ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ε. Γαλλόπουλος & Ε. Στεφανόπουλος

CEID

Διάλεξη 5

13 Μαρτίου 2018

Έννοιες, λέξεις κλειδιά, υπενθύμιση I

Υπενθύμιση της 4ης δ.

- Επίλυση γραμμικών συστημάτων: Εισαγωγή.
- Γεωμετρική ερμηνεία επίλυσης γραμμικού συστήματος: ερμηνεία κατά γραμμές, ερμηνεία κατά στήλες.
- Διαμέριση μητρώων, υπομητρώα, σύνθετα μητρώα: Συμβολισμοι και πράξεις.
- Ερμηνείες πολλαπλασιασμού μητρώων με χρήση σύνθετων μητρώων.
- Αντίστροφο κατά πλοκάδες (μπλοκ) τριγωνικού μητρώου.
- Επίλυση γραμμικού συστήματος με απαλοιφή Gauss και πίσω αντικατάσταση (επίλυση του ισοδύναμου άνω τριγωνικού συστήματος).

Έννοιες, λέξεις κλειδιά, υπενθύμιση II

Σήμερα θα δούμε (όροι 5ης δ.):

- Απαλοιφή Gauss και παραγοντοποίηση LU.
- Στοιχειώδη μητρώα Gauss για την απαλοιφή και μεθοδολογία επίλυσης τετραγωνικών συστημάτων.
- Απαλοιφή Gauss: Χρήση εναλλαγών για την αποφυγή μηδενικών οδηγών και οδήγηση με μητρώα εναλλαγής και μητρώα μετάθεσης.
- Διαδικασία απαλοιφής Gauss ως μετασχηματισμός του $[A, b]$ σε $[U, \hat{b}]$ με διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς με ς.μ. Gauss και εναλλαγής.
- Παραγοντοποίηση LU και επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων.
- Εφαρμογή: α) Υπολογισμός τιμών πολυωνυμικής συνάρτησης και μητρώα Vandermonde και β) εύρεση πολυωνύμου (συντελεστών της δυναμομορφής) με βάση τις τιμές του (παρεμβολή).
- Επαυξημένο μητρώο.
- Μέθοδος Gauss-Jordan αντιστροφής μητρώου.
- Στοιχεία άλγεβρας (ομάδες, δακτύλιοι, σώματα)
- Εισαγωγή στους διανυσματικούς χώρους. Παραδείγματα.

Υπό συζήτηση ενότητες

Επίλυση με αναγωγή σε άνω τριγωνική μορφή $Ux = \hat{b}$

<u>ΕΡΩΤΗΜΑ</u> Πώς πετυχαίνουμε την αναγωγή του A στη μορφή U;

Κάτι σαν

$$MA = U \Rightarrow M(Ax) = Mb \Rightarrow \underbrace{(MA)}_{U} x = \underbrace{Mb}_{\hat{b}}$$

Θα παρουσιάσουμε μία μέθοδο βαθμιαίας μετατροπής του μητρώου A σε άνω τριγωνικό.

Αρχικοποίηση $A^{(0)} = A$
for $k = 1, \ldots, n-1$ **do**
  Μηδενισμός όλων των τιμών κάτω από την κύρια διαγώνιο στη στήλη k του τρέχοντος μητρώου $A^{(k-1)}$
  Αντίστοιχος μετασχηματισμός του δεξιού διανύσματος
end for

Ό,τι αλλαγές χρειάζονται μπορούν να επιτευχθούν αποκλειστικά με πολλαπλασιασμούς από τα αριστερά με ειδικά *στοιχειώδη μητρώα*.

Δύο βασικά στοιχειώδη μητρώα:

(1) Μητρώο Gauss L_k μηδενίζει το διάνυσμα στις θέσεις κάτω από τη γραμμή k:

Παράδειγμα Έστω $x = [4, 3, 2, 1]^\top$. Τότε

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{3}{4} & 1 & & \\ -\frac{2}{4} & 0 & 1 & \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_1 x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, L_2 x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, L_3 x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Δύο βασικά στοιχειώδη μητρώα:

(2) Μητρώο εναλλαγής $P_{k,j}$ Εναλλάσσει τις γραμμές k και j του διανύσματος που πολλαπλασιάζει (θεωρούμε ότι $k < j$)

Παράδειγμα Έστω $x = [1,2,3,4]^\top$. Τότε

$$P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_{1,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{1,2}x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, P_{1,3}x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, P_{1,4}x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{2,3}x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, P_{2,4}x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, P_{3,4}x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{4} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{4} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_1 b = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{5}{2} & \frac{15}{4} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{4} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_1 b = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}, L_1 A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{5}{2} & \frac{15}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{7} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_2(L_1 b) = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{12}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix}, L_2(L_1 A) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{12}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{20}{7} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}4&3&2&1\\3&4&3&2\\2&3&4&3\\1&2&3&4\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}3\\2\\3\\2\end{pmatrix} \Rightarrow L_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-\frac{3}{4}&1&0&0\\-\frac{2}{4}&0&1&0\\-\frac{1}{4}&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$L_1 b=\begin{pmatrix}3\\-\frac{1}{4}\\\frac{3}{2}\\\frac{5}{4}\end{pmatrix}, L_1 A=\begin{pmatrix}4&3&2&1\\0&\frac{7}{4}&\frac{3}{2}&\frac{5}{4}\\0&\frac{3}{2}&3&\frac{5}{2}\\0&\frac{5}{4}&\frac{5}{2}&\frac{15}{4}\end{pmatrix} \Rightarrow L_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-\frac{6}{7}&1&0\\0&-\frac{5}{7}&0&1\end{pmatrix},$$

$$L_2(L_1 b)=\begin{pmatrix}3\\-\frac{1}{4}\\\frac{12}{7}\\\frac{10}{7}\end{pmatrix}, L_2(L_1 A)=\begin{pmatrix}4&3&2&1\\0&\frac{7}{4}&\frac{3}{2}&\frac{5}{4}\\0&0&\frac{12}{7}&\frac{10}{7}\\0&0&\frac{10}{7}&\frac{20}{7}\end{pmatrix} \Rightarrow L_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-\frac{5}{6}&1\end{pmatrix}$$

$$L_3(L_2(L_1 b))=\begin{pmatrix}3\\-\frac{1}{4}\\\frac{12}{7}\\0\end{pmatrix}, L_3(L_2(L_1 A))=\begin{pmatrix}4&3&2&1\\0&\frac{7}{4}&\frac{3}{2}&\frac{5}{4}\\0&0&\frac{12}{7}&\frac{10}{7}\\0&0&0&\frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

