ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ε. Γαλλόπουλος & Ε. Στεφανόπουλος

CEID

Διάλεξη 1

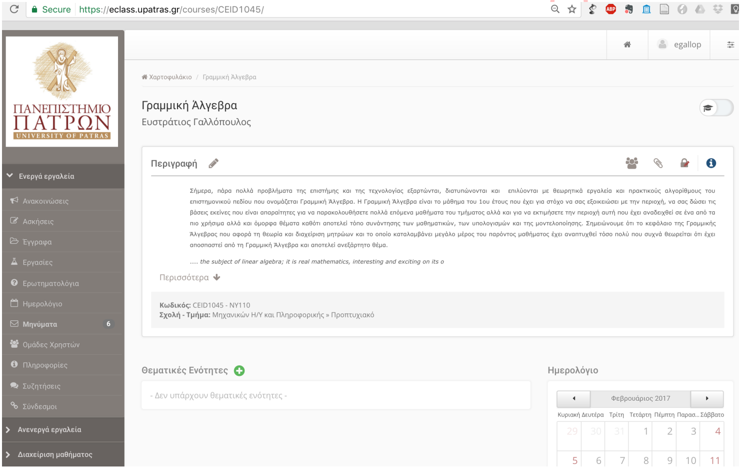
20 Φεβρουαρίου 2018

ΚΑΛΩΣ ΗΡΘΑΤΕ

Ποιοί είμαστε, πού και πότε θα μας βρίσκετε;

Το μάθημα στο UPatras e-class

ΕΓΓΡΑΦΕΙΤΕ ΑΜΕΣΑ ΜΕ ΤΟΝ ΚΩΔΙΚΟ ΠΟΥ ΣΑΣ ΔΟΘΗΚΕ



Συστάσεις και Κανόνες

- Να συμμετέχετε στο μάθημα,
- να είσαστε στις θέσεις σας στις — : 15,
- να διαβάζετε τις συνιστώμενες ενότητες και τις διαφάνειες,
- να προετοιμάζεστε για τη διάλεξη,
- να αυτοαξιολογείστε μέσω των ασκήσεων.

Η αξιολόγηση επίδοσής σας θα προκύψει από:

1. την τελική εξέταση, ενώ
2. προσμετράται θετικά η ενεργή συμμετοχή σας στο μάθημα!

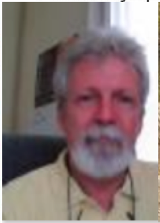
Στη διάρκεια των διαλέξεων και των φροντιστηρίων

> *Οι ερωτήσεις στην εξέταση έχουν για στόχο να αναδειχτεί ο βαθμός κατανόησης των εννοιών του μαθήματος. Η επιτυχής εκπλήρωση της εξέτασης ακολουθεί αβίαστα από τη συστηματική παρακολούθηση και ενασχόληση με το μάθημα. Δεν είναι αυτοσκοπός.*

Να ζητήσω βοήθεια;

Αν προβληματίζεστε ...

Ελάτε στις ώρες γραφείου!

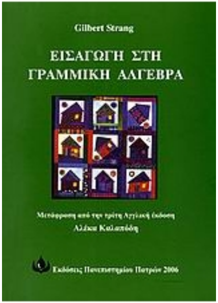


Να ζητήσω εξωπανεπιστημιακή βοήθεια;

Πεταμένα λεφτά (απολύτως μη πιστοποιημένα κέντρα ....)

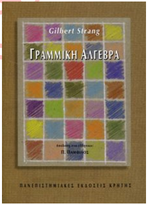
Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τους κανονισμούς, δείτε στις σχετικές ιστοσελίδες του μαθήματος.

Πηγές

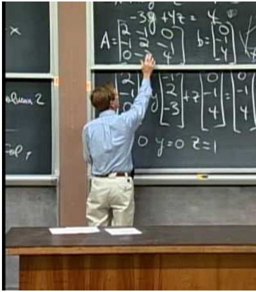


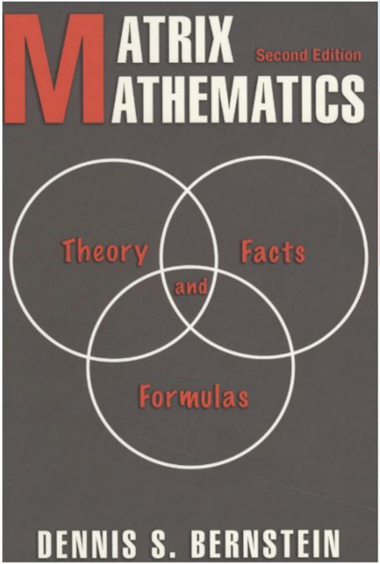
Gilbert Strang
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών 2006

Γ. ΔΟΝΑΤΟΣ - Μ. ΑΔΑΜ
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



Gilbert Strang
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ





The idea for this book began with the realization that at the heart of the solution to many problems in science, mathematics, and engineering often lies a "matrix fact," that is, an identity, inequality, or property of matrices that is crucial to the solution of the problem. Although there are numerous excellent books on

Viewed as an extension of scalar mathematics, matrix mathematics provides the means to manipulate and analyze multidimensional quantities. Matrix mathematics thus provides powerful tools for a broad range of problems in science and engineering. For example, the matrix-based analysis of systems of ordinary differential equations accounts for interaction among all of the state variables. The discretization of partial differential equations by means of finite differences and finite elements yields linear algebraic or differential equations whose matrix structure reflects the nature of physical solutions [1269]. Multivariate probability theory and statistical analysis use matrix methods to represent probability distributions, to compute moments, and to perform linear regression for data analysis [517, 621, 671, 720, 972, 1212]. The study of linear differential equations [709, 710, 746] depends heavily on matrix analysis, while linear systems and control theory are matrix-intensive areas of engineering [3, 68, 146, 150, 319, 321, 356, 379, 381, 456, 515, 631, 764, 877, 890, 960, 1121, 1174, 1182, 1228, 1232, 1243, 1368, 1402, 1490, 1535]. In addition, matrices are widely used in rigid body dynamics 28, 745, 753, 811, 829, 874, 995, 1053, 1095, 1096, 1216, 1231, 1253, 1384], structural mechanics [888, 1015, 1127], computational fluid dynamics [313, 492, 1460], ircuit theory [32], queuing and stochastic systems [659, 944, 1061], econometrics 413, 973, 1146], geodesy [1272], game theory [229, 924, 1264], computer graphics [65, 511], computer vision [966], optimization [259, 382, 978], signal processing 720, 1193, 1395], classical and quantum information theory [361, 720, 1069, 1113], ommunications systems [800, 801], statistics [594, 671, 973, 1146, 1208], statistical mechanics [18, 163, 164, 1406], demography [305, 828], combinatorics, networks, and graph theory [132, 169, 183, 227, 239, 270, 272, 275, 310, 311, 343, 282, 371, 415, 138, 494, 514, 571, 616, 654, 720, 868, 945, 956, 1172, 1421], optics [563, 677, 820], limensional analysis [658, 1283], and number theory [865].

