ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ε. Γαλλόπουλος & Ε. Στεφανόπουλος

CEID

Διάλεξη 6

20 Μαρτίου 2018

Έννοιες, λέξεις κλειδιά, υπενθύμιση I

Υπενθύμιση της 5ης δ.

- Απαλοιφή Gauss και παραγοντοποίηση LU.
- Στοιχειώδη μητρώα Gauss για την απαλοιφή και μεθοδολογία επίλυσης τετραγωνικών συστημάτων.
- Απαλοιφή Gauss: Χρήση εναλλαγών για την αποφυγή μηδενικών οδηγών και οδήγηση με μητρώα εναλλαγής και μητρώα μετάθεσης.
- Διαδικασία απαλοιφής Gauss ως μετασχηματισμός του $[A, b]$ σε $[U, \hat{b}]$ με διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς με ς.μ. Gauss και εναλλαγής.
- Παραγοντοποίηση LU και επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων.
- Εφαρμογή: α) Υπολογισμός τιμών πολυωνυμικής συνάρτησης και μητρώα Vandermonde και β) εύρεση πολυωνύμου (συντελεστών της δυναμομορφής) με βάση τις τιμές του (παρεμβολή).
- Επαυξημένο μητρώο.
- Μέθοδος Gauss-Jordan αντιστροφής μητρώου.
- Στοιχεία άλγεβρας (ομάδες, δακτύλιοι, σώματα)
- Εισαγωγή στους διανυσματικούς χώρους. Παραδείγματα.

Έννοιες, λέξεις κλειδιά, υπενθύμιση II

Σήμερα θα δούμε (όροι 6ης δ.):

- Διανυσματικοί χώροι και παραδείγματα
- Διανυσματικοί υπόχωροι και παραδείγματα
- Τους 4 υπόχωρους που ορίζονται από τα διανύσματα που αποτελούν το μητρώο:
  - από τις στήλες: υπόχωρος στηλών, αριστερός μηδενόχωρος
  - από τις γραμμές: μηδενόχωρος, χώρος γραμμών
- Τις έννοιες της βάσης και της διάστασης διανυσματικών χώρων και υπόχωρων.
- Την έννοια της τάξης μητρώου.
- Την κλιμακωτή μορφή μητρώου και τον υπολογισμό της τάξης από αυτήν.
- Διερεύνηση ύπαρξης λύσεων του $Ax = 0$ και εύρεσή τους, αν υπάρχουν.
- Αναγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή μητρώου (ΑΓΚΜ).
- Πλήρης αναγωγή μητρώου.
- Παραγοντοποίηση τάξης.
- Πλήρης λύση γενικού συστήματος $Ax = b$.
- Εύρεση όλων των υποχώρων από την ΑΓΚΜ.

Έννοιες, λέξεις κλειδιά, υπενθύμιση III

- Συνδυασμοί και πράξεις μεταξύ υπόχωρων. Ευθύ άθροισμα και συμπλήρωμα.
- Ορθογωνιότητα υπόχωρων.
- Προβολές, ορθογώνια προβολή και αναπαράστασή τους με μητρώα.
- Ιδιότητες των μητρώων προβολής.

Υπό συζήτηση ενότητες

Παραδείγματα (υπενθύμιση)

- $\mathbb{R}^n$ Ο χώρος όλων των διανυσμάτων (στηλών) με n πραγματικές συνιστώσες. Ο $\mathbb{C}^n$ ορίζεται αντίστοιχα.
- $\mathcal{M}$ Ο δ.χ. $\{A | A \in \mathbb{R}^{m\times n}\}$ όλων των πραγματικών μητρώων $m \times n$.
- $\mathcal{F}$ Ο δ.χ. όλων των πραγματικών συναρτήσεων $\{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.
- $\mathcal{Z}$ Ο δ.χ. που απαρτίζεται μόνον από το μηδενικό διάνυσμα.
- $\mathcal{C}[\alpha, \beta]$ Ο δ.χ. όλων των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[\alpha, \beta]$: $\{f | f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}\}$.

Άλλα παραδείγματα και συμβολισμοι:

- $\mathbb{P}$: Ο δ.χ. των πολυωνύμων.
- $\mathbb{P}_n$: Ο δ.χ. των πραγματικών (ή μιγαδικών) πολυωνύμων βαθμού έως n.
- ℓ_2: Ο δ.χ. των ακολουθιών $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ τέτοιων ώστε $\sum_j^\infty |\xi_j|^2 < \infty$ όπου η άθροιση και ο πολλαπλασιασμός με βαθμωτό ορίζονται με τον προφανή τρόπο.
- ο δ.χ. όλων των λύσεων $u(t)$ της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2}{dt^2} u(t) + u(t) = 0$.
- Ο δ.χ. $\{U | U \in \mathbb{R}^{n\times n}\}$ όλων των πραγματικών άνω τριγωνικών μητρώων.
- ο δ.χ. των λύσεων του συστήματος $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ όπου $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
- ο δ.χ. των διανυσμάτων $\{Ax | A \in \mathbb{R}^{m\times n}, x \in \mathbb{R}^n\}$.
- ΠΡΟΣΟΧΗ το σύνολο των διανυσμάτων $\{x | Ax = b\}$ όπου $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \neq 0 \in \mathbb{R}^m$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ δ.χ.