Επίλυση με απαλοιφή Gauss

Αναγωγή σε άνω τριγωνικό $Ax = b \Leftrightarrow L_3L_2L_1Ax = L_3L_2L_1b \Leftrightarrow Ux = \hat{b}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{12}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{12}{7} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Πίσω αντικατάσταση

<u>Βήμα 1:</u> $\frac{5}{3}\xi_4 = 0 \Rightarrow \xi_4 = 0,$

<u>Βήμα 2:</u> $\frac{12}{7}\xi_3 = \frac{12}{7} - \frac{10}{7}\overbrace{0}^{\xi_4} \Rightarrow \xi_3 = 1,$

<u>Βήμα 3:</u> $\frac{7}{4}\xi_2 = -\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\overbrace{1}^{\xi_3} - \frac{5}{4}\overbrace{0}^{\xi_4} \Rightarrow \xi_2 = -1,$

<u>Βήμα 4:</u> $4\xi_1 = 3 - 3\overbrace{(-1)}^{\xi_2} - 2\overbrace{1}^{\xi_3} - 1\overbrace{0}^{\xi_4} \Rightarrow \xi_1 = 1.$

Επαλήθευση

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

☺

Στοιχειώδες μητρώο Gauss

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_k \\ \xi_{k+1} \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \Rightarrow L_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & -\xi_{k+1}/\xi_k & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & -\xi_{k+2}/\xi_k & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\xi_n/\xi_k & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Μητρώο Gauss L_k μηδενίζει το διάνυσμα στις θέσεις κάτω από τη γραμμή k:

Παράδειγμα Έστω $x = [4,3,2,1]^\top$. Τότε

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{3}{4} & 1 & & \\ -\frac{2}{4} & 0 & 1 & \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_1 x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, L_2 x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, L_3 x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Σχόλια

- Πολλαπλασιάζοντας με στ.μ. Gauss επιτυγχάνουμε σταδιακά την αναγωγή του A σε άνω τριγωνική μορφή.
- Όποτε χρειάζεται, αρχίζοντας από το $A^{(0)} = A$, θα ονομάζουμε $A^{(k)}, k = 1, \ldots, n-1$ το μητρώο που έχει προκύψει μετά από k βήματα της διαδικασίας.
- Θα ονομάζουμε τα στοιχείο με τα οποίο επιχειρούμε το μηδενισμό οδηγούς (pivots).
- Στα παραπάνω, οι οδηγοί είναι τα στοιχεία $\alpha_{1,1}^{(0)}, \alpha_{2,2}^{(1)}, \cdots, \alpha_{n-1,n-1}^{(n-2,n-2)}$.

ΕΜΠΟΔΙΟ: Αν παρουσιαστεί μηδενικός οδηγός; · Υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: μπορούμε να παρακάμψουμε το πρόβλημα με κατάλληλη στρατηγική τροποποίησης

Περίπτωση 2: το μητρώο δεν είναι αντιστρέψιμο και η μέθοδος αστοχεί (δεν υπάρχει λύση).

The Big Picture

$$Ax = b \Rightarrow L_{n-1} \cdots L_1 Ax = L_{n-1} \cdots L_1 b$$
$$Ux = \hat{b}$$
$$A = (L_{n-1} \cdots L_1)^{-1} U = L_1^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} U$$

επομένως έχουμε την παραγοντοποίηση LU

$$A = LU, L = L_1^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}$$

Προσοχή: Να επαληθεύσετε ότι το L περιέχει κάτω από τη διαγώνιο κάθε στήλης j τα (αρνητικά) στοιχεία της στήλης j του L_j.
Κόστος Η παραγοντοποίηση LU επιτυγχάνεται σε $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ αριθμητικές πράξεις.

Εμπόδια και διαχείριση μηδενικών οδηγών I

- Πολλαπλασιάζοντας με στ.μ. Gauss επιτυγχάνουμε σταδιακά την αναγωγή του A σε άνω τριγωνική μορφή.
- Όποτε χρειάζεται, αρχίζοντας από το $A^{(0)} = A$, θα ονομάζουμε $A^{(k)}, k = 1, \ldots, n-1$ το μητρώο που έχει προκύψει μετά από k βήματα της διαδικασίας.

> Σε κάθε βήμα, η γραμμή που χρησιμοποιείται για να μηδενίσουμε στοιχεία ονομάζεται γραμμή οδηγός και το στοιχείο που χρησιμοποιείται για την απαλοιφή καλείται οδηγός.

- Στα παραπάνω, οι οδηγοί είναι τα στοιχεία $\alpha_{1,1}^{(0)}, \alpha_{2,2}^{(1)}, \cdots, \alpha_{n-1,n-1}^{(n-2,n-2)}$.

ΖΗΤΗΜΑ Τι κάνουμε αν ο ο «υποψήφιος οδηγός» είναι μηδέν;

Περίπτωση 1: Το πρόβλημα παρακάμπτεται με εναλλαγή γραμμών

Περίπτωση 2: Το μητρώο δεν είναι αντιστρέψιμο (δεν υπάρχει λύση ή υπάρχουν άπειρες λύσεις)

Εμπόδια και διαχείριση μηδενικών οδηγών II

Οδήγηση: Απαλοιφή Gauss εφαρμόζοντας κατάλληλα επιλεγμένες **εναλλαγές γραμμών και στηλών** (εξισώσεων και αγνώστων).

