιδιοτιμών με το c.

Ερμηνεία πολλαπλασιασμού μητρώου με διάνυσμα βάσει του SVD

Δίνεται $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και έστω ότι $x \in \mathbb{R}^n$ και ότι $A = U\Sigma V^\top$ το SVD του μητρώου. Έστω επίσης ότι $\mathrm{rank}(A) = r$. Διερευνούμε πως ερμηνεύεται ο πολλαπλασιασμός Ax μέσω του SVD.

- Από το $Ax = U(\Sigma V^\top x)$, σημαίνει ότι αν εκφράσουμε το αποτέλεσμα Ax ως προς την ΟΚ βάση U οι συντελεστές θα είναι οι τιμές του διανύσματος $\Sigma V^\top x$.
- Επίσης αφού $VV^\top x = x$, οι συντελεστές του x ως προς (την ΟΚ βάση) V είναι $V^\top x$.
- Επομένως, ο πολλαπλασιασμός με το A επιτελεί έναν μετασχηματισμό στους συντελεστές της αναπαράστασης του x ως προς τη βάση V που ισοδυναμεί σε κλιμάκωση των συντελεστών στις θέσεις $1,\dots,n$ του $V^\top x$ με $\sigma_1,\dots,\sigma_n$. Οι τιμές που προκύπτουν (ακριβώς r μη μηδενικές) είναι οι συντελεστές των πρώτων $r \le n$ διανυσμάτων της βάσης U (οι υπόλοιποι συντελεστές θα είναι 0.)

Σύνθεση ΓΜ = Πολλαπλασιασμός μητρώων

Η σύνθεση των γραμμικών μετασχηματισμών αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό των μητρώων που τους αναπαριστούν ως προς τις κατάλληλες βάσεις.

Αν

$$\mathcal{S} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}, \quad \mathcal{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$
$$\mathcal{T} \circ \mathcal{S} : \mathcal{U} \to \mathcal{V} \to \mathcal{W}$$

Αν αναπαραστήσουμε τον $\mathcal{S}$ με το μητρώο $A_{\mathcal{S}}$ ως προς τις βάσεις U και V και το $\mathcal{T}$ με το $A_{\mathcal{T}}$ ως προς τις βάσεις V και W, τότε ο μετασχηματισμός $T \circ S$ αναπαρίσταται από το γινόμενο $A_T A_S$.