Διανυσματικοί υπόχωροι

Εναλλακτικός όρος: Γραμμικές Πολλαπλότητες (linear manifolds)

Ορισμός

Αν κάποιο $\mathcal{V}$ είναι δ.χ. επί σώματος $\mathbb{K}$ και $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$, $\mathcal{W} \neq \emptyset$, το $\mathcal{W}$ ονομάζεται διανυσματικός υπόχωρος του $\mathcal{V}$ ανν το $\mathcal{W}$ είναι διανυσματικός χώρος, δηλ. ανν $(\alpha w_1 + \beta w_2) \in \mathcal{W}$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ και για κάθε $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$.

Ο παραπάνω χαρακτηρισμός για τον υπόχωρο αναδεικνύει έναν εύκολο τρόπο να ελέγξουμε κατά πόσον ένα σύνολο είναι υπόχωρος (ή διανυσματικός υπόχωρος)· απλά επαληθεύουμε ότι το σύνολο είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Παρατηρήστε επίσης ότι $0 \in \mathbb{K}$, επομένως κάθε υπόχωρος πρέπει να περιέχει το μηδενικό διάνυσμα.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Όταν λέμε ένα σύνολο κλειστό ως προς κάποια πράξη εννοούμε ότι όταν εκτελείται η πράξη που αφορά σε στοιχεία από το σύνολο, το αποτέλεσμα ανήκει στο σύνολο.

Παρατήρηση: Για να αποδείξουμε την ισότητα δύο υπόχωρων, συνήθως αποδεικνύουμε ξεχωριστά τις δύο σχέσεις έγκλεισης: Δείχνουμε ότι τυχαίο $r \in \mathcal{R}$ ανήκει και στο $\mathcal{S}$ και ότι τυχαίο $s \in \mathcal{S}$ ανήκει στο $\mathcal{R}$.

Παραδείγματα (Strang)

Οι δυνατοί δ.υ. του $\mathbb{R}^3$ είναι:

το σύνολο $\mathcal{L}$ αποτελούμενο από κάθε ευθεία διερχόμενη από το $(0,0,0)$

το σύνολο $\mathcal{P}$ αποτελούμενο από κάθε επίπεδο διερχόμενο από το $(0,0,0)$

$\mathcal{Z}$ δηλ. μόνον το τετριμμένο διάνυσμα $(0,0,0)$

το σύνολο $\mathbb{R}^3$, δηλ. όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$

Μερικά αντιπαραδείγματα:

- Το σύνολο $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geq 0\}$ (δηλ. το πρώτο $n-$υπεροκτημόριο) δεν είναι δ.υ.
- ΄Ολα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ με τουλάχιστον ένα στοιχείο 0 δεν συνιστούν δ.υ.
- Το σύνολο των πολυωνύμων βαθμού ακριβώς n δεν είναι δ.υ. του $\mathbb{P}$ ούτε του $\mathbb{P}_n$.
- ΠΡΟΣΟΧΗ Το $\mathbb{R}^2$ ΔΕΝ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Τα διανύσματα του ενός δεν μπορούν καν να συνδυαστούν σε πράξεις δ.χ. με τα διανύσματα του άλλου.

Οι 4 βασικοί υπόχωροι μητρώου

Σύνοψη

- Κάθε μητρώο, έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, μπορεί να θεωρηθεί ως παράθεση διανυσμάτων (n στηλών ή m γραμμών). Ένα σημαντικό εύρημα στη γραμμική άλγεβρα ήταν ότι πολλά προβλήματα της περιοχής μπορούν να αναλυθούν αποτελεσματικά με βάση αυτά τα διανύσματα ή ισοδύναμους γραμμικούς συνδυασμούς τους.

Οι 4 βασικοί υπόχωροι μητρώου

Σύνοψη

- Κάθε μητρώο, έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, μπορεί να θεωρηθεί ως παράθεση διανυσμάτων (n στηλών ή m γραμμών). Ένα σημαντικό εύρημα στη γραμμική άλγεβρα ήταν ότι πολλά προβλήματα της περιοχής μπορούν να αναλυθούν αποτελεσματικά με βάση αυτά τα διανύσματα ή ισοδύναμους γραμμικούς συνδυασμούς τους.
- Επομένως, αποκτά μεγάλο ενδιαφέρον η μελέτη των 4 υπόχωρων που μπορούν να οριστούν από τις στήλες και τις γραμμές ενός μητρώου. Οι υποχωροι αυτοί είναι πολύ χρήσιμο εργαλείο για την κατανόηση και διερεύνηση πολλών προβλημάτων της γραμμικής άλγεβρας.

