ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ε. Γαλλόπουλος & Ε. Στεφανόπουλος

CEID

Διάλεξη 7

27 Μαρτίου 2018

Έννοιες, λέξεις κλειδιά, υπενθύμιση I

Υπενθύμιση της 6ης δ.

- Διανυσματικοί χώροι και παραδείγματα
- Διανυσματικοί υπόχωροι και παραδείγματα
- Τους 4 υπόχωρους που ορίζονται από τα διανύσματα που αποτελούν το μητρώο:
  - από τις στήλες: υπόχωρος στηλών, αριστερός μηδενόχωρος
  - από τις γραμμές: μηδενόχωρος, χώρος γραμμών
- Τις έννοιες της βάσης και της διάστασης διανυσματικών χώρων και υπόχωρων.
- Την έννοια της τάξης μητρώου.
- Την κλιμακωτή μορφή μητρώου και τον υπολογισμό της τάξης από αυτήν.
- Διερεύνηση ύπαρξης λύσεων του $Ax = 0$ και εύρεσή τους, αν υπάρχουν.
- Αναγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή μητρώου (ΑΓΚΜ).
- Πλήρης αναγωγή μητρώου.
- Παραγοντοποίηση τάξης.
- Πλήρης λύση γενικού συστήματος $Ax = b$.
- Εύρεση όλων των υποχώρων από την ΑΓΚΜ.

Έννοιες, λέξεις κλειδιά, υπενθύμιση II

Σήμερα θα δούμε (όροι 7ης δ.):

- Συνδυασμοί και πράξεις μεταξύ υπόχωρων. Ευθύ άθροισμα και συμπλήρωμα.
- Ορθογωνιότητα υπόχωρων.
- Προβολές, ορθογώνια προβολή και αναπαράστασή τους με μητρώα.
- Ιδιότητες των μητρώων προβολής.

Υπό συζήτηση ενότητες

Συνδυασμοί υποχώρων

Ορισμοί

Έστω διανυσματικός χώρος $\mathcal{V}$ και οι υποχώροι $\mathcal{R},\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$. Τότε:

Άθροισμα υποχώρων $\mathcal{R}+\mathcal{S} = \{r+s : r \in \mathcal{R}, s \in \mathcal{S}\}$.

Τομή υποχώρων $\mathcal{R}\cap\mathcal{S} = \{v : v \in \mathcal{R} \text{ και } v \in \mathcal{S}\}$.

Ένωση υποχώρων $\mathcal{R}\cup\mathcal{S} = \{v : v \in \mathcal{R} \text{ ή } v \in \mathcal{S}\}$.

Πρόταση

Το άθροισμα και η τομή είναι υπόχωρος. Η ένωση δύο υποχώρων, δεν είναι κατ' ανάγκη υπόχωρος.

Παράδειγμα Ι

$\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ και οι υποχώροι

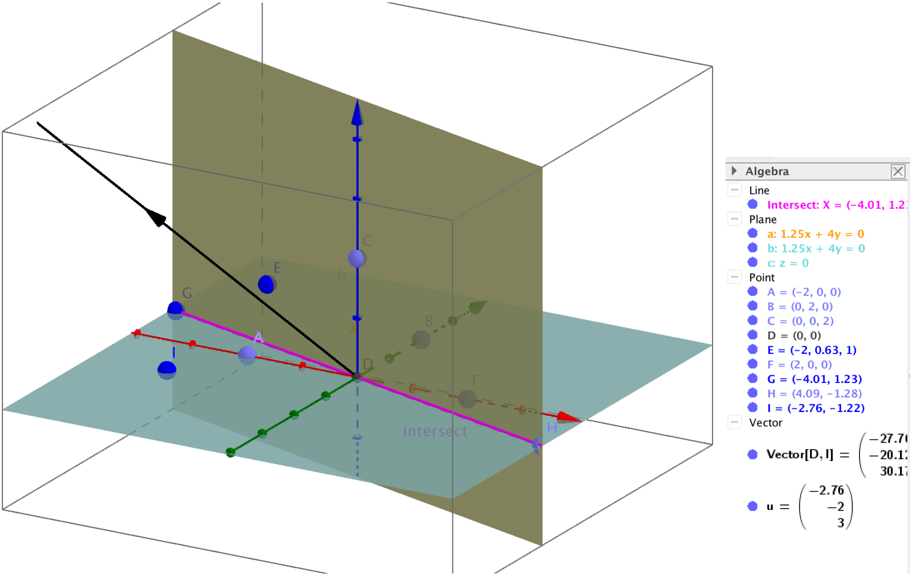
$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{u = (\alpha, 0)^\top | \alpha \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{S} &= \{u = (0, \alpha)^\top | \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &= \mathcal{R} + \mathcal{S}, \\ Z &= \mathcal{R} \cap \mathcal{S}, \end{aligned}$$

το σύνολο $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ δεν είναι υπόχωρος.