Πριν το βήμα k της διαδικασίας:

Απλή οδήγηση: αν το στοιχείο στη θέση (k,k) είναι μη μηδενικό, δεν κάνουμε τίποτα. Αν είναι 0, φέρνουμε μη μηδενικό στοιχείο στη θέση του οδηγού εναλλάσσοντας τη γραμμή k με μία από τις γραμμές $k+1$ ως n που δεν περιέχει μηδέν στη στήλη k.

Μερική οδήγηση: Όπως και στην απλή οδήγηση, αλλά επιλέγουμε και εναλλάσσουμε με τη γραμμή με το μέγιστο σε μέτρο στοιχείο στις θέσεις $k+1,\ldots,n$ στη στήλη k.

Προσοχή: Αν όλα τα στοιχεία στις θέσεις $(k,k),(k+1,k),\ldots,(n,k)$ είναι 0, τότε το μητρώο είναι μη αντιστρέψιμο.

Πλήρης οδήγηση: Επιλέγουμε να φέρουμε στη θέση (k,k) και να χρησιμοποιήσουμε ως οδηγό το μέγιστο σε μέτρο στοιχείο στις θέσεις $(k:n,k:n)$. Αυτό απαιτεί εναλλαγές γραμμών και στηλών.

Μητρώα μετάθεσης

Στην επίλυση συστημάτων, πολλές φορές πρέπει να κάνουμε πολλές εναλλαγές τις οποίες μπορούμε να εκφράσουμε ως γινόμενο μητρώων εναλλαγής.

Μητρώα μετάθεσης

Στην επίλυση συστημάτων, πολλές φορές πρέπει να κάνουμε πολλές εναλλαγές τις οποίες μπορούμε να εκφράσουμε ως γινόμενο μητρώων εναλλαγής.

Μητρώο μετάθεσης αποκαλείται κάθε μητρώο που έχει προέλθει από μετάθεση των γραμμών (ή στηλών) του ταυτοτικού μητρώου.

Μητρώα μετάθεσης

Στην επίλυση συστημάτων, πολλές φορές πρέπει να κάνουμε πολλές εναλλαγές τις οποίες μπορούμε να εκφράσουμε ως γινόμενο μητρώων εναλλαγής.

Μητρώο μετάθεσης αποκαλείται κάθε μητρώο που έχει προέλθει από μετάθεση των γραμμών (ή στηλών) του ταυτοτικού μητρώου.

Προσέξτε:

1. Κάθε γινόμενο μητρώων εναλλαγής είναι μητρώο μετάθεσης.
2. Κάθε μητρώο μετάθεσης μπορεί να γραφτεί σαν γινόμενο μητρώων εναλλαγής (μη μοναδικά).
3. Η μετάθεση χαρακτηρίζεται ως άρτια ή περιττή ανάλογα με το πλήθος των παραγόντων στην γραφή του μητρώου μετάθεσης ως γινομένου μητρώων εναλλαγής.
4. Η

Μητρώα μετάθεσης και αντιστροφή

Παρατήρηση: Το αντίστροφο κάθε μητρώου μετάθεσης είναι και αυτό μητρώο μετάθεσης.

$$(P_{2,j_2}P_{1,j_1})^{-1} = P_{1,j_1}^{-1}P_{2,j_2}^{-1} = P_{1,j_1}^{\top}P_{2,j_2}^{\top} = P_{1,j_1}P_{2,j_2}$$

- $P^{-1} = P^{\top}$, δηλ. κάθε μητρώο μετάθεσης είναι ορθογώνιο.
- Ειδική περίπτωση: Το μητρώο εναλλαγής είναι συμμετρικό και είναι το αντίστροφό του, δηλ. $P = P^{\top}$ και $P^2 = I$.

Απλή οδήγηση I

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Προσοχή: Ως έχει, δεν μπορούμε να μηδενίσουμε .... ΜΗΠΩΣ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΛΥΣΗ; 🙁

Απλή οδήγηση II

Παράδειγμα

$$P_{1,2}A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, P_{1,2}b = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_1 P_{1,2} b = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ \frac{25}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \underbrace{L_1 P_{1,2} A}_{A^{(1)}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & \frac{5}{3} \\ 0 & 2 & 2 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_2(L_1(P_{1,2}b)) = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ \frac{22}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \underbrace{L_2(L_1(P_{1,2}A))}_{A^{(2)}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3(L_2(L_1(P_{1,2}b))) = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ \frac{22}{3} \\ \frac{11}{9} \end{pmatrix}, \underbrace{L_3(L_2(L_1(P_{1,2}A)))}_{A^{(3)}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

Απλή οδήγηση III

Παράδειγμα

Προσέξτε την παραγοντοποίηση LU:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

Επίλυση με απαλοιφή Gauss με απλή οδήγηση

Αναγωγή σε άνω τριγωνικό $Ax = b \Leftrightarrow L_3L_2L_1P_{1,2}Ax = L_3L_2L_1P_{1,2}b \Leftrightarrow Ux = \hat{b}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ \frac{22}{3} \\ \frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

Πίσω αντικατάσταση

Βήμα 1: $-\frac{11}{9}\xi_4 = \frac{11}{9} \Rightarrow \xi_4 = -1,$

Βήμα 2: $-4\xi_3 = \frac{22}{3} - \frac{2}{3}\overbrace{(-1)}^{\xi_4} \Rightarrow \xi_3 = -2,$

Βήμα 3: $3\xi_2 = 1 - 2\overbrace{(-2)}^{\xi_3} - 1\overbrace{(-1)}^{\xi_4} \Rightarrow \xi_2 = 2,$

Βήμα 4: $3\xi_1 = -5 - 0\overbrace{\ 2\ }^{\xi_2} - 3\overbrace{(-2)}^{\xi_3} - 2\overbrace{(-1)}^{\xi_4} \Rightarrow \xi_1 = 1.$

Επαλήθευση

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

🙂🙂🙂

Προσοχή:

- Μπορεί ένα μητρώο να είναι αντιστρέψιμο ΚΑΙ να έχει 0 στη διαγώνιο!