Οι 4 βασικοί υπόχωροι μητρώου

Σύνοψη

- Κάθε μητρώο, έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, μπορεί να θεωρηθεί ως παράθεση διανυσμάτων (n στηλών ή m γραμμών). Ένα σημαντικό εύρημα στη γραμμική άλγεβρα ήταν ότι πολλά προβλήματα της περιοχής μπορούν να αναλυθούν αποτελεσματικά με βάση αυτά τα διανύσματα ή ισοδύναμους γραμμικούς συνδυασμούς τους.
- Επομένως, αποκτά μεγάλο ενδιαφέρον η μελέτη των 4 υπόχωρων που μπορούν να οριστούν από τις στήλες και τις γραμμές ενός μητρώου. Οι υποχωροι αυτοί είναι πολύ χρήσιμο εργαλείο για την κατανόηση και διερεύνηση πολλών προβλημάτων της γραμμικής άλγεβρας.
- Θα ορίσουμε 4 υπόχωρους: **χώρος στηλών** και **αριστερός μηδενόχωρος** (υπόχωροι του $\mathbb{R}^m$), **μηδενόχωρος** και **χώρος γραμμών** (υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$.)
- Θα ερμηνεύσουμε πολλά βασικά προβλήματα της ΓΑ βάσει αυτών.

Χώρος στηλών μητρώου

Ορισμός

Για κάθε $A = [a_1, \ldots, a_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών

$$\{y | y = \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j, \xi_j \in \mathbb{R}\}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ που αποκαλείται χώρος στηλών του A. Ο υπόχωρος συμβολίζεται $\mathrm{range}(A)$.

Χώρος στηλών μητρώου

Ορισμός

Για κάθε $A = [a_1, \ldots, a_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών

$$\{y | y = \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j, \xi_j \in \mathbb{R}\}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ που αποκαλείται χώρος στηλών του A. Ο υπόχωρος συμβολίζεται $\mathrm{range}(A)$.

Γιατί είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$;

Χώρος στηλών μητρώου

Ορισμός

Για κάθε $A = [a_1, \ldots, a_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών

$$\{y | y = \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j, \xi_j \in \mathbb{R}\}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ που αποκαλείται χώρος στηλών του A. Ο υπόχωρος συμβολίζεται $\mathrm{range}(A)$.

Προσέξτε ότι $\mathrm{range}(A) = \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\}$.

Χώρος στηλών μητρώου

Ορισμός

Για κάθε $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών

$$\{y | y = \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j, \xi_j \in \mathbb{R}\}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ που αποκαλείται χώρος στηλών του A. Ο υπόχωρος συμβολίζεται $\mathrm{range}(A)$.

Προσέξτε ότι $\mathrm{range}(A) = \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\}$.

Το σύστημα $Ax = b$ **έχει λύση ανν** $b \in \mathrm{range}(A)$.

Μηδενόχωρος μητρώου

Ορισμός

Ο μηδενόχωρος $\mathrm{null}(A)$ ενός μητρώου $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ είναι ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{null}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$$

Μηδενόχωρος μητρώου

Ορισμός

Ο μηδενόχωρος $\mathrm{null}(A)$ ενός μητρώου $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ είναι ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{null}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$$

Ερμηνεία στηλών: Αποτελείται από όλα τα διανύσματα $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$ που αν τα θεωρήσουμε ως συντελεστές, μηδενίζουν τον παραγόμενο γραμμικό συνδυασμό των στηλών του A, δηλ. $\sum_{j=1}^{n} A_{:,j}\xi_j = 0$.

Ερμηνεία γραμμών: Αποτελείται από όλα τα διανύσματα που είναι κάθετα σε όλα τα διανύσματα-γραμμές του A, δηλ. $A_{i,:}x = 0, i = 1, \ldots, n$.

Μηδενόχωρος μητρώου

Ορισμός

Ο μηδενόχωρος $\mathrm{null}(A)$ ενός μητρώου $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ είναι ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{null}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$$

Γιατί είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$; (ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΤΕ)

Οι άλλοι 2 υπόχωροι:

Χώρος γραμμών: $\mathrm{range}(A^\top) = \{A^\top y | y \in \mathbb{R}^m\}$, (υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.)

Αριστερός μηδενόχωρος: $\mathrm{null}(A^\top) = \{y \in \mathbb{R}^m | A^\top y = 0\}$, (υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$. Ερμηνεία στηλών: Τα διανύσματα που είναι κάθετα σε όλες τις στήλες του A).

Θεμελιώδη προβλήματα γραμμικών συνδυασμών και διατύπωσή τους μέσω υποχώρων

Δίνεται μια συλλογή διανυσμάτων $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ όπου $a_j \in \mathcal{V}$. Θέτουμε $A = (a_1, \ldots, a_n)$ και διατυπώνουμε τα προβλήματς εναλλακτικά:

Άμεσο πρόβλημα Αν γνωρίζουμε τους βαθμωτούς $\xi_1, ..., \xi_n$ να υπολογίσουμε το γραμμικό συνδυασμό $\sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j$.

ισοδύναμα να βρείτε το στοιχείο $b \in \mathrm{range}(A)$ ώστε $b = Ax$ όπου $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$.

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας Κατά πόσον υπάρχουν $\xi_1, ..., \xi_n$, όχι όλα μηδενικά, τ.ώ. $\sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j = 0$.

ισοδύναμα να βρείτε αν υπάρχει μη μηδενικό $x \in \mathrm{null}(A)$.