Παράδειγμα ΙΙ



Ευθύ άθροισμα και συμπλήρωμα I

Ορισμός

Έστω διανυσματικός χώρος $\mathcal{V}$ και οι υποχώροι $\mathcal{R}, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$. Ονομάζουμε ευθύ άθροισμα των $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$ και το συμβολίζουμε $\mathcal{T} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$ αν

1. $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = 0$, και
2. $\mathcal{R} + \mathcal{S} = \mathcal{T}$

Τότε λέμε ότι ο $\mathcal{R}$ είναι συμπλήρωμα του $\mathcal{S}$ και ότι ο $\mathcal{S}$ είναι συμπλήρωμα του $\mathcal{R}$.

- Το συμπλήρωμα του $\mathcal{R}$ (όπως και του $\mathcal{S}$) δεν είναι μοναδικό. Για παράδειγμα, αν $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ και θέσουμε ως $\mathcal{R}$ κάποια γραμμή που περνά από την αρχή των αξόνων, τότε οποιαδήποτε άλλη γραμμή που περνά από την αρχή είναι συμπλήρωμα του $\mathcal{R}$.

Ευθύ άθροισμα και συμπλήρωμα II

Θεώρημα

Έστω ότι $\mathcal{T} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$. Τότε

1. κάθε $t \in \mathcal{T}$ μπορεί να γραφτεί μοναδικά ως $t = r + s$ όπου $r \in \mathcal{R}$ και $s \in \mathcal{S}$.
2. $\dim(\mathcal{T}) = \dim(\mathcal{R}) + \dim(\mathcal{S})$.

Θεώρημα

Αν $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ είναι οποιοιδήποτε υπόχωροι διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$,

$$\dim(\mathcal{R} + \mathcal{S}) = \dim(\mathcal{R}) + \dim(\mathcal{S}) - \dim(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}).$$

Ευθύ άθροισμα και συμπλήρωμα III

Παράδειγμα $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ και οι υποχώροι

$$\mathcal{R} = \{u = (\alpha, 0)^\top | \alpha \in \mathbb{R}\}, \mathcal{S} = \{u = (0, \alpha)^\top | \alpha \in \mathbb{R}\}$$

τότε

$$\mathbb{R}^2 = \mathcal{R} \oplus \mathcal{S},$$

και όσον αφορά στις διαστάσεις,

$$2 = 1 + 1$$

Ορθογωνιότητα (κεφ. 4)

Στο μέρος αυτό των διαλέξεων θα εξετάσουμε διανυσματικούς χώρους που τους οποίους θα εξοπλίσουμε με την ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου (inner product spaces). Με βάση αυτό θα εξετάσουμε τις εξής έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας:

1. η έννοια του "διανυσματικού χώρου με εσωτερικό γινόμενο" (inner product space)
2. σχέσεις ορθογωνιότητας μεταξύ των 4 υποχωρων
3. η ορθογωνιότητα σε στοιχεία διανυσματικών χώρων - ακόμα και σε συναρτήσεις
4. ορθογώνια προβολή
5. βέλτιστη προσέγγιση και ορθογωνιότητα
6. το πρόβλημα των ελαχίστων τετραγώνων (επέκταση του προβλήματος επίλυσης συστημάτων)
7. μεθόδους επίλυσης του προβλήματος των ελαχίστων τετραγώνων
8. τη διαδικασία Gram-Schmidt για την παραγωγή ορθογώνιων διανυσμάτων