The Undergraduate Linear Algebra Curriculum: A View from a Client Discipline, Computer Graphics·

Rosemary E. Chang
Research and Development
Silicon Graphics Computer Systems

Linear Algebra as the Language of Graphics

As computer graphics matured, it became more complicated. It has a symbiotic relationship with display and computer hardware. For this discussion I will focus on the real-time 3D rendering of images. *Real-time* means the computations necessary to compute a scene at the rate of 60 frames per second. The 3D implies that the images we capture are of inherently 3-

Linear Algebra Use at Boeing: Implications for Undergraduate Education·

David P. Young
Boeing Computer Services

All Areas of Computational Physics Use Linear Algebra

About 200 employees at Boeing are working in computational physics. The areas represented at Boeing are aerodynamics, structures, acoustics, electromagnetics, and geometry (CAD/CAM). There are several types of positions held by people with technical degrees: engineers "in the trenches", research and development scientists, and management and sales personnel who often have technical backgrounds.

Matrix factorizations and social network graph analysis

Posted by Brian Rowe in CUNY MS Data Analytics, Mathematics, R

Leave a Comment

The $25,000,000,000 Eigenvector: The Linear Algebra behind Google*

Kurt Bryan[†]
Tanya Leise[‡]

COMMUNICATIONS OF THE ACM

HOME | CURRENT ISSUE | NEWS | BLOGS | OPINION | RESE

Home / Magazine Archive / October 2012 (Vol. 55, No. 10) / A Fast Solver for a Class of Linear Systems / Full Tex

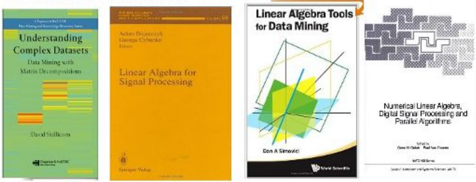
RESEARCH HIGHLIGHTS

A Fast Solver for a Class of Linear Systems

By Ioannis Koutis, Gary L. Miller, Richard Peng
Communications of the ACM, Vol. 55 No. 10, Pages 99-107
10.1145/2347736.2347759

Linear Algebra and Machine Learning of Large Informatics Graphs

author: Michael Mahoney, Department of Computer Science, Stanford University
published: Jan. 13, 2011, recorded: December 2010, views: 628



2012 SIAM Conference on Applied Linear Algebra

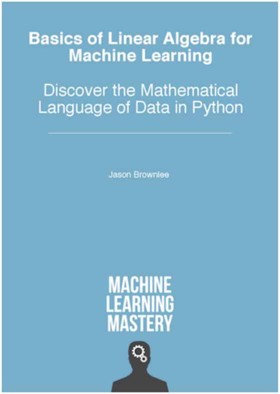
Welcome to 2012 SIAM Conference on Applied Linear Algebra Webpage

June 18th-22nd, Valencia, Spain.

Here you find all the information about the Conference.

Linear algebra is an important area of mathematics and it is at the heart of many scientific, engineering, and industrial applications. Research and development in linear algebra include theoretical studies, algorithmic designs and implementations on advanced computer architectures, and applications to various disciplines. The SIAM Conferences on Applied Linear Algebra, organized by SIAM every three years, are the premier international conferences on applied linear algebra, which bring together diverse researchers and practitioners from academia, research laboratories, and industries all over the world to present and discuss their latest work and results on applied linear algebra.

Discover the Mathematical Language of Data in Python



$27 USD

Linear algebra is a pillar of machine learning. You cannot develop a deep understanding and application of machine learning without it.

In this new laser-focused Ebook written in the friendly Machine Learning Mastery style that you're used to, you will finally cut through the equations, Greek letters, and confusion, and discover the topics in linear algebra that you need to know.

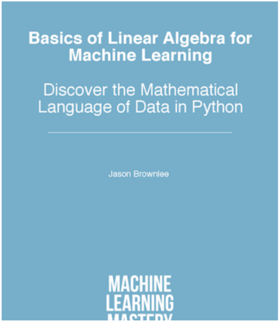
Using clear explanations, standard Python libraries, and step-by-step tutorial lessons, you will discover what linear algebra is, the importance of linear algebra to machine learning, vector, and matrix operations, matrix factorization, principal component analysis, and much more.

About the Ebook:

- PDF format Ebook.
- 6 parts, covering the main topics.
- 19 step-by-step tutorials.
- 211 pages.
- 92 Python (.py) code files included.

Clear and Complete Examples.
Designed for Developers. Nothing Hidden.

Discover the Mathematical Language of Data in Python



It covers:

- Only the topics that are *most relevant* to machine learning.
- Everything is explained with complete and working *Python code examples.*
- There are *no proofs, no deep theory*, just the practical methods.

>> Click to get the linear algebra you need for machine learning

I think this is required reading for practitioners, I'd love to hear what you think of it.

Jason.

$27 USD

Linear algebra is a pillar of machine learning. You cannot develop a deep understanding and application of machine learning without it.

In this new laser-focused Ebook written in the friendly Machine Learning Mastery style that you're used to, you will finally cut through the equations, Greek letters, and confusion, and discover the topics in linear algebra that you need to know.

Using clear explanations, standard Python libraries, and step-by-step tutorial lessons, you will discover what linear algebra is, the importance of linear algebra to machine learning, vector, and matrix operations, matrix factorization, principal component analysis, and much more.

About the Ebook:

- PDF format Ebook.
- 6 parts, covering the main topics.
- 19 step-by-step tutorials.
- 211 pages.
- 92 Python (.py) code files included.

Clear and Complete Examples.
Designed for Developers. Nothing Hidden.

Jason @ ML Mastery
To: me
Linear algebra for machine learning

Hi, linear algebra is a pillar of machine learning.

You cannot develop a deep understanding and application of machine learning without it.

Cut through the notation and Greek letters with my new book:

>> Linear Algebra for Machine Learning

Have you ever *been frustrated* reading the description of a machine learning technique?

You're reading along, things are going well, and then you hit an equation, and you are stopped in your tracks with questions like:

- ... what do the terms mean?
- ... why are there no operators between terms?
- ... what does this Greek letter mean?

Unless you have a basic knowledge of linear algebra, you will not be able to read and understand even the most basic equations.

The *biggest mistake that beginners make* when trying to learn linear algebra is that they try to learn the whole field, like an undergraduate university student.

There's a *faster way* that specifically targets what you need for machine learning.

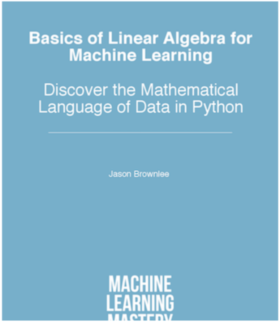
There are 5 key areas of the field that you need to focus on, they are:

1. Learn Linear Algebra Notation
2. Learn Linear Algebra Arithmetic
3. Learn Linear Algebra for Statistics
4. Learn Matrix Factorization
5. Learn Linear Least Squares

If I could give one more reason, it would be: *because it is fun.* Seriously.

I have developed a course designed for developers to get you up to speed on the linear algebra you need for applied machine learning.

Discover the Mathematical Language of Data in Python



It covers:

- Only the topics that are *most relevant* to machine learning.
- Everything is explained with complete and working *Python code examples*.
- There are *no proofs, no deep theory*, just the practical methods.