Επαλήθευση

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

☺☺☺

<u>Προσοχή:</u>

- Μπορεί ένα μητρώο να είναι αντιστρέψιμο ΚΑΙ να έχει 0 στη διαγώνιο!
- Μπορεί ένα μητρώο να είναι ιδιόμορφο ΚΑΙ η διαγώνιός του να μην περιέχει 0!

Επαλήθευση

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Προσοχή:

- Μπορεί ένα μητρώο να είναι αντιστρέψιμο ΚΑΙ να έχει 0 στη διαγώνιο!
- Μπορεί ένα μητρώο να είναι ιδιόμορφο ΚΑΙ η διαγώνιός του να μην περιέχει 0!
- Μπορεί να χρειαστεί εναλλαγή σε επόμενο βήμα!

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, P_{1,2}A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{(1)} = L_1 P_{1,2} A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 2 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

προσέξτε ότι $\alpha_{2,2}^{(1)} \neq 0$ επομένως δεν χρειάστηκε εναλλαγή,

$$A^{(2)} = L_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -2 \end{pmatrix},$$

όμως $\alpha_{3,3}^{(2)} = 0$, επομένως εναλλαγή

$$P_{3,4} A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

που είναι άνω τριγωνικό.

Διαχωρισμός στοιχειωδών μητρώων: εναλλαγής από Gauss

Έστω ότι συμβολίζουμε τις εναλλαγές με P_j όπου υπονοείται ότι αφορά σε εναλλαγή της γραμμής j με γραμμή j (οπότε τετριμμένη εναλλαγή, δηλ. $P_{j,j} = I$) ή με μία από τις γραμμές $j+1, j+2, \dots, n$.
π.χ. αν $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, ισχύει (αφού $P_j P_j = I$):

$$
\begin{aligned}
L_3 P_3 L_2 P_2 L_1 P_1 A &= U \\
A &= (L_3 P_3 L_2 P_2 L_1 P_1)^{-1} U = P_1 L_1^{-1} P_2 L_2^{-1} P_3 L_3^{-1} U \\
P_1 A &= L_1^{-1} P_2 L_2^{-1} P_3 L_3^{-1} U \\
\underbrace{P_3 P_2 P_1}_{P} A &= \underbrace{(P_3 P_2 L_1^{-1} P_2 P_3)}_{\hat{L}_1} \underbrace{(P_3 L_2^{-1} P_3)}_{\hat{L}_2} \underbrace{L_3^{-1}}_{\hat{L}_3} U
\end{aligned}
$$

επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$PA = \underbrace{\hat{L}_1 \hat{L}_2 \hat{L}_3}_{L} U = LU$$

Βασικά θεωρήματα παραγοντοποίησης LU

1ο θεώρημα παραγοντοποίησης LU

Εστω αντιστρέψιμο μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ για το οποίο ισχύει ότι τα $n-1$ πρωτεύοντα κύρια υπομητρώα $A_{1:k,1:k}$, $k = 1, \ldots, n-1$ του είναι αντιστρέψιμα, Τότε υπάρχουν κάτω τριγωνικό μητρώο L με όλα τα διαγώνια στοιχεία ίσα με την μονάδα και άνω τριγωνικό μητρώο U τέτοια ώστε $A = LU$. Οι παράγοντες L, U είναι μοναδικοί.

2ο θεώρημα παραγοντοποίησης LU (με οδήγηση)

Έστω αντιστρέψιμο μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε υπάρχουν κάτω τριγωνικό μητρώο L με μονάδες στη διαγώνιο, άνω τριγωνικό μητρώο U και μητρώο μετάθεσης P τέτοια ώστε $LU = PA$.

Προσοχή (Ι): Συνήθως, όταν λέμε ότι ¨εφαρμόζουμε LU σε ένα μητρώο, εννοούμε παραγοντοποίηση τύπου $PA = LU$.
Προσοχή (ΙΙ): Μη ύπαρξη παραγοντοποίησης LU με οδήγηση ισοδυναμεί με έλλειψη αντιστρεψιμότητας.

Απαλοιφή Gauss

- $[A,b] \rightarrow L_1P_1[A,b] \rightarrow L_2P_2L_1P_1[A,b] \rightsquigarrow\longrightarrow [Ux, L_{n-1}P_{n-1}\cdots L_1P_1b]$
- Πίσω αντικατάσταση $Ux = \hat{b}$

Παραγοντοποίηση LU

- $A \rightarrow L_1P_1A \longrightarrow L_{n-1}P_{n-1}\cdots L_1P_1A = U$
- Εμπρός αντικατάσταση: $Ly = P_{n-1}\cdots P_1b$, όπου $L = \hat{L}_1\cdots\hat{L}_{n-1}$ όπως σε προηγούμενη ανάλυση
- Πίσω αντικατάσταση $Ux = y$

Παρατηρήσεις:

- Το κυρίαρχο κόστος σε πράξεις είναι $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$.
- Εφόσον υπολογίσουμε την παραγοντοποίηση LU, αυτή μπορεί να επαναχρησιμοποιηθεί για να λύσουμε για πολλά δεξιά μέλη, π.χ. $Ax_1 = b_1, Ax_2 = b_2, Ax_3 = b_3, \ldots$

Παράδειγμα

Υπολογισμος τιμών γραμμικής συνάρτησης

Ζητούμενο Δίνεται η συνάρτηση $\psi = 3\xi + 2$ και θέλουμε να υπολογίσουμε τις τιμές του ψ για πολλές διαφορετικές τιμές του ξ. Θα μπορούσε να είναι η εξίσωση μιας ευθείας και έστω ότι θέλουμε να βρούμε τις τεταγμένες $\psi_1, \ldots, \psi_m$ από τις τετμημένες $\xi_1, \ldots, \xi_m$ ώστε να οπτικοποιήσουμε την ευθεία συνδέοντας τα σημεία $\{(\xi_j, \psi_j) | j = 1, ..., m\}$.
Ιδέα Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει ως εξής: 1) κατασκευάζουμε το διάνυσμα $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)^\top$, το μητρώο $A = (e, x)$. 2) και το διάνυσμα $p = (2, 3)^\top$. 2) Υπολογίζουμε το γινόμενο $y = Ap$:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 \\ 1 & \xi_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \xi_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