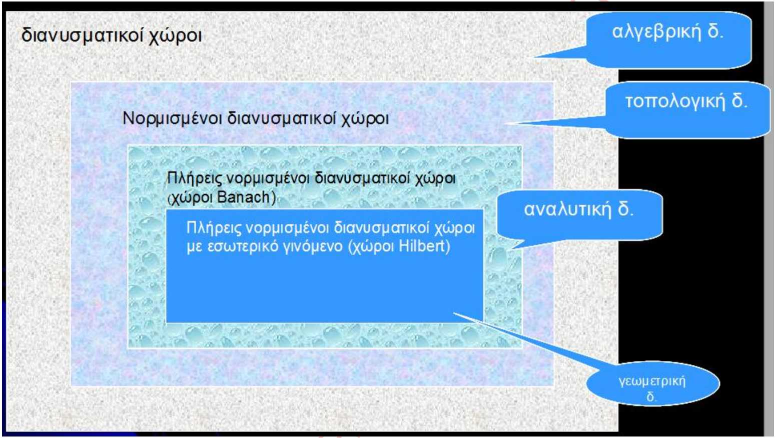
Χώροι εσωτερικού γινομένου

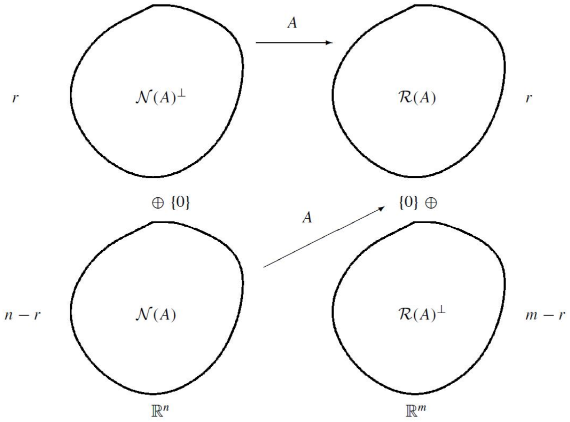
$\boxed{\text{χ. εσωτερικού γινομένου}} = \boxed{\text{διανυσματικός χ.}} + \boxed{\text{εσωτερικό γιν. επί του δ.χ.}}$

Παραδείγματα:

- Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ με το κλασικό εσωτερικό (στικτό) γινόμενο.
- Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ με το εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y \rangle := x^\top D y$ όπου D διαγώνιο μητρώο με θετική διαγώνιο.
- Ο χώρος $\mathbb{P}_n$ των πολυωνύμων βαθμού ως και n στο διάστημα $[-1, 1]$, με εσωτερικό γινόμενο το $\langle p, q \rangle := \int_{-1}^{1} p(\zeta) q(\zeta) \mathrm{d}\zeta$.
- Ο χώρος $\mathbb{P}_n$ των πολυωνύμων βαθμού ως και n στο διάστημα $[-1, 1]$, με εσωτερικό γινόμενο το $\langle p, q \rangle := \int_{-1}^{1} \frac{p(\zeta) q(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \mathrm{d}\zeta$.

Μια γεωγραφία των μαθηματικών χώρων




r
$\mathcal{N}(A)^\perp$
A
$\mathcal{R}(A)$
r
$\oplus \{0\}$
$\{0\} \oplus$
A
$n-r$
$\mathcal{N}(A)$
$\mathcal{R}(A)^\perp$
$m-r$
$\mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^m$

Θεμελιώδες θεώρημα της ΓΑ κατά Strang, Μέρος I

Υπενθύμιση

Δίνεται $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Τότε

1. $\dim(\mathrm{range}(A)) = \dim(\mathrm{range}(A^\top)) = r$
2. $\dim(\mathrm{null}(A)) = n - r$ και $\dim(\mathrm{null}(A^\top)) = m - r$.

Σχέσεις ορθογωνιότητας θεμελιωδών υποχώρων

Ορισμός

Έστω ο $\mathbb{R}^n$. Για κάθε δ.υ. $\mathcal{V}$ το ορθογώνιο συμπλήρωμα, $\mathcal{V}^{\perp}$ είναι ο δ. υπόχωρος όλων των διανυσμάτων καθέτων στο $\mathcal{V}$. Τότε $\mathbb{R}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^{\perp}$.

Σχέσεις ορθογωνιότητας θεμελιωδών υποχώρων

Ορισμός

Έστω ο $\mathbb{R}^n$. Για κάθε δ.υ. $\mathcal{V}$ το ορθογώνιο συμπλήρωμα, $\mathcal{V}^\perp$ είναι ο δ. υπόχωρος όλων των διανυσμάτων καθέτων στο $\mathcal{V}$. Τότε $\mathbb{R}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp$.