Αντίστροφο πρόβλημα Δοθέντος ενός διανύσματος b, μπορούμε να το γράψουμε ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων του $\mathcal{A}$;

ίσοδύναμα αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $Ax = b$.

Ταυτοποίηση διανοίγματος Ποιό είναι το διάνοιγμα $\mathcal{Y} := \{y | y = \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j, \alpha_j \in \mathbb{R}\}$.

ίσοδύναμα ποιός είναι ο $\mathrm{range}(A)$;

Βάση διανυσματικού χώρου

Ορισμός

Ένα σύνολο διανυσμάτων, X, του δ.χ. $\mathcal{V}$ χαρακτηρίζεται **βάση** του $\mathcal{V}$ ανν

1. $\mathrm{span}(X) = \mathcal{V}$, και
2. Το X είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων

<u>Παράδειγμα</u> Τα $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$ (μερικές φορές αποκαλείται τυπική βάση.

<u>Παράδειγμα</u> Τα $\{1, \ldots, \zeta^n\}$ είναι βάση του $\mathbb{P}_n$ (σύνολο πολυωνύμων βαθμού n).

Διάσταση δ.χ.

Θεώρημα

Το πλήθος των διανυσμάτων βάσης ενός δ.χ. καλείται διάσταση του χώρου και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της βάσης.

Για κάθε δ.χ. ή υπόχωρο μπορούμε να πούμε ότι

☺ βάσεις υπάρχουν άπειρες, διάσταση μόνο μία ☺

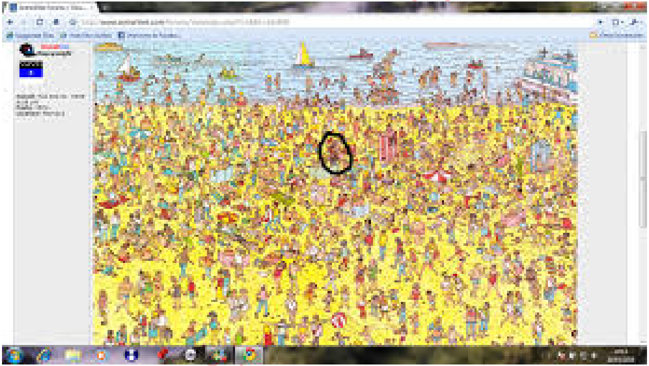
Ορισμός

Αν η βάση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}(\neq \emptyset)$ έχει *n* στοιχεία, τότε ο χώρος λέγεται *n*-**διάστατος** (ή ότι έχει διάσταση *n*) και γράφουμε $\dim(\mathcal{V}) = n$ ή $\dim \mathcal{V} = n$. Χάριν συνέπειας, και επειδή το μηδενικό διάνυσμα (0) ανήκει σε όλους τους διανυσματικούς χώρους, θέτουμε $\dim(0) = 0$. Ένας διανυσματικός χώρος $\mathcal{V}$ λέγεται πως είναι **πεπερασμένης διάστασης** αν έχει βάση $n < +\infty$ στοιχείων. Ειδάλλως, ο χώρος $\mathcal{V}$ χαρακτηρίζεται ως απειροδιάστατος.

<u>ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ:</u> Στο μάθημα αυτό ενδιαφερόμαστε αποκλειστικά για χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Βρες μια Βάση (βρες το Χώρο), Βρες τη/τις Λύσεις

Βρες μια Βάση (βρες το Χώρο), Βρες τη/τις Λύσεις



Οι **2** (+2) βασικοί διανυσματικοί υπόχωροι

και οι διαστάσεις τους

Δίνεται $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Τότε

1. ο δ.χ. διάνοιγμα των στηλών ονομάζεται χώρος στηλών του A, συμβ. $\mathrm{range}(A)$
2. ... ισχύει προφανώς $\dim(\mathrm{range}(A)) \leq m$
3. ο δ.χ. διάνοιγμα των γραμμών ονομάζεται ο χώρος γραμμών του A, $\mathrm{range}(A^\top)$
4. ... ισχύει προφανώς $\dim(\mathrm{range}(A^\top)) \leq n$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η διάσταση $r = \dim(\mathrm{range}(A)\ )$ αποκαλείται **ΤΑΞΗ** του A και συμβολίζεται επίσης ως $\mathrm{rank}(A)$. Είναι ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων στηλών.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Ο **ίδιος** αριθμός, r, είναι και ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του A.

$$\mathrm{rank}(A) = r = \dim(\mathrm{range}(A)) = \dim(\mathrm{range}(A^\top))$$

Η τάξη αφορά εξίσου γραμμές και στήλες, αποκαλύπτει τα μεγέθη των 4 υποχώρων και εντέλει πόση χρήσιμη πληροφορία περιέχει το μητρώο.