>> Click to get the linear algebra you need for machine learning

I think this is required reading for practitioners, I'd love to hear what you think of it.

Jason.

$27 USD

Linear algebra is a pillar of machine learning. You cannot develop a deep understanding and application of machine learning without it.

In this new laser-focused Ebook written in the friendly Machine Learning Mastery style that you're used to, you will finally cut through the equations, Greek letters, and confusion, and discover the topics in linear algebra that you need to know.

Using clear explanations, standard Python libraries, and step-by-step tutorial lessons, you will discover what linear algebra is, the importance of linear algebra to machine learning, vector, and matrix operations, matrix factorization, principal component analysis, and much more.

About the Ebook:

- PDF format Ebook.
- 6 parts, covering the main topics.
- 19 step-by-step tutorials.
- 211 pages.
- 92 Python (.py) code files included.

Clear and Complete Examples.
Designed for Developers. Nothing Hidden.

Jason @ ML Mastery
To: me
Linear algebra for machine learning

Hi, linear algebra is a pillar of machine learning.

You cannot develop a deep understanding and application of machine learning witho
t.

Cut through the notation and Greek letters with my new book:

>> Linear Algebra for Machine Learning

Have you ever *been frustrated* reading the description of a machine learning technique?

You're reading along, things are going well, and then you hit an equation, and you are stopped in your tracks with questions like:

- ... what do the terms mean?
- ... why are there no operators between terms?
- ... what does this Greek letter mean?

Unless you have a basic knowledge of linear algebra, you will not be able to read and understand even the most basic equations.

The *biggest mistake that beginners make* when trying to learn linear algebra is that they try to learn the whole field, like an undergraduate university student.

There's a *faster way* that specifically targets what you need for machine learning.

There are 5 key areas of the field that you need to focus on, they are:

1. Learn Linear Algebra Notation
2. Learn Linear Algebra Arithmetic
3. Learn Linear Algebra for Statistics
4. Learn Matrix Factorization
5. Learn Linear Least Squares

If I could give one more reason, it would be: *because it is fun*. Seriously.

I have developed a course designed for developers to get you up to speed on the linear algebra you need for applied machine learning.

Why learn Linear Algebra (for Machine Learning)

There are 5 key areas of the field that you need to focus on, they are:

- Learn Linear Algebra Notation
- Learn Linear Algebra Arithmetic
- Learn Matrix Factorization Learn Linear Least Squares

Why learn Linear Algebra (for Machine Learning)

There are 5 key areas of the field that you need to focus on, they are:

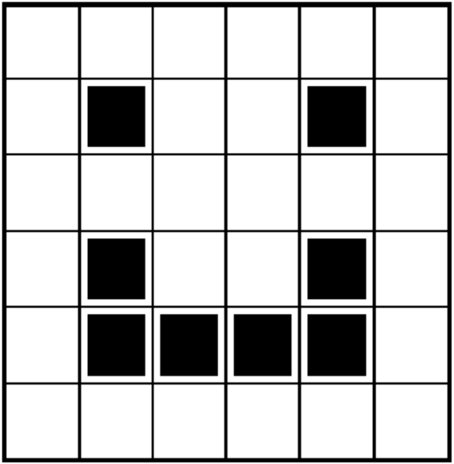
- Learn Linear Algebra Notation
- Learn Linear Algebra Arithmetic
- Learn Matrix Factorization Learn Linear Least Squares

If I could give one more reason, it would be: because it is fun. Seriously.

Μερικά δάνεια από αναρτήσεις στον Π.Ι.

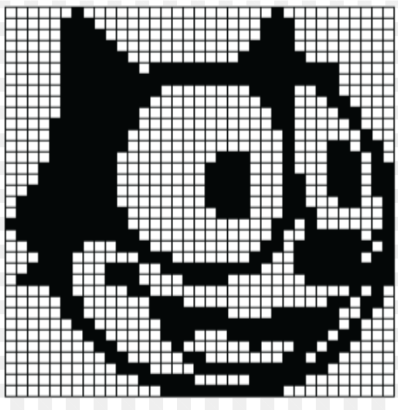
Student	High School GPA	SAT Verbal	SAT Math	Paralegal GPA
1	3.25	480	410	3.21
2	1.80	290	270	1.68
3	2.89	420	410	3.58
4	3.81	500	600	3.92
5	3.13	500	490	3.00
6	2.81	430	460	2.82
7	2.20	320	490	1.65
8	2.14	530	480	2.30
9	2.63	469	440	2.33

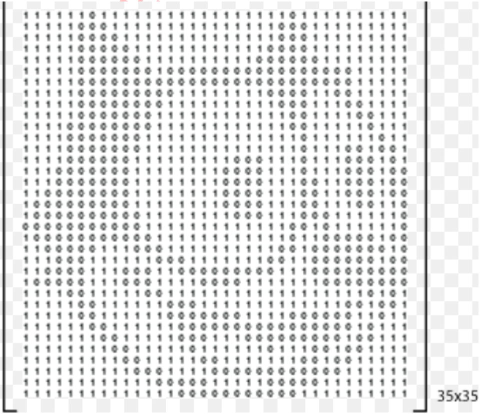
Μερικά δάνεια από αναρτήσεις στον Π.Ι.



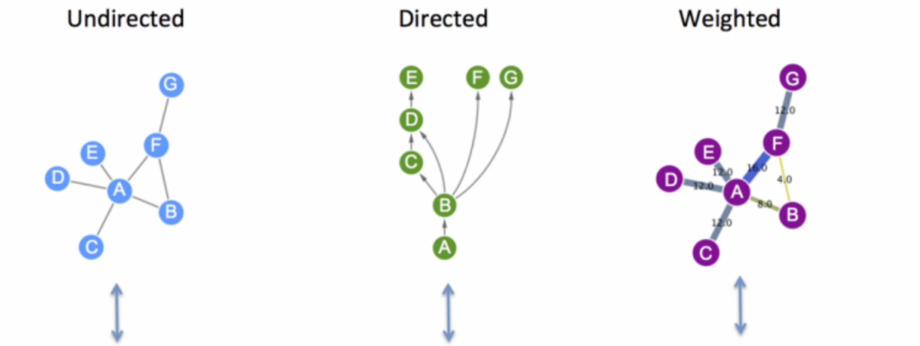
$$
\begin{matrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{matrix}
$$

Μερικά δάνεια από αναρτήσεις στον Π.Ι.





Μερικά δάνεια από αναρτήσεις στον Π.Ι.



	A	B	C	D	E	F	G	Degree
A	0	1	1	1	1	1	0	5
B	1	0	0	0	0	1	0	2
C	1	0	0	0	0	0	0	1
D	1	0	0	0	0	0	0	1
E	1	0	0	0	0	0	0	1
F	1	1	0	0	0	0	1	3
G	0	0	0	0	0	1	0	1

	A	B	C	D	E	F	G	Out-degree
A	0	1	0	0	0	0	0	1
B	0	0	1	1	0	1	1	4
C	0	0	0	1	0	0	0	1
D	0	0	0	0	1	0	0	1
E	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0	0

	A	B	C	D	E	F	G	Degree
A	0	8	12	12	12	16	12	72
B	8	0	0	0	0	4	0	12
C	12	0	0	0	0	0	0	12
D	12	0	0	0	0	0	0	12
E	12	0	0	0	0	0	0	12
F	16	4	0	0	0	0	12	32
G	12	0	0	0	0	12	0	24

Adjacency matrices

Μερικά δάνεια από αναρτήσεις στον Π.Ι.