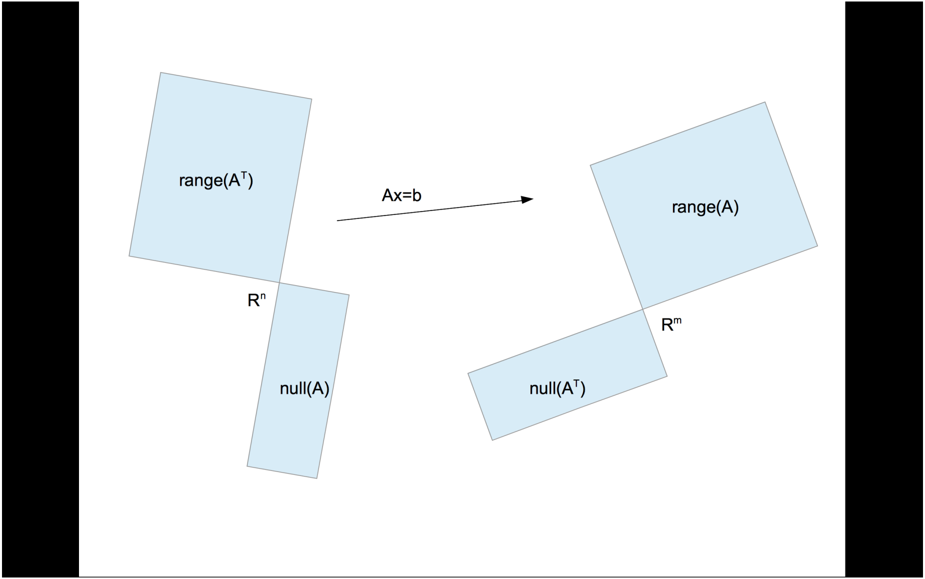
Φαίνεται (εύκολα) ότι τα στοιχεία των $\mathrm{null}(\mathrm{A})$ και $\mathrm{range}(A^\top)$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Ομοίως, τα στοιχεία των $\mathrm{null}(\mathrm{A}^\top)$ και $\mathrm{range}(A)$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Θεμελιώδες Θεώρημα Γραμμικής Άλγεβρας II

(κατά Strang:)

- $\mathrm{range}(A) \perp \mathrm{null}(A^\top)$ και $\mathrm{range}(A^\top) \perp \mathrm{null}(A)$,
- $(\mathrm{null}(A))^\perp = \mathrm{range}(A^\top)$, $(\mathrm{null}(A^\top))^\perp = \mathrm{range}(A)$,
- $\mathbb{R}^m = \underbrace{\mathrm{range}(A)}_{r} \oplus \underbrace{\mathrm{null}(A^\top)}_{m-r}$, $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathrm{range}(A^\top)}_{r} \oplus \underbrace{\mathrm{null}(A)}_{n-r}$

Ζεύγη και ορθογωνιότητα υποχώρων μητρώου



Προβολή και ορθογώνια προβολή

Έστω υπόχωρος $\mathcal{V}$ του $\mathbb{R}^n$ και ότι

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp$$

όπου

$$\mathcal{V}^\perp = \{y | y \perp x, \forall x \in \mathcal{V}\}$$

Τότε κάθε στοιχείο $x \in \mathbb{R}^n$ γράφεται μοναδικά και ως άθροισμα των

$$\begin{aligned} x &= v + u, v \in \mathcal{V}, u \in \mathcal{V}^\perp \\ &= Px + (I - P)x \end{aligned}$$

όπου P η ορθογώνια προβολή επί του $\mathcal{V}$. Προσέξτε ότι $I - P$ επιτελεί ορθογώνια προβολή στο ορθογώνιο συμπλήρωμα $\mathcal{V}^\perp$.

Ορθογώνια προβολή

Θέμα: Μας δίνεται ένα διάνυσμα x από τον δ.χ. και αναζητούμε:

1. Την προβολή, δηλ. το διάνυσμα που προκύπτει από την προβολή του διανύσματος σε κάποιον υπόχωρο.
2. Θα δούμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε την προβολής ως ένα ειδικό μητρώο προβολής επί το x.