Υπολογισμος τιμών τετραγωνικής συνάρτησης (πολυωνύμου)

Ζητούμενο Δίνεται η συνάρτηση $\psi = 3\xi^2 + \xi - 1$ και θέλουμε να υπολογίσουμε τις τιμές του ψ για πολλές διαφορετικές τιμές του ξ.
Ιδέα Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει ως εξής: 1) κατασκευάζουμε το διάνυσμα $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)^\top$, το μητρώο $A = (e, x, x \odot x)$. 2) και το διάνυσμα $p = (-1, 1, 3)^\top$ όπου όπου $x \odot x$ δηλώνει το γινόμενο Hadamard. 2) Υπολογίζουμε το γινόμενο $y = Ap$:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 \\ \vdots & \vdots & \\ 1 & \xi_m & \xi_m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Προσέξτε: το μητρώο έχει ειδική δομή και λέγεται μητρώο τύπου Vandermonde.

Γραμμικά συστήματα: Πολυωνυμική παρεμβολή

Θέμα Δίνονται n ζεύγη τιμών $T = \{(\xi_i, \beta_i), i = 1, \ldots, n\}$ και θέλουμε να υπολογίσουμε ένα πολυώνυμο παρεμβολής $p(x)$, δηλ. ένα πολυώνυμο που ικανοποιεί τις σχέσεις $p(\xi) = \beta_i$ για $i = 1, \ldots, n$.

Ερωτήματα Υπάρχει; Είναι μοναδικό;

Δεδομένα Αν οι n τιμές είναι ξ_i είναι διαφορετικές υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $n-1$ που ικανοποιεί τις συνθήκες.

Παράδειγμα: $T = \{(0,1),(1,4)\}$ τότε $p(x) = 3x+1$ (υπολογίζεται και με το μάτι!!!) Είναι όμως ένα 2×2 γραμμικό σύστημα!

Παράδειγμα: Όμως αν $T = \{(-1,0),(0,1),(1,4)\}$ και αναζητούμε το $p(x) = \pi_2 x^2 + \pi_1 x + \pi_0$, η εύρεση των συντελεστών απαιτεί περισσότερη δουλειά (3×3 σύστημα)

Παράδειγμα εφαρμογής

Εύρεση πολυωνύμου παρεμβολής

Πρόβλημα 1: Αναζητούμε πολυώνυμο $p(x) = \pi_0 + \pi_1 \xi$ τ.ώ. $p(0) = 1$ και $p(1) = 4$. Πως διαμορφώνεται ως επίλυση συστήματος;

Παράδειγμα εφαρμογής

Εύρεση πολυωνύμου παρεμβολής

Πρόβλημα 1: Αναζητούμε πολυώνυμο $p(x) = \pi_0 + \pi_1 \xi$ τ.ώ. $p(0) = 1$ και $p(1) = 4$. Πως διαμορφώνεται ως επίλυση συστήματος;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα εφαρμογής

Εύρεση πολυωνύμου παρεμβολής

Πρόβλημα 1: Αναζητούμε πολυώνυμο $p(x) = \pi_0 + \pi_1 \xi$ τ.ώ. $p(0) = 1$ και $p(1) = 4$. Πως διαμορφώνεται ως επίλυση συστήματος;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Πρόβλημα 1: Αναζητούμε πολυώνυμο $p(x) = \pi_0 + \pi_1 \xi + \pi_2 \xi^2$ τ.ώ. $p(-1) = 0$ και $p(0) = 1, p(1) = 4$. Πως διαμορφώνεται ως επίλυση συστήματος;

Παράδειγμα εφαρμογής

Εύρεση πολυωνύμου παρεμβολής

Πρόβλημα 1: Αναζητούμε πολυώνυμο $p(x) = \pi_0 + \pi_1\xi$ τ.ώ. $p(0) = 1$ και $p(1) = 4$. Πως διαμορφώνεται ως επίλυση συστήματος;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Πρόβλημα 1: Αναζητούμε πολυώνυμο $p(x) = \pi_0 + \pi_1\xi + \pi_2\xi^2$ τ.ώ. $p(-1) = 0$ και $p(0) = 1, p(1) = 4$. Πως διαμορφώνεται ως επίλυση συστήματος;

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Γενική διατύπωση

Αναζητούμε πολυώνυμο $p(x) = \pi_0 + \cdots + \pi_{n-1}\xi^{n-1}$ τέτοιο ώστε

$$p(\xi_1) = \beta_1, \ldots, p(\xi_n) = \beta_n.$$

Γενική διατύπωση

Αναζητούμε πολυώνυμο $p(x) = \pi_0 + \cdots + \pi_{n-1}\xi^{n-1}$ τέτοιο ώστε

$$p(\xi_1) = \beta_1, \ldots, p(\xi_n) = \beta_n.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_1^{n-1} \\ 1 & \xi_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \xi_n & & \xi_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

Για την επίλυση του

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_0\\ \pi_1\\ \pi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 4\end{pmatrix}$$

Θα εφαρμόσουμε απαλοιφή Gauss επιλέγοντας για οδηγό πάντα το μέγιστο σε απόλυτη τιμή κάθε στήλης:

$$L_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow L_1[A,b] = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$P_{2,3}L_1[A,b] = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow L_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

$$L_2P_{2,3}L_1[A,b] = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

Με πίσω αντικατάσταση $\pi_2 = 1, \pi_1 = 2, \pi_0 = 1$ άρα το πολυώνυμο είναι $p(x) = x^2 + 2x + 1$ (δεν γράφουμε τους συντελεστές όταν είναι 1).