Label	Titles
B1	A Course on Integral Equations
B2	Attractors for Semigroups and Evolution Equations
B3	Automatic Differentiation of Algorithms: Theory, Implementation, and Application
B4	Geometrical Aspects of Partial Differential Equations
B5	Ideals, Varieties, and Algorithms – An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra
B6	Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem
B7	Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations
B8	Methods of Solving Singular Systems of Ordinary Differential Equations
B9	Nonlinear Systems
B10	Ordinary Differential Equations
B11	Oscillation Theory for Neutral Differential Equations with Delay
B12	Oscillation Theory of Delay Differential Equations
B13	Pseudodifferential Operators and Nonlinear Partial Differential Equations
B14	Sinc Methods for Quadrature and Differential Equations
B15	Stability of Stochastic Differential Equations with Respect to Semi-Martingales
B16	The Boundary Integral Approach to Static and Dynamic Contact Problems
B17	The Double Mellin-Barnes Type Integrals and Their Applications to Convolution Theory

Using Linear Algebra for Intelligent Information Retrieval

M.W. Berry, S.T. Dumais & G.W. O'Brien

Computer Science Department

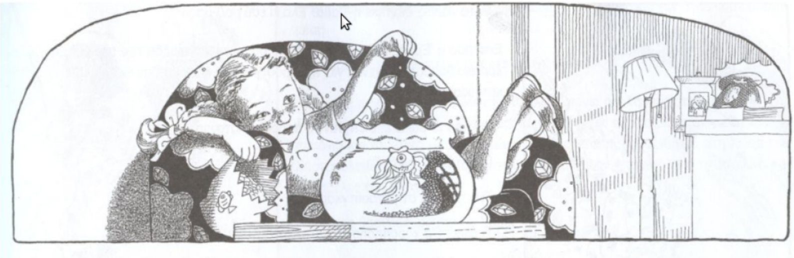
CS-94-270 December 1994

TABLE 3

The 16 × 17 term-document matrix corresponding to the book titles in Table 2.

Terms	Documents																
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12	B13	B14	B15	B16	B17
algorithms	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
application	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
delay	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
differential	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
equations	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
implementation	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
integral	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
introduction	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
methods	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
nonlinear	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
ordinary	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
oscillation	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
partial	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
problem	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
systems	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
theory	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1


ΤΑ 88 ΝΤΟΛΜΑΔΑΚΙΑ
ΤΑ 33 ΡΟΖ ΡΟΥΜΠΙΝΙΑ
The Adventures of You Series
Sugarcane Island
by Edward Packard
A Girl's Best Friend
SPACE AND BEYOND

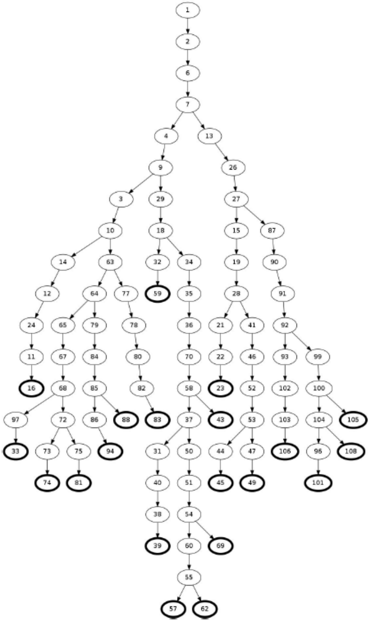


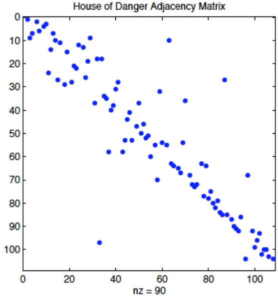
7

Once upon a time in a country house up on 33 Onestroke road (never foget this, it's important) lived a girl with freckles and red pigtails whose name was Emma. Emma had one mother, twelve aunts and one beautiful pink goldfish. One morning that Emma was alone in the house and was feeding the goldfish suddenly …. ring ring … the phone rings. Emma stood a little undecisive.

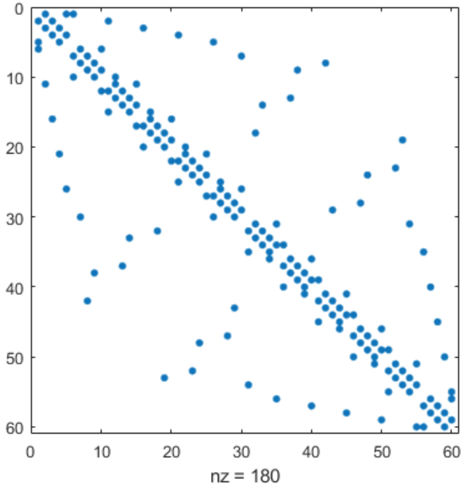
WHAT WOULD YOU LIKE EMMA TO DO?

ANSWER!	*Read the sequel on page 55*
NOT ANSWER!	*Read the sequel on page 101*



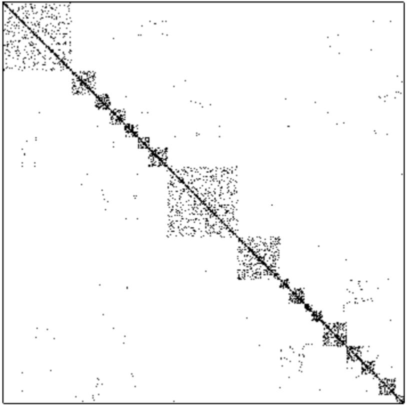


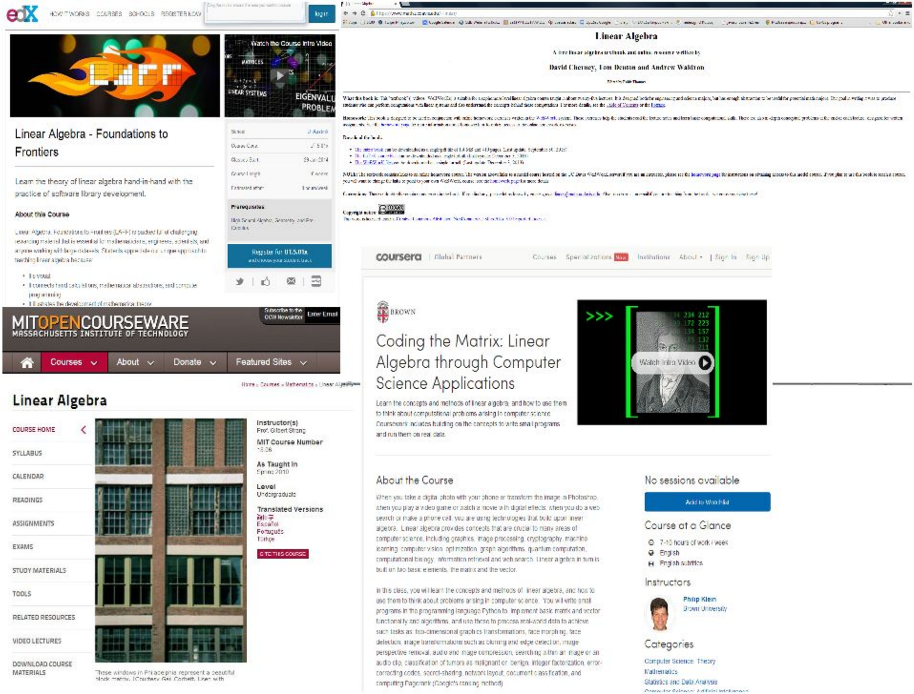
House of Danger Adjacency Matrix
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
0
20
40
60
80
100
nz = 90