Μηδενόχωρος και επίλυση της $Ax = 0$

Ορολογία: Αν το δεξιό μέλος του συστήματος $Ax = b$ είναι 0, το χαρακτηρίζουμε ομογενές.
Ορισμός (υπενθύμιση): Ο μηδενόχωρος είναι το σύνολο των διανυσμάτων $\text{null}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ και είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Μηδενόχωρος και επίλυση της $Ax = 0$

Ορολογία: Αν το δεξιό μέλος του συστήματος $Ax = b$ είναι 0, το χαρακτηρίζουμε ομογενές.
Ορισμός (υπενθύμιση): Ο μηδενόχωρος είναι το σύνολο των διανυσμάτων $\mathrm{null}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ και είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.
Εύρεση: Τι σημαίνει *εύρεση υπόχωρου*;

Μηδενόχωρος και επίλυση της $Ax = 0$

Ορολογία: Αν το δεξιό μέλος του συστήματος $Ax = b$ είναι 0, το χαρακτηρίζουμε ομογενές.
Ορισμός (υπενθύμιση): Ο μηδενόχωρος είναι το σύνολο των διανυσμάτων $\mathrm{null}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ και είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.
Εύρεση: Τι σημαίνει *εύρεση υπόχωρου*;
Για να ορίσουμε υπόχωρο, αρκεί να βρούμε κάποια βάση του. Ο υπόχωρος θα είναι το διάνοιγμα των διανυσμάτων της βάσης του.

Μηδενόχωρος και επίλυση της $Ax = 0$

Ορολογία: Αν το δεξιό μέλος του συστήματος $Ax = b$ είναι 0, το χαρακτηρίζουμε ομογενές.
Ορισμός (υπενθύμιση): Ο μηδενόχωρος είναι το σύνολο των διανυσμάτων $\mathrm{null}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ και είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.
Εύρεση: Τι σημαίνει *εύρεση υπόχωρου*;
Για να ορίσουμε υπόχωρο, αρκεί να βρούμε κάποια βάση του. Ο υπόχωρος θα είναι το διάνοιγμα των διανυσμάτων της βάσης του.
Πρόβλημα: Συνήθως οι βάσεις ΔΕΝ είναι προφανείς απλά παρατηρώντας το A.

Μηδενόχωρος και επίλυση της $Ax = 0$

Ορολογία: Αν το δεξιό μέλος του συστήματος $Ax = b$ είναι 0, το χαρακτηρίζουμε ομογενές.
Ορισμός (υπενθύμιση): Ο μηδενόχωρος είναι το σύνολο των διανυσμάτων $\mathrm{null}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ και είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.
Εύρεση: Τι σημαίνει *εύρεση υπόχωρου;*
Για να ορίσουμε υπόχωρο, αρκεί να βρούμε κάποια βάση του. Ο υπόχωρος θα είναι το διάνοιγμα των διανυσμάτων της βάσης του.
Πρόβλημα: Συνήθως οι βάσεις ΔΕΝ είναι προφανείς απλά παρατηρώντας το A.
Διαδικασία

1. θα αναγάγουμε τον A σε ισοδύναμη «κλιμακωτή μορφή γραμμών»
2. ... από αυτή προκύπτει άμεσα η διάσταση του υπόχωρου
3. με απλή διαδικασία υπολογίζουμε και μία βάση.
4. και μετά θα κάνουμε μια ακόμα αναγωγή για να έχουμε εύκολη πρόσβαση σε όλες τις βάσεις

Απλό παράδειγμα

- Όλες οι λύσεις του $\xi + 2\psi + \zeta = 0$ είναι ένα επίπεδο, υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Το επίπεδο είναι ο μηδενόχωρος του $A = [1, 2, 1]$. Ισοδύναμα, είναι όλα τα σημεία που είναι κάθετα στην ευθεία που παράγεται από το διάνυσμα $(1, 2, 1)^\top$.
- Όλες οι λύσεις του

$$\begin{aligned} \xi - \psi + \zeta &= 0 \\ \xi - 2\psi - \zeta &= 0 \end{aligned}$$

  - είναι στο μηδενόχωρο $\mathrm{null}(A)$ του $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
  - (ισοδύναμα) κείται επί της ευθείας $t[3, 2, -1]^\top$ (όπου $t \in \mathbb{R}$) και είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ (η τομή των επιπέδων που ορίζονται από τα 2 παραπάνω επίπεδα).
  - (ισοδύναμα) είναι στην ευθεία που είναι κάθετη στον υπόχωρο

$$\mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Κλιμακωτή μορφή

Ένα μητρώο είναι σε κλιμακωτή μορφή γραμμών (row echelon form) αν ισχύουν τα εξής:

1. οι μηδενικές γραμμές (αν υπάρχουν) παρατίθενται τελευταίες,
2. το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο (οδηγός) κάθε (μη μηδενικής γραμμής) ανήκει σε στήλη που βρίσκεται αριστερότερα από οποιοδήποτε άλλο μη μηδενικό στοιχείο των γραμμών που έπονται,
3. (επομένως) τα στοιχεία στη στήλη κάτω από τον οδηγό είναι 0.
4. Ελεύθερη αποκαλείται κάθε στήλη που δεν περιέχει οδηγό. Ελεύθερες ονομάζονται και οι αντίστοιχες μεταβλητές.

Παράδειγμα: κλιμακωτή μορφή που προέκυψε από ένα μητρώο μεγέθους 6×8.