Θεωρούμε εδώ ότι η προβολή ενός διανύσματος

- σε ευθεία είναι το μέρος του διανύσματος κατά μήκος της ευθείας.
- σε επίπεδο είναι το μέρος του διανύσματος επί του επιπέδου.
- παρόμοια γενικεύουμε την έννοια της προβολής διανύσματος επί μεγαλύτερου υπόχωρου.

Προσοχή: Το βιβλίο του Strang (και εμείς εδώ) θα αναφερόμαστε αποκλειστικά σε ορθογώνιες προβολές. Υπάρχουν όμως και πλαγιογώνιες προβολές.

Απλό παράδειγμα

Ο δ.χ. είναι το $\mathbb{R}^3$ και μας ενδιαφέρουν οι υπόχωροι $\mathcal{S} := \mathrm{span}\{e_3\}$ και $\mathcal{T} := \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$. Τότε αν

$$
\begin{aligned}
x &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \quad \text{προβολή επί του } \mathcal{S} \text{ είναι } x_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \quad \text{προβολή επί του } \mathcal{T} \text{ είναι } x_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Απλό παράδειγμα

Ο δ.χ. είναι το $\mathbb{R}^3$ και μας ενδιαφέρουν οι υπόχωροι $\mathcal{S} := \mathrm{span}\{e_3\}$ και $\mathcal{T} := \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$. Τότε αν

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \text{προβολή επί του } \mathcal{S} \text{ είναι } x_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \text{προβολή επί του } \mathcal{T} \text{ είναι } x_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Απλό παράδειγμα

Ο δ.χ. είναι το $\mathbb{R}^3$ και μας ενδιαφέρουν οι υπόχωροι $\mathcal{S} := \mathrm{span}\{e_3\}$ και $\mathcal{T} := \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$. Τότε αν $x = (1, 2, -1)^\top$

$$\Rightarrow x_\mathcal{S} = P_\mathcal{S} x, \text{ όπου } P_\mathcal{S} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e_3 (e_3^\top e_3)^{-1} e_3^\top$$

$$\Rightarrow x_\mathcal{T} = P_\mathcal{T} x, \text{ όπου } P_\mathcal{T} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} e_1^\top \\ e_2^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} e_1^\top \\ e_2^\top \end{pmatrix}$$

Αναπαράσταση ορθογώνιας προβολής με μητρώα

Προβολή σε 1 διάσταση

- Κάθε μονοδιάστατος υποχώρος αποτελείται από διανύσματα που είναι παράλληλα σε κάποιο διάνυσμα u. Δοθέντος του u, το μητρώο

$$P := \frac{uu^\top}{u^\top u}$$

είναι ο τελεστής ορθογώνιας προβολής επί του υποχώρου.

- Δείτε την επίδραση του παραπάνω P σε τυχόν διάνυσμα x:

$$\begin{aligned} \frac{uu^\top}{u^\top u}x &= \frac{u}{\|u\|}\frac{u^\top x}{\|u\|} \\ &= v\|x\|\cos(x,u), \quad \text{όπου } v := \frac{u}{\|u\|} \end{aligned}$$

Το Px είναι η ορθογώνια προβολή του στην κατεύθυνση (δηλ. παράλληλα) του $\langle v \rangle$.

- Προσέξτε ότι

$$(Px)^\top(x - Px) = 0 \Rightarrow x - Px \perp Px$$

που επιβεβαιώνει την ορθογωνιότητα

Η εφαρμογή του $P := uu^\top / u^\top u$ σε τυχόν διάνυσμα x έχει σαν αποτέλεσμα την προβολή του x στον υποχώρο $\mathrm{span}\{u\}$.

Παράδειγμα Έστω $u = [1,2,3]^\top$, τότε

$$P = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Για τυχαίο διάνυσμα x έχουμε

$$\begin{aligned} Px &= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 \\ 2\xi_1 + 4\xi_2 + 6\xi_3 \\ 3\xi_1 + 6\xi_2 + 9\xi_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Μητρώα προβολής

Ορισμός

Ένα μητρώο $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ αποκαλείται μητρώο προβολής αν είναι αυτοπαθές[α΄], δηλ. $PP = P$. Ένα μητρώο προβολής P αποκαλείται μητρώο ορθογώνιας προβολής αν επιπλέον είναι συμμετρικό[β΄], δηλ. $P^\top = P$.

[α΄] idempotent

[β΄] Ενίοτε, ένα μη συμμετρικό μητρώο προβολής χαρακτηρίζεται και ως μητρώο πλαγιογώνιας προβολής ((oblique projector)).