0
10
20
30
40
50
60
0
10
20
30
40
50
60
nz = 180

Matrix BCSPWR08: Power network patterns

Western US power network -- 1624 bus




edX
HOW IT WORKS COURSES SCHOOLS REGISTER NOW
login
Watch the Course Intro Video
MATRICES
LINEAR SYSTEMS
EIGENVALUE PROBLEM
Linear Algebra - Foundations to Frontiers
Learn the theory of linear algebra hand-in-hand with the practice of software library development.
About this Course
Prerequisites
Register for UT.5.01x
Linear Algebra
David Cherney, Tom Denton and Andrew Waldron
MITOPENCOURSEWARE
MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY
Subscribe to the OCW Newsletter
Enter Email
Courses
About
Donate
Featured Sites
Home » Courses » Mathematics » Linear Algebra
Linear Algebra
COURSE HOME
SYLLABUS
CALENDAR
READINGS
ASSIGNMENTS
EXAMS
STUDY MATERIALS
TOOLS
RELATED RESOURCES
VIDEO LECTURES
DOWNLOAD COURSE MATERIALS
Instructor(s)
Prof. Gilbert Strang
MIT Course Number
18.06
As Taught In
Spring 2010
Level
Undergraduate
Translated Versions
Español
Português
Türkçe
CITE THIS COURSE
These windows in Philadelphia represent a beautiful block matrix.
coursera
Global Partners
Courses
Specializations
Institutions
About
Sign In
Sign Up
BROWN
Coding the Matrix: Linear Algebra through Computer Science Applications
Learn the concepts and methods of linear algebra, and how to use them to think about computational problems arising in computer science. Coursework includes building on the concepts to write small programs and run them on real data.
Watch Intro Video
About the Course
When you take a digital photo with your phone or transform the image in Photoshop, when you play a video game or watch a movie with digital effects, when you do a web search or make a phone call, you are using technologies that build upon linear algebra. Linear algebra provides concepts that are crucial to many areas of computer science, including graphics, image processing, cryptography, machine learning, computer vision, optimization, graph algorithms, quantum computation, computational biology, information retrieval and web search. Linear algebra in turn is built on two basic elements, the matrix and the vector.
In this class, you will learn the concepts and methods of linear algebra, and how to use them to think about problems arising in computer science. You will write small programs in the programming language Python to implement basic matrix and vector functionality and algorithms, and use these to process real-world data to achieve such tasks as: two-dimensional graphics transformations, face morphing, face detection, image transformations such as blurring and edge detection, image perspective removal, audio and image compression, searching within an image or an audio clip, classification of tumors as malignant or benign, integer factorization, error-correcting codes, secret-sharing, network layout, document classification, and computing Pagerank (Google's ranking method).
No sessions available
Add to Watchlist
Course at a Glance
7-10 hours of work / week
English
English subtitles
Instructors
Philip Klein
Brown University
Categories
Computer Science: Theory
Mathematics
Statistics and Data Analysis

Περιεχόμενα

Ενότητα 1

Ορολογία της περιοχής

Διανύσματα και διανυσματικοί χώροι

υπόχωροι, γραμμική ανεξαρτησία, βάσεις, διάσταση

Μητρώα ή μητρώα (ενίοτε πίνακες)

αλγεβρικές πράξεις, «ειδικός» πολλαπλασιασμός

Γεωμετρία

αντιστοιχίσεις στο `χώρο', αναλυτική γεωμετρία

Λογισμός μητρώων

Πράξεις, συναρτήσεις, διαφορικός λογισμός

Leibnitz (1679)

... Δεν είμαι ακόμα ικανοποιημένος με την άλγεβρα γιατί δεν οδηγεί στις βραχύτερες μεθόδους και στις πιο όμορφες κατασκευές στη γεωμετρία. ... Πιστεύω ότι όσον αφορά στη γεωμετρία, χρειάζεται ακόμα μια ανάλυση που είναι γεωμετρική ή γραμμική και που εκφράζει άμεσα τη θέση όπως η άλγεβρα εκφράζει άμεσα το μέγεθος.

Γεωμετρική ερμηνεία μιγαδικών

Caspar Wessel (1745-1818) ``On the Analytic Representation of Direction'', 1799

> *Η παρούσα προσπάθεια αναφέρεται στο ερώτημα, πώς να αναπαραστήσουμε την κατεύθυνση (direction) αναλυτικά ... ... Δύο ευθύγραμμα τμήματα προστίθενται αν τις ενώσουμε έτσι ώστε η δεύτερη γραμμή να αρχίζει εκεί που τελειώνει η πρώτη και μετά σχηματίσουμε το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την αρχή της πρώτης γραμμής με το τέλος της δεύτερης.*

Argand (1806): "Essai sur une maniere de representer les quantites imaginaires dans les constructions geometriques": γεωμετρία μιγαδικών και πράξεών τους.

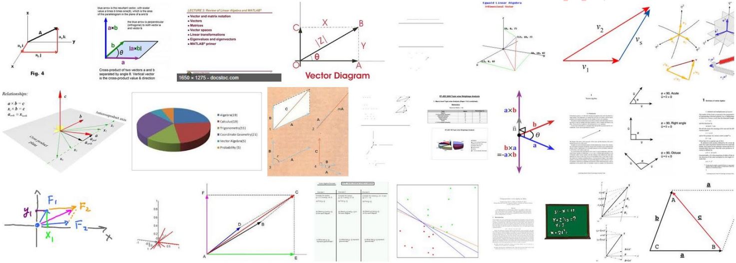
Αριθμοί σε 4 διαστάσεις

Τα τετραδόνια quaternions του Hamilton

In the THEORY OF SINGLE NUMBERS, the symbol $\sqrt{-1}$ is absurd, and denotes an IMPOSSIBLE EXTRACTION, or a merely IMAGINARY NUMBER; but in the THEORY OF COUPLES, the same symbol $\sqrt{-1}$ is significant, and denotes a POSSIBLE EXTRACTION, or a REAL COUPLE, namely ... the principal square root of the couple $(-1, 0)$. In the latter theory, therefore, though not in the former, this sign may be properly employed; and we may write, if we choose, for any couple (a_1, a_2) whatever $(a_1, a_2) = a_1 + a_2\sqrt{-1}$ ... ``Theory of conjugate functions, or algebraic couples'' (1837)

Αν ενδιαφέρεστε: Βλ. τους σχετικούς συνδέσμους στο e-class

Διανύσματα



- Διανύσματα ως γεωμετρικά αντικείμενα
- Σημεία στο «χώρο»
- Κατευθυνόμενα ευθύγραμμα τμήματα
- Ενδεχομένως δείχνουν από συγκεκριμένη «αρχή» σε ένα άκρο
- Διανυσματικός λογισμός

Τι είναι διάνυσμα ;

Vector is an exciting, arcade-style game featuring you as the exceptional free runner who won't be held down by the system. The game opens with a view into a totalitarian world where freedom and individually is nothing more than a distant dream. But the heart of a freerunner is strong, and you soon break free.