Μέθοδος αντιστροφής Gauss-Jordan

(Strang, σελ. 93-94)

Βήμα 1: Επαυξημένο μητρώο και αναγωγή σε άνω τριγωνική μορφή

$$(A, e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2: Στη GJ συνεχίζουμε ως την αναγμένη μορφή: Δημιουργούμε μηδενικά πάνω από τους οδηγούς προσθέτοντας γραμμές σε αυτές που είναι από επάνω.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & \mathbf{0} & 3/4 & 3/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{0} & 0 & 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & \mathbf{0} & 3/4 & 3/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 3: Διαίρεση κάθε γραμμής με τον αντίστοιχο οδηγό.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Το αντίστροφο του A είναι στις στήλες 4, 5, 6.

Αντιστροφή μέσω LU

1. Παραγοντοποίηση LU του A, $PA = LU$.
2. Επίλυση των $LY = P^{\top}$.
3. Επίλυση των $UX = Y$, το αντίστροφο είναι το X.

Παραγοντοποιήσεις μητρώων

Βασική ιδέα: Δοθέντος $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, αναζητούμε υπολογίσουμε κατάλληλα μητρώα (παράγοντες) C, D, E, τ.ώ.

$$A = CDE \text{ ή γενικότερα } \quad A \approx CDE$$

Οι παράγοντες επιλέγονται να έχουν ειδικές ιδιότητες σύμφωνα με κάποιες προδιαγραφές.

Παραγοντοποιήσεις μητρώων

Βασική ιδέα: Δοθέντος $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, αναζητούμε υπολογίσουμε κατάλληλα μητρώα (παράγοντες) C, D, E, τ.ώ.

$$A = CDE \text{ ή γενικότερα } \quad A \approx CDE$$

Οι παράγοντες επιλέγονται να έχουν ειδικές ιδιότητες σύμφωνα με κάποιες προδιαγραφές.

- π.χ. να προσφέρονται για οικονομικότερη διαχείριση από το A.
- π.χ. να αποκαλύπτουν σημαντικές πληροφορίες για το πρόβλημα.

Παρατηρήσεις:

- Αποτελούν πολύ σημαντική κατηγορία τεχνικών επίλυσης πολλών προβλημάτων της υπολογιστικής γραμμικής άλγεβρας (όχι μόνον γραμμικών συστημάτων)!
- Χρησιμοποιούνται εκτενώς σε Data Analytics, δείτε π.χ. εδώ.
- η παραγοντοποίηση ενίοτε αναφέρεται και ως διάσπαση.
- Η μεθοδολογία της παραγοντοποίησης θεωρήθηκε μία από τις πιο

«Αναρίθμητες» και μεγάλες εφαρμογές

Factorizing Gigantic Matrices: Tutorial at ECML-PKDD 2011

Christian Bauckhage (Fraunhofer IAIS), Kristian Kersting (Fraunhofer IAIS), Christian Thurau (Fraunhofer IAIS)

Tutorial description

Low-rank approximations of data matrices have become an important tool in machine learning and data mining. They allow for embedding high dimensional data in lower dimensional spaces and can therefore mitigate effects due to noise, uncover latent relations, or facilitate further processing. These properties have been proven successful in many applications areas such as bio-informatics, computer vision, text process ing, recommender systems, social network analysis, among others. Present day technologies are characterized by exponentially growing amounts of data. Recent advances in sensor technology, Internet applications, and communication networks call for methods that scale to very large and/or growing data matrices. In this tutorial, we discuss basic characteristics of matrix factorization and introduce several recent approaches that scale to modern massive data analysis problems.

Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America

CURRENT ISSUE // ARCHIVE // NEWS & MULTIMEDIA // FOR AUTHORS // ABOUT PNAS | COLLECTED ARTICLES / BROW

> Current Issue > vol. 106 no. 3 > Michael W. Mahoney, 697–702, doi: 10.1073/pnas.0803205106

CrossMark
click for updates

CUR matrix decompositions for improved data analysis

Michael W. Mahoney[a1] and Petros Drineas[b]

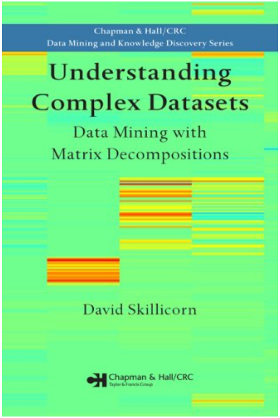
Author Affiliations

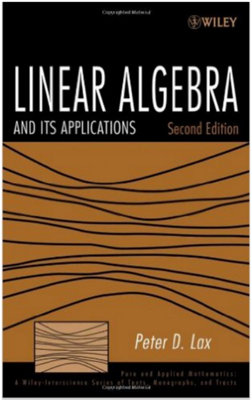
Edited by Jon Kleinberg, Cornell University, Ithaca, NY, and accepted by the Editorial Board November 11, 2008 (received for review April 3, 2008)

Abstract | Full Text | Authors & Info | Figures | SI | Metrics | +SI

Abstract

Principal components analysis and, more generally, the Singular Value Decomposition are fundamental data analysis tools that express a data matrix in terms of a sequence of orthogonal or uncorrelated vectors of decreasing importance. Unfortunately, being linear combinations of up to all the data points, these vectors are notoriously difficult to interpret in terms of the data and processes generating the data. In this article, we





This first chapter aims to introduce the notion of an abstract linear space to those who think of vectors as arrays of components. I want to point out that the class of abstract linear spaces is no larger than the class of spaces whose elements are arrays. So what is gained by this abstraction?

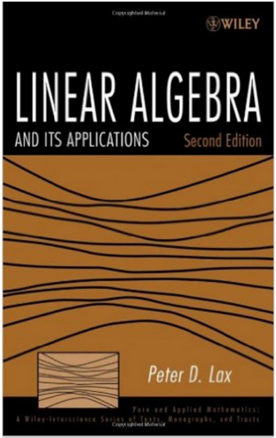
First of all, the freedom to use a single symbol for an array; this way we can think of vectors as basic building blocks, unencumbered by components. The abstract view leads to simple, transparent proofs of results.

More to the point, the elements of many interesting vector spaces are not presented in terms of components. For instance, take a linear ordinary differential equation of degree n; the set of its solutions form a vector space of dimension n, yet they are not presented as arrays.