Πώς φτιάχνουμε μητρώο ορθογώνιας προβολής (ΟΠ);

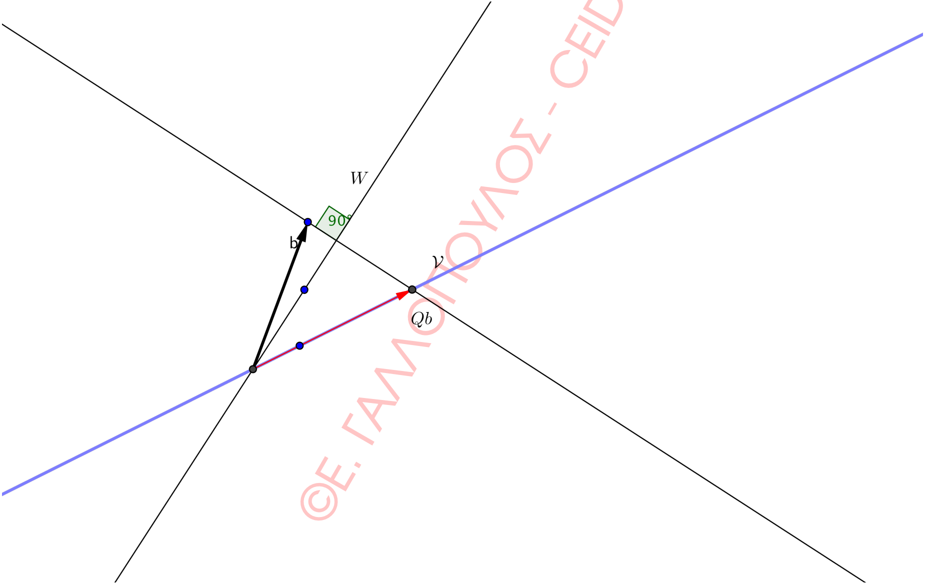
Έστω ο υπόχωρος $\mathcal{V} = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ όπου τα v_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα αποτελούν βάση. Αν $V = (v_1, \ldots, v_n)$, τότε το μητρώο

$$P := V(V^\top V)^{-1} V^\top$$

είναι το μητρώο ορθογώνιας προβολής επί του $\mathcal{V}$.

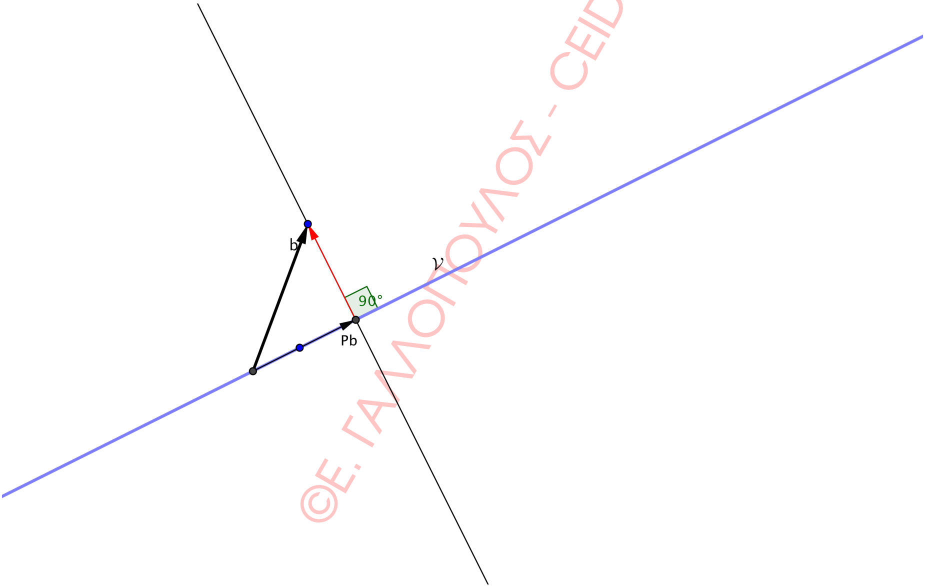
Οπτικοποίηση (πλαγιογώνιας) προβολής

Προβολή επί του $\mathcal{V}$ ορθογώνια στο $\mathcal{W}$



Οπτικοποίηση ορθογώνιας προβολής

Προβολή επί του $\mathcal{V}$ ορθογώνια στο $\mathcal{V}$



Κατασκευή μητρώου προβολής

Κατασκευή μητρώου ΟΠ

Αν η βάση για τον δ.υ. $\mathcal{V}$ είναι οι στήλες του $V = (v_1, \ldots, v_n)$ τότε το μητρώο

$$P_{\mathcal{V}} := V(V^\top V)^{-1}V^\top$$

είναι το μητρώο ορθογώνιας προβολής επί του υπόχωρου $\mathcal{V}$.