Οποιοδήποτε μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ μπορεί να αναχθεί σε κλιμακωτή μορφή γραμμών

Κλιμακωτή μορφή

Ένα μητρώο είναι σε κλιμακωτή μορφή γραμμών (row echelon form) αν ισχύουν τα εξής:

1. οι μηδενικές γραμμές (αν υπάρχουν) παρατίθενται τελευταίες,
2. το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο (οδηγός) κάθε (μη μηδενικής γραμμής) ανήκει σε στήλη που βρίσκεται αριστερότερα από οποιοδήποτε άλλο μη μηδενικό στοιχείο των γραμμών που έπονται,
3. (επομένως) τα στοιχεία στη στήλη κάτω από τον οδηγό είναι 0.
4. Ελεύθερη αποκαλείται κάθε στήλη που δεν περιέχει οδηγό. Ελεύθερες ονομάζονται και οι αντίστοιχες μεταβλητές.

Παράδειγμα: κλιμακωτή μορφή που προέκυψε από ένα μητρώο μεγέθους 6×8.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Οποιοδήποτε μητρώο $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ μπορεί να αναχθεί σε κλιμακωτή μορφή γραμμών

Κλιμακωτή μορφή και τάξη μητρώου

Αν U είναι η κλιμακωτή μορφή του A, τότε:

$$\boxed{\mathrm{rank}(A) = \#\ \text{ΟΔΗΓΩΝ}\ (A) = \#\ \text{ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ}\ (U) = \#\ \text{ΣΤΗΛΩΝ ΟΔΗΓΩΝ}}$$

Κλιμακωτή μορφή και τάξη μητρώου

Αν U είναι η κλιμακωτή μορφή του A, τότε:

$$\boxed{\mathrm{rank}(A) = \#\ \text{ΟΔΗΓΩΝ}\ (A) = \#\ \text{ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ}\ (U) = \#\ \text{ΣΤΗΛΩΝ ΟΔΗΓΩΝ}}$$

Προσοχή Για καθε μητρώο, η κλιμακωτή μορφή γραμμών είναι μοναδική ως προς τη μορφή της (που είναι τα μηδενικά και τα μη μηδενικά). ΔΕΝ είναι μοναδική όσον αφορά στις τιμές.

Κλιμακωτή μορφή και τάξη μητρώου

Αν U είναι η κλιμακωτή μορφή του A, τότε:

$$\boxed{\mathrm{rank}(A) = \# \text{ ΟΔΗΓΩΝ } (A) = \# \text{ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ } (U) = \# \text{ ΣΤΗΛΩΝ ΟΔΗΓΩΝ}}$$

Προσοχή Για καθε μητρώο, η κλιμακωτή μορφή γραμμών είναι μοναδική ως προς τη μορφή της (που είναι τα μηδενικά και τα μη μηδενικά). ΔΕΝ είναι μοναδική όσον αφορά στις τιμές.

Ισοδύναμα μητρώα Αν $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ τότε αποκαλούνται ισοδύναμα αν υπάρχουν αντιστρέψιμα P, Q τέτοια ώστε $B = PAQ$. Αν το B είναι κλιμακωτό, λέγεται ισοδύναμη κλιμακωτή μορφή του A.

Κλιμακωτή μορφή και τάξη μητρώου

Αν U είναι η κλιμακωτή μορφή του A, τότε:

$$\boxed{\mathrm{rank}(A) = \#\ \text{ΟΔΗΓΩΝ}\ (A) = \#\ \text{ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ}\ (U) = \#\ \text{ΣΤΗΛΩΝ ΟΔΗΓΩΝ}}$$

Προσοχή Για καθε μητρώο, η κλιμακωτή μορφή γραμμών είναι μοναδική ως προς τη μορφή της (που είναι τα μηδενικά και τα μη μηδενικά). ΔΕΝ είναι μοναδική όσον αφορά στις τιμές.

Ισοδύναμα μητρώα Αν $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ τότε αποκαλούνται ισοδύναμα αν υπάρχουν αντιστρέψιμα P, Q τέτοια ώστε $B = PAQ$. Αν το B είναι κλιμακωτό, λέγεται ισοδύναμη κλιμακωτή μορφή του A.

Ένα μητρώο μετασχηματίζεται σε ισοδύναμη κλιμακωτή μορφή με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς (Gauss και εναλλαγής).

Παράδειγμα I

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Τότε οι μετασχηματισμοί (εύκολοι) οδηγούν σε άνω κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε αμέσως ότι:

Τάξη: είναι $\mathrm{rank}(A) = 2$ (= πλήθος μη μηδενικών γραμμών = πλήθος οδηγών)

Παράδειγμα II

Βάση χώρου στηλών: οι στήλες οδηγών του A.

$$\text{range}(A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right\}$$

Βάση μηδενόχωρου: Ο μηδενόχωρος έχει διάσταση $n-r$, δηλ. όσο και το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών. Η βάση θα προκύψει από την κλιμακωτή μορφή μετά από λίγη επεξεργασία (στη συνέχεια).