Even if the elements of a vector space are presented as arrays of numbers, the elements of a subspace of it may not have a natural description as arrays. Take, for instance, the subspace of all vectors whose components add up to zero.

Last but not least, the abstract view of vector spaces is indispensable for infinite-dimensional spaces; even though this text is strictly about finite-dimensional spaces, it is a good preparation for functional analysis.

Linear algebra abstracts the two basic operations with vectors: the addition of vectors, and their multiplication by numbers (scalars). It is astonishing that on such slender foundations an elaborate structure can be built, with romanesque, gothic, and baroque aspects. It is even more astounding that linear algebra has not only the right theorems but also the right language for many mathematical topics, including applications of mathematics.



This first chapter aims to introduce the notion of an abstract linear space to
who think of vectors as arrays of components. I want to point out that the cl
abstract linear spaces is no larger than the class of spaces whose elements are
So what is gained by this abstraction?

First of all, the freedom to use a single symbol for an array; this way we can
of vectors as basic building blocks, unencumbered by components. The a
view leads to simple, transparent proofs of results.

More to the point, the elements of many interesting vector spaces a
presented in terms of components. For instance, take a linear ordinary diffe
equation of degree n; the set of its solutions form a vector space of dimension
they are not presented as arrays.

Even if the elements of a vector space are presented as arrays of numbe
elements of a subspace of it may not have a natural description as arrays. Ta
instance, the subspace of all vectors whose components add up to zero.

Last but not least, the abstract view of vector spaces is indispensable for in
dimensional spaces; even though this text is strictly about finite-dimensional s
it is a good preparation for functional analysis.

Linear algebra abstracts the two basic operations with vectors: the addit
vectors, and their multiplication by numbers (scalars). It is astonishing that o
slender foundations an elaborate structure can be built, with romanesque, gothi
baroque aspects. It is even more astounding that linear algebra has not only th
theorems but also the right language for many mathematical topics, inc
applications of mathematics.

Επιδραστικό (seminal) βιβλίο

Finite Dimensional Vector Spaces. (AM-7)
Paul R. Halmos

One of Princeton University Press's Notable Centenary Titles.

Paperback | 1947 | **$69.00** | **£47.95** | ISBN: 9780691090955
196 pp. | 6 x 9
Add to Shopping Cart

eBook | ISBN: 9781400882236 |
Our eBook editions are available from these online vendors

Google full text of this book:
GO

Google Preview

As a newly minted Ph.D., Paul Halmos came to the Institute for Advanced Study in 1938--even though he did not have a fellowship--to study among the many giants of mathematics who had recently joined the faculty. He eventually became John von Neumann's research assistant, and it was one of von Neumann's inspiring lectures that spurred Halmos to write *Finite Dimensional Vector Spaces*. The book brought him instant fame as an expositor of mathematics.

Finite Dimensional Vector Spaces combines algebra and geometry to discuss the three-dimensional area where vectors can be plotted. The book broke ground as the first formal introduction to linear algebra, a branch of modern mathematics that studies vectors and vector spaces. The book continues to exert its influence sixty

Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων

Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων

Ένα σύνολο μη μηδενικών διανυσμάτων $U = \{u_1, \ldots, u_s\}$ αποκαλούνται γραμμικά ανεξάρτητα αν

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0.$$

Γραμμική εξάρτηση διανυσμάτων

Τα μη μηδενικά διανυσμάτα $U = \{u_1, \ldots, u_s\}$ χαρακτηρίζονται γραμμικά εξαρτημένα αν υπάρχουν τιμές $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ που δεν είναι όλες μηδέν έτσι ώστε $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = 0$.

Ένα σύνολο διανυσμάτων είτε είναι γραμμικά ανεξάρτητο ή τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Ομάδα (Group)

Ομάδα είναι ένα σύνολο $\mathbb{F}$ μαζί με μία πράξη $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ έτσι ώστε

(A1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$.

(A2) υπάρχει ένα στοιχείο $0 \in \mathbb{F}$ τ.ώ. $\alpha + 0 = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{F}$.

(A3) για κάθε $\alpha \in \mathbb{F}$, υπάρχει ένα στοιχείο $(-\alpha) \in \mathbb{F}$ τ.ώ. $\alpha + (-\alpha) = 0$.

Αν επίσης ισχύει και ότι

(A4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

τότε είναι **Αβελιανή Ομάδα**.

> Είναι εντυπωσιακο πόσα πολλά μπορούν να ειπωθούν και τί θεωρίες θεμελιώνονται με βάση μόνον με αυτές τις ιδιότητες.

Δακτύλιος (Ring)

Δακτύλιος είναι ένα σύνολο $\mathbb{D}$ μαζί με δύο πράξεις $+, \cdot$ έτσι ώστε:

1. το $\mathbb{D}$ μαζί την $+$ σχηματίζει αβελιανή ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το 0.
2. η πράξη $\cdot$ είναι προσεταιριστική, $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{D}$.
3. η πράξη $\cdot$ είναι επιμεριστική ως προς την $+$, δηλ. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{D}$.
4. υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $1 \in \mathbb{D}$ τ.ώ. $\alpha \cdot 1 = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{D}$.
5. Αν ισχύει $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$, ο δακτύλιος καλείται αντιμεταθετικός δακτύλιος.

Παραδείγματα Τα σύνολα των ακεραίων, ρητών, πραγματικών, μιγαδικών, με τους συνήθεις κανόνες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.

Σώμα (Field)

Σώμα είναι ένα σύνολο $\mathbb{F}$ εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+, \cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω Αξιώματα:

(A1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$.

(A2) υπάρχει στοιχείο $0 \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $\alpha + 0 = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{F}$.

(A3) για κάθε $\alpha \in \mathbb{F}$, υπάρχει στοιχείο $(-\alpha) \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $\alpha + (-\alpha) = 0$.

(A4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

(M1) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$.

(M2) υπάρχει στοιχείο $1 \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $\alpha \cdot 1 = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{F}$.