Vector - Android Apps on Google Play
https://play.google.com/store/apps/details?id=com.nekki.**vector**&hl=en

Τι είναι διάνυσμα;

Vector

From Wikipedia, the free encyclopedia

For the default skin on the English Wikipedia, see Wikipedia:Vector.

Vector may refer to:

Look up ***vector***, ***vectorial***, or ***vectors*** in Wiktionary, the free dictionary.

In mathematics and physics [edit]

- Vector (mathematics and physics)

In computer science [edit]

- A one-dimensional array
- Vector (C++), see Sequence container (C++)#Vector, a type in the C++ Standard Template Library referring to a sequence container
- Vector clock, an algorithm for generating a partial ordering of events in a distributed system and detecting causality violations
- Attack vector, the particular approach used, or vulnerability exploited, in order to penetrate a computer system's security or propagate malicious software
- Distance-vector routing protocol, a class of routing protocols used in packet-switched networks for computer communications
- Dope vector, a data structure used to store information about an array
- Feature vector, in pattern recognition and machine learning, an n-dimensional vector of numerical features that represent some object
- Initialization vector, used in cryptography
- Interrupt vector, the location in memory of an interrupt handling routine
- Vector game, refers to any video game that uses a vector graphics display
- Vector monitor, a display device used for early computers
- Vector processor, a computer processor which works on arrays of several numbers at once
- Vector graphics, images defined by geometric primitives as opposed to bitmaps
- Vector space model, an algebraic model for representing text documents - used in information filtering, information retrieval, indexing and relevancy rankings

Contents [hide]

In biology [edit]

- Vector (epidemiology), an organism, often an invertebrate arthropod, that transmits a pathogen from reservoir to host
- Vector (molecular biology), vehicle used to transfer genetic material to a target cell, such as:
  - Plasmid vector
  - Binary vector, a cloning vector used to generate transgenic plants
  - Cloning vector
  - Expression vector, a plasmid specifically used for protein expression in the target
  - Shuttle vector, a vector (usually a plasmid) constructed so that it can propagate in two different host species
  - Viral vector, a virus modified to deliver foreign genetic material into a cell
- Dispersal vector, an organism that carries and disperses reproductive structures (e.g., seeds, spores, or pollen) of a different species.

Πολλαπλές παράλληλες υπάρξεις των πρωταγωνιστών

Οι πρωταγωνιστές του παιχνιδιού συνυπάρχουν: αριθμητική (διατεταγμένη n-άδα αριθμών, πίνακας $m \times n$ αριθμών), γεωμετρική (σημείο στο χώρο, ποσότητα με κατεύθυνση και μήκος), αφηρημένη (στοιχείο ειδικού συνόλου που ονομάζεται διανυσματικός χώρος, γραμμικός μετασχηματισμός).

Τρόποι περιγραφής στη Γραμμική Άλγεβρα (Hιλ00)

Γεωμετρικός: με τη γλώσσα και τις έννοιες του γνωστού Ευκλείδειου χώρου (2 ή 3 διαστάσεις): κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα, σημείο, γραμμή, επίπεδο, γεωμετρικός μετασχηματισμός.

Αλγεβρικός: με τη γλώσσα και τις έννοιες της θεωρίας εξειδικευμένης στον $\mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{C}^n$: π.χ. n-άδες, μήτρες/μητρώα, λύσεις γραμμικού συστήματος, χώρος γραμμών, χώρος στηλών.

Αφαιρετικός: με τη γλώσσα και τις έννοιες της γενικής θεωρίας: π.χ. διανυσματικος χώρος, υπόχωρος, γραμμικό διάνοιγμα, διάσταση, τελεστής, πυρήνας.

Πρωταγωνιστές: Μητρώα ή Μήτρες

Το είναι; Συστοιχία (mn-άδα) στοιχείων, $\alpha_{i,j}$, από μία αλγεβρική δομή. (Ένας αλγεβριστής θα έλεγε, για να είναι όσο γενικοί θέλουν να είναι οι Μαθηματικοί, ότι τα στοιχεία προέρχονται από έναν αντιμεταθετικό δακτύλιο ή από ένα σώμα. Εδώ αρκεί να σκέφτεστε πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς, οπότε τα στοιχεία ανήκουν στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{C}$.[1] Τα στοιχεία δεικτοδοτούνται με 2 δείκτες (συνήθως υποδείκτες) και γράφονται σε μορφή πίνακα m γραμμών, n στηλών:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \cdots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix}$$

[1] Το σύνολο των πραγματικών με τις πράξεις $+$ και $\cdot$ και τους κανόνες που τις διέπουν είναι μία περίπτωση αλγεβρικού σώματος. Το ίδιο και οι μιγαδικοί.

Πίσω στις ρίζες: J.J. Sylvester: μήτρα ή μητρώο όχι ~~πίνακας~~!

THE COLLECTED

MATHEMATICAL PAPERS

OF

JAMES JOSEPH SYLVESTER

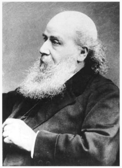
F.R.S., D.C.L., LL.D., Sc.D.,

Honorary Fellow of St John's College, Cambridge;
Sometime Professor at University College, London; at the University of Virginia;
at the Royal Military Academy, Woolwich; at the Johns Hopkins University, Baltimore
and Savilian Professor in the University of Oxford

VOLUME I

(1837—1853)

Cambridge
At the University Press
1904



Born	3 September 1814 London, England
Died	15 March 1897 (aged 82) London, England
Nationality	United Kingdom
Fields	Mathematics
Institutions	Johns Hopkins University University College London University of Virginia Royal Military Academy, Woolwich

150 *On a new Class of Theorems.* [25

its form of greatest generality. For this purpose we must commence, not with a square, but with an oblong arrangement of terms consisting, suppose, of m lines and n columns. This will not in itself represent a determinant, but is, as it were, a Matrix out of which we may form various systems of determinants by fixing upon a number p, and selecting at will p lines and p

37] *Linearly Equivalent Quadratic Functions.* 247

I have in previous papers defined a "Matrix" as a rectangular array of terms, out of which different systems of determinants may be engendered, as from the womb of a common parent; these cognate determinants being by no means isolated in their relations to one another, but subject to certain simple laws of mutual dependence and simultaneous deperition. The condensed representation of any such Matrix, according to my improved Vandermondian notation, will be

$$\begin{Bmatrix} a_1, & a_2 \dots a_n \\ \alpha_1, & \alpha_2 \dots \alpha_m \end{Bmatrix}.$$

- Λέμε ότι το A είναι ένα μητρώο m γραμμών και n στηλών, ή ένα μητρώο μεγέθους $m \times n$.
- Όταν αναφερόμαστε στη θέση ενός στοιχείου στον πίνακα (π.χ. με δείκτες), πρώτα αναφέρουμε τη γραμμή και μετά τη στήλη. Έτσι γίνεται και η δεικτοδότηση.
- Τα $\alpha_{i,j}$ λέγονται τα στοιχεία ή οι συνιστώσες του μητρώου.
- Πολλές φορές χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $[\alpha_{i,j}]_{m,n}$.
- Αν δύο μητρώα έχουν το ίδιο πλήθος γραμμών και το ίδιο πλήθος στηλών θα τα ονομάζουμε σύμμορφα.