Ζητούμενα Επίλυση του $Ax = 0$ (πέραν του $x = 0$): Εντοπίζουμε τις στήλες οδηγούς και τους αντίστοιχους αγνώστους. Στην περίπτωσή μας είναι οι $\{\xi_1, \xi_4\}$. Οι ελεύθερες στήλες αντιστοιχούν στους $\{\xi_2, \xi_3\}$. Προκύπτουν $r = 2$ εξισώσεις για 4 αγνώστους:

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 &= 0 \\ \xi_4 &= 0 \end{aligned}$$

Παράδειγμα III

Επιλέγουμε να λύσουμε για τους αγνώστους των οδηγών στηλών ως προς τις ελεύθερες μεταβλητές:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -2\xi_2 - \xi_3 \\ \xi_4 &= 0 \end{aligned}$$

Συστηματικά: Θέτουμε μία ελεύθερη μεταβλητή 1 και τις υπόλοιπες 0. Παρακάτω, το 1ο διάνυσμα προέκυψε θέτοντας $\xi_2 = 1, \xi_3 = 0$ και το 2ο λύση θέτοντας $\xi_2 = 0, \xi_3 = 1$.

$$\mathrm{null}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Η πλήρης λύση του $Ax = 0$ προκύπτει από γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων βάσης του μηδενόχωρου $\mathrm{null}(A)$.

Πλήρης λύση του $Ax = 0$: γραμμικός συνδυασμός των ειδικών λύσεων

$$x = \begin{pmatrix} -2\xi_2 - \xi_3 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \xi_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ορολογία

- Τα διανύσματα βάσης του $\mathrm{null}(A)$ του λέγονται ειδικές λύσεις.
- Το μητρώο των διανυσμάτων βάσης του $\mathrm{null}(A)$ λέγεται μητρώο μηδενόχωρου.

Παραδείγματα (1): Εύρεση τάξης και πλήρους λύσης του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα (1): Εύρεση τάξης και πλήρους λύσης του $Ax = 0$

<ins>Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή</ins>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα (1): Εύρεση τάξης και πλήρους λύσης του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_2(L_1 A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συμπέρασμα 1: $r = \mathrm{rank}(A) = 2$

Παραδείγματα (1): Εύρεση τάξης και πλήρους λύσης του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_2(L_1 A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συμπέρασμα 1: $r = \mathrm{rank}(A) = 2$

Συμπέρασμα 2: $\dim(\mathrm{null}(A)) = n - r = 2 - 2 = 0.$

Παραδείγματα (1): Εύρεση τάξης και πλήρους λύσης του $Ax = 0$

Βήμα 2: Υπολογισμός πλήρους λύσης: Παρατήρηση: Ήδη έχουμε συμπεράνει ότι ο $\mathrm{null}(A) = \emptyset$ επομένως δεν πρέπει να αναμένουμε άλλη λύση του $Ax = 0$ πέραν της τετριμμένης. ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΣΗ: $Ax = 0 \Leftrightarrow (P_2 L_1)Ax = 0 \Leftrightarrow Ux = 0$

Επίλυση $Ux = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$r = 2$ οδηγοί, $\{\xi_1, \xi_2\}$, λύνουμε με πίσω αντικατάσταση,

$$\xi_2 = 0 \Rightarrow \xi_1 = 0,$$

επομένως η μοναδική λύση του $Ax = 0$ είναι η τετριμμένη λύση $x = 0$, επομένως $\dim(\mathrm{null}(A)) = 0$ όπως ήταν αναμενόμενο.

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συμπέρασμα 1: $r = \mathrm{rank}(A) = 1$

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συμπέρασμα 1: $r = \mathrm{rank}(A) = 1$

Συμπέρασμα 2: $\dim(\mathrm{null}(A)) = n - r = 2 - 1 = 1.$

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 2: Υπολογισμός πληρους λύσης: $Ax = 0 \Leftrightarrow L_1 Ax = 0 \Leftrightarrow Ux = 0$

Επίλυση $Ux = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$r = 1$ οδηγός, $\{\xi_1\}$, λύνουμε με πίσω αντικατάσταση,

$$\xi_1 = -2\xi_2 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -2\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

Θέτουμε το ελεύθερο άγνωστο $\xi_2 = 1$, άρα η πλήρης λύση είναι $x = \xi_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

επομένως

$$\mathrm{null}(A) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Προσέξτε ότι $\dim(\mathrm{null}(A)) = 1$ όπως ήταν αναμενόμενο.