(M3) για κάθε $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$, υπάρχει στοιχείο $\alpha^{-1} \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$.

(M4) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

(Δ) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$.

Τα Αξιώματα (A1)–(A3) δηλώνουν ότι το $(\mathbb{F}, +)$ είναι ομάδα, ενώ αν ισχύει και το (A4), τότε η ομάδα είναι αβελιανή. Τα αξιώματα (M1)–(M4) δηλώνουν ότι το $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Παραδείγματα

- Τα σύνολα $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ με τη συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό είναι σώματα.
- Οι ρητές συναρτήσεις ως προς την απροσδιόριστη μεταβλητή x

$$\left\{ \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_p x^p}{\beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_q x^q} \ : \ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R} \ ; \ p, q \in \mathbf{Z}^+ \right\}$$

  όπου $\mathbf{Z}^+ = \{0,1,2,\ldots\}$, είναι σώμα.
- Το σύνολο $\mathbb{R}^{m\times n}$ δεν είναι σώμα: η αξιωματική ιδιότητα (M1) δεν ισχύει εκτός αν $m = n$. Ακόμα και τότε δεν είναι σώμα γιατί, γενικά, δεν ισχύει η ιδιότητα (M4) (παρότι ισχύουν τα υπόλοιπα 8 αξιώματα).
- Αν και τα σώματα που αναφέραμε έχουν άπειρο πλήθος στοιχείων, σε πολλές περιπτώσεις ενδιαφέρουν και τα «πεπερασμένα σώματα» (finite fields). Το «εξωτικό» όνομα μην σας παραπλανά καθώς έχουν σημαντικές εφαρμογές, π.χ. στην κρυπτογραφία.
- Μία περίπτωση σώματος με 2 μόνο στοιχεία είναι το (Σώμα Galois) GF(2) με στοιχεία $\{0,1\}$ και τους κανόνες δυαδικής αριθμητικής για $+, \cdot$.

Διανυσματικός χώρος

Αυτή η ενότητα πηγαίνει στην καρδιά της Γραμμικής Άλγεβρας (Strang)

Ονομάζεται διανυσματικός χώρος (ενίοτε και γραμμικός χώρος) επί του σώματος $\mathbb{F}$ ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{V}$ μαζί με δυο πράξεις $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ και $\cdot : \mathbb{F} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ τέτοια ώστε

- (V1) το $(\mathcal{V}, +)$ είναι Αβελιανή ομάδα.
- (V2) $(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ και για κάθε $v \in \mathcal{V}$.
- (V3) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ και για κάθε $v \in \mathcal{V}$.
- (V4) $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{F}$ και για κάθε $v, w \in \mathcal{V}$.
- (V5) $1 \cdot v = v$ για κάθε $v \in \mathcal{V}$ $(1 \in \mathbb{F})$.

Ένας διανυσματικός χώρος συμβολίζεται με $(\mathcal{V}, \mathbb{F})$ ή απλά $\mathcal{V}$, εφόσον δεν υπάρχει θέμα σύγχυσης ως προς το υποκείμενο σώμα.

Προσοχή: Με τον αφαιρετικό αυτό ορισμό «απελευθερωνόμαστε» από την αντιστοίχιση των διανυσμάτων με n-πλειάδες αριθμών (π.χ. στοιχεία του $\mathbb{R}^n$). Οποιοδήποτε σύνολο $\mathcal{V}$ και σώμα $\mathbb{F}$ που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες αποτελεί διανυσματικό χώρο, τα στοιχεία του $\mathcal{V}$ διανύσματα και τα στοιχεία του $\mathbb{F}$ βαθμωτοί. Προς επίρρωση αυτού, σημειώστε ότι οι δ.χ. αποκαλούνται και γραμμικοί χώροι.

Παραδείγματα (Strang)

$\mathbb{R}^n$ Ο χώρος όλων των διανυσμάτων (στηλών) με n πραγματικές συνιστώσες. Ο $\mathbb{C}^n$ ορίζεται αντίστοιχα.

$\mathcal{M}$ Ο δ.χ. $\{A|A \in \mathbb{R}^{m\times n}\}$ όλων των πραγματικών μητρώων $m \times n$.

$\mathcal{F}$ Ο δ.χ. όλων των πραγματικών συναρτήσεων $\{f|f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

$\mathcal{Z}$ Ο δ.χ. που απαρτίζεται μόνον από το μηδενικό διάνυσμα.

$\mathcal{C}[\alpha,\beta]$ Ο δ.χ. όλων των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[\alpha,\beta]$: $\{f|f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}\}$.

Άλλα παραδείγματα και συμβολισμοί:

- $\mathbb{P}$: Ο δ.χ. των πολυωνύμων.
- $\mathbb{P}_n$: Ο δ.χ. των πραγματικών (ή μιγαδικών) πολυωνύμων βαθμού έως n.
- ℓ_2: Ο δ.χ. των ακολουθιών $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ τέτοιων ώστε $\sum_j^\infty |\xi_j|^2 < \infty$ όπου η άθροιση και ο πολλαπλασιασμός με βαθμωτό ορίζονται με τον προφανή τρόπο.
- ο δ.χ. όλων των λύσεων $u(t)$ της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2}{dt^2}u(t) + u(t) = 0$.
- Ο δ.χ. $\{U|U \in \mathbb{R}^{n\times n}\}$ όλων των πραγματικών άνω τριγωνικών μητρώων.
- ο δ.χ. των λύσεων του συστήματος $\{x \in \mathbb{R}^n|Ax = 0\}$ όπου $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
- ο δ.χ. των διανυσμάτων $\{Ax|A \in \mathbb{R}^{m\times n}, x \in \mathbb{R}^n\}$.
- ΠΡΟΣΟΧΗ το σύνολο των διανυσμάτων $\{x|Ax = b\}$ όπου $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \neq 0 \in \mathbb{R}^m$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ δ.χ.

A. Quarteroni, F. Saleri, and P. Gervasio.
Numerical Methods using MATLAB and Octave.
Springer, 4th edition, 2014.