- Αν το μητρώο έχει μόνο μία γραμμή ($m = 1$) ή μία μόνο στήλη ($n = 1$) καλείται διάνυσμα γραμμή ή διάνυσμα στήλη αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή παραλείπουμε τον δείκτη που είναι 1. Σκεφτείτε τα διανύσματα ως «εκφυλισμένους» πίνακες.
- Προσοχή Συνήθως στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι τα ‘διανύσματα’ χαρακτηρίζονται από 2 διάστασεις εκ των οποίων η μία είναι 1.
- ... μπορείτε επίσης να θεωρήσετε τα μητρώα ως παράθεση σύμμορφων διανυσμάτων, π.χ. n στηλών ή m γραμμών.
- Αν $m = n$ το μητρώο λέγεται τετραγωνικό.
- Τα στοιχεία των οποίων η θέση τους στη γραμμή είναι ίδια με τη θέση τους στη στήλη αποτελούν την «κύρια διαγώνιο» του μητρώου. Αναφερόμαστε επίσης και στην *υποδιαγώνιο, υπερδιαγώνιο* και *κύρια αντιδιαγώνιο*.
- Αν τα στοιχεία του A ορίζονται επί ενός αλγεβρικού χώρου (αντιμεταθετικος δακτύλιος ή σώμα) $\mathbb{K}$, γράφουμε $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$.

Συμβολισμοί

αριθμοί (βαθμωτοί) Πεζά ελληνικά γράμματα για βαθμωτούς, π.χ. α, β, ξ, ψ, ενδεχομένως με δείκτες.

διαστάσεις, δείκτες πεζά λατινικά, π.χ. i, j, k, m, n

διανύσματα πεζά λατινικά, π.χ. x, y, a, b

μητρώα Κεφαλαία λατινικά για μητρώα π.χ. A, B, X, Y, P

Κεφαλαίο λατινικό $\rightarrow$ πεζό λατινικό $\rightarrow$ πεζό ελληνικό

Απλές πράξεις

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό που αναφέραμε

Πρόσθεση σύμμορφων διανυσμάτων ή σύμμορφων μητρώων: Παράγεται το (σύμμορφο) διάνυσμα ή μητρώο με στοιχεία που προέρχονται από την πρόσθεση των αντίστοιχων στοιχείων των διανυσμάτων ή μητρώων.

$$c = a + b, C = A + B$$

Πολλαπλασιασμός με αριθμό (βαθμωτό): Παράγεται το (σύμμορφο) διάνυσμα ή μητρώο με στοιχεία που προέρχονται από τον πολλαπλασιασμό με το βαθμωτό κάθε στοιχείου του διανύσματος ή μητρώου.

$$c = \psi a, C = \psi A$$

Παρατήρηση: Παρόλο που εδώ φαίνεται ότι κάνουμε τη διάκριση μεταξύ μητρώων και διανυσμάτων, θα αρκούσε να ορίσουμε τις πράξεις αυτές μεταξύ μητρώων και να θεωρήσουμε ότι ισχύουν (κατά μείζονα λόγο) και για τα διανύσματα.

Απλή Γραμμική Άλγεβρα

$(1 \leq m, n \leq 2)$

Τα όντα μας στην ΕΠΙΠΕΔΟΧΩΡΑ!! Εξετάζοντας το σχήμα και το περιεχόμενό τους!

$$\{-1, 0, 1.1, 10^{-4}, 2, \ldots\}, \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots\right\}$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ldots\right\}$$

Απλή Γραμμική Άλγεβρα

$(1 \leq m, n \leq 2)$

Τα όντα μας στη ΕΠΙΠΕΔΟΧΩΡΑ!! Με ΟΝΟΜΑ

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \; c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \; p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \; Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Θεωρούμε ότι δύο αντικείμενα είναι ίσα αν και μόνον αν έχουν α) το ίδιο σχήμα και β) τα ίδια στοιχεία στις ίδιες θέσεις. Αυτό γιατί το βασικό αλγεβρικό αντικείμενο είναι το ΜΗΤΡΩΟ, το σχήμα του οποίου είναι ίδιο με πίνακα με m γραμμές και n στήλες. Στην επιπεδοχώρα, σημαίνει 1 ή 2 γραμμές και 1 ή 2 στήλες.

Παραδείγματα

- Τα A, I, L, Z, U, B είναι μητρώα 2 γραμμών, 2 στηλών. Λέμε ότι είναι 2×2
- Τα a, b, c είναι μητρώα 1 γραμμής, 2 στηλών. Λέμε ότι είναι 1×2. Είναι διανύσματα-γραμμές.
- Τα p, e_1, e_2 είναι μητρώα 2 γραμμών, 1 στήλης. Λέμε ότι είναι 2×1. Είναι διανύσματα-στήλες.
- Ένας αριθμός (βαθμωτός) μπορεί να θεωρηθεί ως μητρώο 1×1.

Απλή Γραμμική Άλγεβρα

$(1 \leq m, n \leq 2)$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \; c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \; p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \; Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> Στα διανύσματα που έχετε μάθει στο «διανυσματικό λογισμό» (βλ. Φυσικομαθηματικά) δεν γινόταν διάκριση αν ένα διάνυσμα ήταν γραμμή ή στήλη. ΕΔΩ ΘΕΩΡΟΥΝΤΑΙ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ!

ΕΠΟΜΕΝΩΣ το a και το b είναι ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΑ (φρούτα μεν, αλλά όπως τα μήλα με τα πορτοκάλια). Δεν μπορούμε καν να τα συγκρίνουμε.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u> ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΟΥΜΕ $\rightarrow$ Δύο αντικείμενα <u>που έχουν το ίδιο σχήμα</u> είναι ίσα αν και μόνον αν <u>τα στοιχεία τους στις αντίστοιχες θέσεις είναι ίσα.</u>

Πράξεις: ΑΘΡΟΙΣΗ

αντικειμένων ίδιου σχήματος

Προσθέτουμε τα στοιχεία που βρίσκονται στις αντίστοιχες θέσεις. Το αποτέλεσμα έχει το ίδιο σχήμα!

$$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+1\\2+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-1\\2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Υπολογίσαμε τα $p+e_1$ και $p-e_1$

Πράξεις: ΑΘΡΟΙΣΗ

αντικειμένων ίδιου σχήματος

Προσθέτουμε τα στοιχεία που βρίσκονται στις αντίστοιχες θέσεις. Το αποτέλεσμα έχει το ίδιο σχήμα!