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, L_2(L_1 A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, L_2(L_1 A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συμπέρασμα 1: $r = \mathrm{rank}(A) = 2$

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

<u>Βήμα 1: Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, L_2(L_1 A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Συμπέρασμα 1:</u> $r = \mathrm{rank}(A) = 2$

<u>Συμπέρασμα 2:</u> $\dim(\mathrm{null}(A)) = n - r = 3 - 2 = 1.$

Παραδείγματα (2): Τάξη και πλήρης λύση του $Ax = 0$

Βήμα 2: Υπολογισμός πληρους λύσης: $Ax = 0 \Leftrightarrow L_2L_1Ax = 0 \Leftrightarrow Ux = 0$

Επίλυση $Ux = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$r = 2$ οδηγοί, $\{\xi_1, \xi_2\}$, λύνουμε με πίσω αντικατάσταση ,τοποθετώντας τον ελεύθερο άγνωστο ξ_3 ως δεξιό μέλος

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 &= -\xi_3 \\ -2\xi_2 &= -\xi_3 \end{aligned}$$

Θέτουμε $\xi_3 = 1$, οπότε $x = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, επομένως

$$\mathrm{null}(A) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

και η πλήρης λύση του $Ax = 0$ είναι

$$x = \xi_3 \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\xi_3 \\ \frac{1}{2}\xi_3 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

Προσέξτε ότι $\dim(\mathrm{null}(A)) = 1$ όπως ήταν αναμενόμενο.

Οι **2** (+2) βασικοί διανυσματικοί υπόχωροι

και οι διαστάσεις τους

Δίνεται $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε

1. ο δ.χ. διάνοιγμα των στηλών ονομάζεται χώρος στηλών του A, συμβ. $\mathrm{range}(A)$
2. ... ισχύει προφανώς $\dim(\mathrm{range}(A)) \leq m$
3. ο δ.χ. διάνοιγμα των γραμμών ονομάζεται ο χώρος γραμμών του A, $\mathrm{range}(A^\top)$
4. ... ισχύει προφανώς $\dim(\mathrm{range}(A^\top)) \leq n$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> Η διάσταση $r = \dim(\mathrm{range}(A)\ )$ αποκαλείται **ΤΑΞΗ** του A και συμβολίζεται επίσης ως $\mathrm{rank}(A)$. Είναι ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων στηλών.
<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> Ο **ίδιος** αριθμός, r, είναι και ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του A.

$$\mathrm{rank}(A) = r = \dim(\mathrm{range}(A)) = \dim(\mathrm{range}(A^\top))$$

- Η τάξη αφορά εξίσου γραμμές και στήλες, αποκαλύπτει τα μεγέθη των 4 υποχώρων και εντέλει πόση χρήσιμη πληροφορία περιέχει το μητρώο.
- Ο Strang αποκαλεί Θεμελιώδες Θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας (I) το ότι $\dim(\mathrm{range}(A)) = \dim(\mathrm{range}(A^\top)) = r$ και ότι $\dim(\mathrm{null}(A)) = n - r$ και $\dim(\mathrm{null}(A^\top)) = m - r$.

Τι σημαίνει εύρεση χώρου;

Εύρεση υποχώρου: σημαίνει *εύρεση βάσης*;

Πρόβλημα: Συνήθως ούτε οι βάσεις ούτε οι διαστάσεις των υποχώρων φαίνονται απλά παρατηρώντας το A.

Αντιμετώπιση: Προσπαθούμε να μετασχηματίσουμε το A σε πιο αποκαλυπτικές, ισοδύναμες μορφές.

1) Κλιμακωτή μορφή γραμμών

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Προσοχή

(σελ. 172-4 Strang)

- Αν το A είναι $m \times n$ και $m < n$ τότε η $Ax = 0$ πάντα διαθέτει μη μηδενική λύση. Στην περίπτωση αυτή, το $Ax = b$ έχει άπειρες ή καμία λύση.

Προσοχή

(σελ. 172-4 Strang)

- Αν το A είναι $m \times n$ και $m < n$ τότε η $Ax = 0$ πάντα διαθέτει μη μηδενική λύση. Στην περίπτωση αυτή, το $Ax = b$ έχει άπειρες ή καμία λύση.
- Οι στήλες οδηγών του A δεν είναι γραμμικοί συνδυασμοί των προηγούμενων στηλών. Οι ελεύθερες στήλες είναι συνδυασμοί των προηγούμενων στηλών.

Προσοχή

(σελ. 172-4 Strang)

- Αν το A είναι $m \times n$ και $m < n$ τότε η $Ax = 0$ πάντα διαθέτει μη μηδενική λύση. Στην περίπτωση αυτή, το $Ax = b$ έχει άπειρες ή καμία λύση.
- Οι στήλες οδηγών του A δεν είναι γραμμικοί συνδυασμοί των προηγούμενων στηλών. Οι ελεύθερες στήλες είναι συνδυασμοί των προηγούμενων στηλών.
- Λέμε ότι ο A έχει πλήρη τάξη γραμμών αν κάθε γραμμή έχει έναν οδηγό, δηλ. $r = m$. Τότε το U δεν περιέχει μηδενικές γραμμές.
- Λέμε ότι ο A έχει πλήρη τάξη στηλών αν κάθε στήλη έχει έναν οδηγό, δηλ. $r = n$. Τότε δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές.
- Ένα $m \times n$ μητρώο είναι αντιστρέψιμο ανν ειναι τετραγωνικό και πλήρους τάξης, δηλ. $r = m = n$.
- Το σύστημα $Ax = b$ έχει τουλάχιστον μια λύση ανν $\mathrm{range}([A, b]) = \mathrm{range}(A)$. Αν $\mathrm{range}([A, b]) \neq \mathrm{range}(A)$, το σύστημα δεν έχει λύση (ασυνεπές).