Κατασκευή μητρώου πλαγιογώνιας προβολής[α΄]

[α΄] Σημ. εκτός ύλης

Αν η βάση για τον δ.υ. $\mathcal{V}$ είναι οι στήλες του $V = (v_1, \ldots, v_n)$ και του δ.υ. $\mathcal{W}$ είναι οι στήλες του $W = (w_1, \ldots, w_n)$ το μητρώο

$$Q := V(W^\top V)^{-1}W^\top$$

είναι το μητρώο προβολής επί του υπόχωρου $\mathcal{V}$ ορθογώνια στο $\mathcal{W}$.

Παράδειγμα

Έστω $\mathrm{span}\{e_1, e_3\}$ στον $\mathbb{R}^4$ τότε $V = [e_1, e_3]$ και

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{V}} &= \begin{pmatrix} e_1 & e_3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} e_1^\top \\ e_3^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_3 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} e_1^\top \\ e_3^\top \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e_1 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^\top e_1 & e_1^\top e_3 \\ e_3^\top e_1 & e_3^\top e_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_1^\top \\ e_3^\top \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e_1 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^\top \\ e_3^\top \end{pmatrix} \text{ προσέξτε ότι ο μεσαίος όρος παραπάνω είναι } I_2 \\ &= e_1 e_1^\top + e_3 e_3^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

<u>Παρατηρήσεις:</u> Προφανώς $P_{\mathcal{V}} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \\ \xi_3 \\ 0 \end{pmatrix}$ που θα μπορούσαμε να το «μαντέψουμε» από την αρχή. Δείτε όμως το επόμενο παράδειγμα που αυτό δεν είναι εύκολο.

Παράδειγμα

Έστω $\mathcal{V} = \mathrm{span}\{a, b\}$ στον $\mathbb{R}^4$ όπου $a = [1,1,1,1]^\top$, $b = [0,1,-1,3]$ οπότε $V = [a, b]$. και

$$
\begin{aligned}
P_{\mathcal{V}} &= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a^\top \\ b^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} a^\top \\ b^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\top a & a^\top b \\ b^\top a & b^\top b \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a^\top \\ b^\top \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{11}{35} & -\frac{3}{35} \\ -\frac{3}{35} & \frac{4}{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{11}{35} & \frac{8}{35} & \frac{14}{35} & \frac{2}{35} \\ \frac{8}{35} & \frac{9}{35} & \frac{7}{35} & \frac{11}{35} \\ \frac{14}{35} & \frac{7}{35} & \frac{21}{35} & -\frac{7}{35} \\ \frac{2}{35} & \frac{11}{35} & -\frac{7}{35} & \frac{29}{35} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Παρατηρήσεις: $P_{\mathcal{V}}^2 = P_{\mathcal{V}} = P_{\mathcal{V}}^\top$, $P_{\mathcal{V}} a = a$, $P_{\mathcal{V}} b = b$, $P_{\mathcal{V}}(\gamma a + \delta b) = \gamma a + \delta b$ (αναμενόμενο: $P_{\mathcal{V}} v = v$ για κάθε $v \in \mathcal{V}$.)

Αν μας έδιναν το παραπάνω $P_{\mathcal{V}}$ και ένα τυχαίο διάνυσμα $x = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4]^\top$ τότε

$$P_{\mathcal{V}}x = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 11\xi_1 + 8\xi_2 + 14\xi_3 + 2\xi_4 \\ 8\xi_1 + 9\xi_2 + 7\xi_3 + 11\xi_4 \\ 14\xi_1 + 7\xi_2 + 21\xi_3 - 7\xi_4 \\ 2\xi_1 + 11\xi_2 - 7\xi_3 + 29\xi_4 \end{pmatrix}$$