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Υπολογίσαμε τα $p+e_1$ και $p-e_1$
Να υπολογίσουμε το $A+I$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> Απαγορεύεται να αθροίζουμε αντικείμενα διαφορετικού σχήματος!

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}, \quad \cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \quad \cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3}$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ με βαθμωτό

Πολλαπλασιάζουμε κάθε στοιχείο με το βαθμωτό. Το αποτέλεσμα έχει το ίδιο σχήμα.

$$(3 \quad 6) = (3\cdot 1 \quad 3\cdot 2) = 3\cdot(1 \quad 2), \ \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot 1\\3\cdot 2\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}3 & 6\\6 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot 2\\3\cdot 2 & 3\cdot 1\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$$

Συμβολισμοί και αναστροφή

Το βιβλίο του Strang χρησιμοποιεί τετραγωνικές αγκύλες για να ορίσει διανύσματα και μητρώα. Γράφει επίσης

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ ή } (1, 2, 3)$$

που είναι 3×1 και διαφορετικά από το 1×3 διάνυσμα γραμμή

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Εμείς χρησιμοποιούμε παρενθέσεις για να εγκλείσουμε διανύσματα στήλες, διανύσματα γραμμές ή μητρώα. Όταν θέλουμε να εξοικονομίσουμε χώρο, χρησιμοποιούμε το σύμβολο της αναστροφής:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^\top \text{ για το } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(με ή χωρίς τα κόμματα). Ο υπερδείκτης $\top$ σημαίνει αναστροφή του αντικειμένου, δηλ. οι γραμμές γίνονται στήλες και οι στήλες γραμμές.

Κανόνες αριθμητικής με μητρώα:

Άθροιση μητρώων, πολλαπλασιασμός με βαθμωτούς

Περί ισότητας είδαμε ήδη ότι $A = B$ είναι ίσα αν και μόνον αν

- (# γραμμών A) = (# γραμμών B) και (# στηλών A) = (# στηλών B)
- Τα στοιχεία τους στις αντίστοιχες θέσεις είναι ίσα.

επίσης Αν A, B είναι μητρώα:

$A = B$ ή $A \neq B$.

$A = A$,

$A = B \Leftrightarrow B = A$,

$A = B, B = C \Rightarrow A = C$.

Αν A, B, C μητρώα ίδιου μεγέθους:)

- Το σύνολο των μητρώων ίδιου μεγέθους είναι κλειστό ως προς $+$ μητρώων
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (προσεταιριστική ιδιότητα ως προς $+$ μητρώων)
- $A + B = B + A$ (αντιμεταθετική ιδιότητα ως προς $+$ μητρώων)
- Αν 0 είναι το μηδενικό ίδιου μεγέθους με το A τότε $A + 0 = A$. Το μηδενικό μητρώο είναι μοναδικό.
- Για κάθε μητρώο A υπάρχει μοναδικό B τέτοιο ώστε $A + B = 0$. Ειδικότερα, $B = -A$.
- Το σύνολο των μητρώων ίδιου μεγέθους είναι κλειστό ως προς την πράξη $\cdot$ (με βαθμωτούς)

Αν α, β βαθμωτοί

- $1 \cdot A = A$
- $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

Γραμμικός συνδυασμός

Αν P, Q είναι αντικείμενα του ίδιου χώρου και α, β κάποιοι βαθμωτοί τότε το αντικείμενο

$$R = \alpha \cdot P + \beta \cdot Q$$

αποκαλείται γραμμικός συνδυασμός (γ.ς .) των P, Q. Τα α, β είναι οι συντελεστές του συνδυασμού.
Από εδώ και πέρα παραλείπουμε το $\cdot$ για τον πολλαπλασιασμό με βαθμωτό.

Γραμμικός συνδυασμός και Διάνοιγμα

Ορισμός

Έστω η συλλογή των διανυσμάτων $U = \{u_1, u_2, ..., u_s\}$ και οι (μη μηδενικοί) βαθμωτοί $\alpha_1, .., \alpha_s$. Η έκφραση

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_s u_s$$

αποκαλείται γραμμικός συνδυασμός (των εν λόγω s διανυσμάτων). Το σύνολο Υ όλων των διανυσμάτων u τ.ώ.

$$\mathcal{U} := \{u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_s u_s | \alpha_j \in \mathbb{R} \}$$

λέγεται διάνοιγμα (span) των διανυσμάτων του U.

Παρατήρηση Θεωρούμε τα διανύσματα δοθέντα και τους συντελεστές α_j παραμέτρους που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή.

Ενδιαφέροντα ερωτήματα

Δίνεται σύνολο από διανύσματα, π.χ. $U = \{u_1, \ldots, u_s\}$ (θεωρούμε πάντα ότι εκκινούν από το 0).

- Ποιό είναι το διάνοιγμα του U;
- Δοθέντος ενός διανύσματος v, μπορούμε να το γράψουμε ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων του U;

Παράδειγμα 1 Αν $U = \{u_1\}$ το διάνοιγμα είναι όλα τα σημεία της ευθείας που περιέχει το u_1.

Παράδειγμα 2 Αν $U = \{u_1, u_2\}$ και δεν είναι συγγραμμικά, το διάνοιγμα είναι όλο το επίπεδο που ορίζεται από τις 2 ευθείες επί των οποίων κείνται τα διανύσματα.

Πολλαπλασιασμός μητρώων: Μητρώο επί διάνυσμα

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε μητρώα μεταξύ τους μόνον εφόσον ικανοποιούνται ορισμένοι απλοί κανόνες που αφορούν στις διαστάσεις τους. Οι πράξεις που επιτελούνται μπορούν να ερμηνευτούν με διάφορους τρόπους.

<u>Μητρώο επί διάνυσμα-στήλη: ερμηνεία με γραμμικό συνδυασμό</u> Το αποτέλεσμα είναι το διάνυσμα στήλη που σχηματίζεται από το γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων-στηλών που σχηματιζονται από τις στήλες του μητρώου με συντελεστές τα στοιχεία του δεξιού διανύσματος (πολλαπλασιαστέου).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός μητρώων: Μητρώο επί διάνυσμα

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε μητρώα μεταξύ τους μόνον εφόσον ικανοποιούνται ορισμένοι απλοί κανόνες που αφορούν στις διαστάσεις τους. Οι πράξεις που επιτελούνται μπορούν να ερμηνευτούν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους (είναι σημαντικό να εξοικειωθείτε με όλους!) Εκκινούμε με έναν από αυτούς, που βασίζεται στην έννοια του γραμμικού συνδυασμού.

Διάνυσμα-γραμμή επί μητρώο: ερμηνεία με γραμμικό συνδυασμό Το αποτέλεσμα είναι το διάνυσμα γραμμή που σχηματίζεται από το γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων-γραμμών που σχηματιζονται από τις γραμμές του μητρώου με συντελεστές τα στοιχεία του αριστερού διανύσματος (πολλαπλασιαστή).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

J. Hillel.
Modes of description and the problem of representation in linear algebra.
In J.L. Dorier, editor, *The Teaching of Linear Algebra in Question*, pages 191--207. Kluwer Academic Pub., 2000.