ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ε. Γαλλόπουλος & Ε. Στεφανόπουλος

CEID

Διάλεξη 3

27 Φεβρουαρίου 2017

Έννοιες, λέξεις κλειδιά, υπενθύμιση I

Υπενθύμιση της 2ης δ.

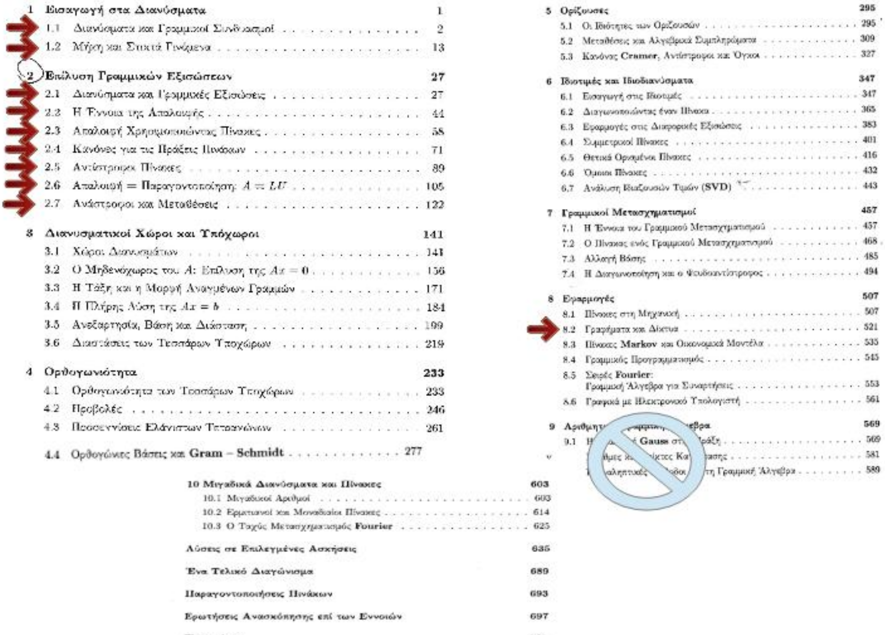
- Πολλαπλασιασμός μητρώων και κανόνες εφαρμογής του (συνχ.)
- Μητρώα μετάθεσης και η ειδική περίπτωση της εναλλαγής.
- Δυνάμεις μητρώων.
- Άλλα ειδικά μητρώα: Διαγώνια, τριγωνικά, τριδιαγώνια, Toeplitz. Αραιά μητρώα.
- Κυρτός συνδυασμός διανυσμάτων.

Έννοιες, λέξεις κλειδιά, υπενθύμιση II

Σήμερα (όροι 3ης δ.):

- Εσωτερικό γινόμενο: Καθετότητα, γωνία μεταξύ διανυσμάτων, ιδιότητες.
- Σχέσεις: Ανισότητα CBS, τριγωνική ανισότητα, κανόνας παραλληλογράμμου, ταυτότητα Πυθαγόρα.
- Πολλαπλασιασμός μητρώων μέσω εσωτερικών γινομένων.
- Συμβολισμός επλογής υπομητρώων από μητρώο.
- Κόστος βασικών πράξεων: Εσωτερικό γινόμενο, πολλ. μητρώου με διάνυσμα και μητρώου με μητρώο.
- Δυνάμεις και πολυώνυμα μητρώου. Αντίστροφο μητρώου.
- Ανάκτηση πληροφορίας από μητρώο.
- Μητρώα και γραφήματα
- Μέτρηση διαδρομών με δυνάμεις και δυναμοσειρές μητρώων.
- Αντίτροφο μητρώου.
- Περιπτώσεις εύκολης αντιστροφής ή διάγνωσης μη αντιστρεψιμότητας.
- Ορθογώνια μητρώα.

Υπό συζήτηση ενότητες



1 Εισαγωγή στα Διανύσματα 1
1.1 Διανύσματα και Γραμμικοί Συνδυασμοί 2
1.2 Μήκη και Εσωτερικά Γινόμενα 13

2 Επίλυση Γραμμικών Εξισώσεων 27
2.1 Διανύσματα και Γραμμικές Εξισώσεις 27
2.2 Η Έννοια της Απαλοιφής 44
2.3 Απαλοιφή Χρησιμοποιώντας Πίνακες 58
2.4 Κανόνες για τις Πράξεις Πινάκων 71
2.5 Αντίστροφοι Πίνακες 89
2.6 Απαλοιφή = Παραγοντοποίηση: $A = LU$ 105
2.7 Ανάστροφοι και Μεταθέσεις 122

3 Διανυσματικοί Χώροι και Υπόχωροι 141
3.1 Χώροι Διανυσμάτων 141
3.2 Ο Μηδενόχωρος του A: Επίλυση της $Ax = 0$ 156
3.3 Η Τάξη και η Μορφή Ανηγμένων Γραμμών 171
3.4 Η Πλήρης Λύση της $Ax = b$ 184
3.5 Ανεξαρτησία, Βάση και Διάσταση 199
3.6 Διαστάσεις των Τεσσάρων Υποχώρων 219