Για να επαληθεύσουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^4$, $P_{\mathcal{V}}x \in \mathcal{V}$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει πάντα $z \in \mathbb{R}^2$ που ικανοποιεί το σύστημα $Vz = P_{\mathcal{V}}x$. Εξετάζουμε το επαυξημένο σύστημα

$$\left(\begin{array}{rr|l} 1 & 0 & 11\xi_1 + 8\xi_2 + 14\xi_3 + 2\xi_4 \\ 1 & 1 & 8\xi_1 + 9\xi_2 + 7\xi_3 + 11\xi_4 \\ 1 & -1 & 14\xi_1 + 7\xi_2 + 21\xi_3 - 7\xi_4 \\ 1 & 3 & 2\xi_1 + 11\xi_2 - 7\xi_3 + 29\xi_4 \end{array}\right)$$

και το φέρνουμε σε ΑΓΚΜ,

$$\left(\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & 11\xi_1 + 8\xi_2 + 14\xi_3 + 2\xi_4 \\ 0 & 1 & -3\xi_1 + \xi_2 - 7\xi_3 + 9\xi_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Προσέξτε ότι $n = \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A, b])$ επομένως υπάρχει μοναδική λύση.

Παρατηρήσεις

Στη γενική περίπτωση (για «γνήσιο υπόχωρο» , δηλ. όχι όλο το χώρο) το (τετραγωνικό) μητρώο προβολής P δεν είναι αντιστρέψιμο.

Αυτό μπορεί να αναδειχθεί με διάφορους τρόπους.
<u>Σκεπτικό:</u> Έστω ότι ο αναφερόμαστε στον $\mathbb{R}^m$. Αν υπήρχε αντίστροφο P^{-1}, για κάθε διάνυσμα του υπόχωρου $v \in \mathcal{V}$ θα επέστρεφε ένα μοναδικό διάνυσμα του χώρου $P^{-1}v \in \mathbb{R}^m$. Επειδή ένας γνήσιος υπόχωρος είναι «μικρότερος», θα υπάρχουν περισσότερα από ένα διανύσματα του χώρου των οποίων η προβολή στον υπόχωρο θα είναι το ίδιο διάνυσμα, επομένως ο αντίστροφος δεν μπορεί να οριστεί (θα προβληματίζεται ποιό διάνυσμα του χώρου να επιλέξει). Π.χ. είδαμε ότι αν $\mathcal{V} = \mathrm{span}\{e_1, e_3\}$ στον $\mathbb{R}^4$ τότε

$$P_{\mathcal{V}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{V}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1000 \\ 2 \\ -100 \end{pmatrix}.$$

<u>Μία απόδειξη</u> Για να υπάρχει αντίστροφο, θα πρέπει το μητρώο P να είναι αντιστρέψιμο. Όμως η βάση $V \in \mathbb{R}^{m\times k}$ περιέχει λιγότερα διανύσματα από τη διάσταση όλου του χώρου, δηλ. $k < m$, επομένως

$$\mathrm{rank}(P) \le \min\{\mathrm{rank}(V), \mathrm{rank}((V^\top V)^{-1}), \mathrm{rank}(V^\top)\}.$$

Η τάξη των μητρώων στα δεξιά είναι k ή μικρότερη (αποδεικνύεται ότι είναι ακριβώς k) άρα το μητρώο δεν είναι πλήρους τάξης και δεν είναι αντιστρέψιμο.

Παρατήρηση

Το (τετραγωνικό) μητρώο προβολής P είναι μοναδικό (δεν εξαρτάται από τη βάση).

Γιατί αν οι στήλες των V και U είναι δύο διαφορετικές βάσεις για τον υπόχωρο προβολής, τότε οι στήλες του ενός μπορούν να γραφτούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του άλλου (ως μέλη του ίδιου υπόχωρου). Επομένως υπάρχει αντιστρέψιμο M τέτοιο ώστε

$$V = UM, \quad V, U \in \mathbb{R}^{m\times n}, M \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Άρα αν γράψουμε

$$\begin{aligned} P &= V(V^\top V)^{-1}V^\top \\ &= (UM)((UM)^\top UM)^{-1}(UM)^\top \\ &= UM(M^\top U^\top UM)^{-1}M^\top U \\ &= U(M^{-\top}M^\top U^\top UMM^{-1})^{-1}U \\ &= U(U^\top U)^{-1}U^\top \end{aligned}$$