4 Ορθογωνιότητα 233
4.1 Ορθογωνιότητα των Τεσσάρων Υποχώρων 233
4.2 Προβολές 246
4.3 Προσεγγίσεις Ελάχιστων Τετραγώνων 261
4.4 Ορθογώνιες Βάσεις και **Gram – Schmidt** 277

5 Ορίζουσες 295
5.1 Οι Ιδιότητες των Οριζουσών 295
5.2 Μεταθέσεις και Αλγεβρικά Συμπληρώματα 309
5.3 Κανόνας **Cramer**, Αντίστροφοι και Όγκοι 327

6 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα 347
6.1 Εισαγωγή στις Ιδιοτιμές 347
6.2 Διαγωνοποιώντας έναν Πίνακα 365
6.3 Εφαρμογές στις Διαφορικές Εξισώσεις 383
6.4 Συμμετρικοί Πίνακες 401
6.5 Θετικά Ορισμένοι Πίνακες 416
6.6 Όμοιοι Πίνακες 432
6.7 Ανάλυση Ιδιαζουσών Τιμών (**SVD**) 443

7 Γραμμικοί Μετασχηματισμοί 457
7.1 Η Έννοια του Γραμμικού Μετασχηματισμού 457
7.2 Ο Πίνακας ενός Γραμμικού Μετασχηματισμού 468
7.3 Αλλαγή Βάσης 485
7.4 Η Διαγωνοποίηση και ο Ψευδοαντίστροφος 494

8 Εφαρμογές 507
8.1 Πίνακες στη Μηχανική 507
8.2 Γραφήματα και Δίκτυα 521
8.3 Πίνακες **Markov** και Οικονομικά Μοντέλα 535
8.4 Γραμμικός Προγραμματισμός 545
8.5 Σειρές **Fourier**: Γραμμική Άλγεβρα για Συναρτήσεις 553
8.6 Γραφικά με Ηλεκτρονικό Υπολογιστή 561

9 Αριθμητ[illegible]εβρα 569
9.1 Η [illegible] **Gauss** στ[illegible]ράξη 569
[illegible]θμες κα[illegible]ίκτες Κα[illegible]στασης 581
[illegible]αληπτικές [illegible]οδοι [illegible] στη Γραμμική Άλγεβρα 589

10 Μιγαδικά Διανύσματα και Πίνακες 603
10.1 Μιγαδικοί Αριθμοί 603
10.2 Ερμιτιανοί και Μοναδιαίοι Πίνακες 614
10.3 Ο Ταχύς Μετασχηματισμός **Fourier** 625

Λύσεις σε Επιλεγμένες Ασκήσεις 635

Ένα Τελικό Διαγώνισμα 689

Παραγοντοποιήσεις Πινάκων 693

Ερωτήσεις Ανασκόπησης επί των Εννοιών 697

Ορολογία

- Πραγματικό διάνυσμα = Διάνυσμα με στοιχεία που λαμβάνουν πραγματικές τιμές
- Μιγαδικό διάνυσμα = Διάνυσμα με στοιχεία που λαμβάνουν μιγαδικές τιμές
- Ο πραγματικός ευκλείδειος χώρος, $\mathbb{R}^n$, αποτελείται από το σύνολο των *n*-άδων (*n*-tuples) πραγματικών αριθμών, (το σύμβολο " :" σηματοδοτεί ορισμό του αριστερού μέλους με το δεξιό):

$$\mathbb{R}^n \quad := \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R} = \{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) | \alpha_1 \in \mathbb{R},\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

- Ορίζουμε επίσης το

$$\mathbb{C}^n \quad := \quad \mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C} = \{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) | \alpha_1 \in \mathbb{C},\ldots,\alpha_n \in \mathbb{C}\}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι όλα τα διανύσματα στα οποία αναφερόμαστε είναι σύμμορφα άρα μπορούν να συνδυαστούν γραμμικά.

Εσωτερικό γινόμενο: μικρή υπενθύμιση από τη Φυσική

Στον Ευκλείδειο χώρο 2 διαστάσεων: Αν

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

Αν $a, b \in \mathbb{R}^2$ τότε

$$\langle a, b \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$$

Ορολογία: Από διανύσματα παράγεται βαθμωτός. Το εσωτερικό γινόμενο λέγεται επίσης βαθμωτό γινόμενο ή στικτό γινόμενο. (που είναι μεταφράσεις των inner, scalar, dot product αντίστοιχα.)

Εσωτερικό γινόμενο, μήκος, μοναδιαίο διάνυσμα

Εσωτερικό (ή βαθμωτό) γινόμενο

Ορίζεται ως οποιαδήποτε βαθμωτή συνάρτηση $\langle\ ,\ \rangle$ (δηλ. το αποτέλεσμα είναι βαθμωτός) ενός διατεταγμένου ζεύγους διανυσμάτων (a, b) ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \langle a, b\rangle &= \overline{\langle b, a\rangle} \\ \langle \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2, b\rangle &= \xi_1\langle a_1, b\rangle + \xi_2\langle a_2, b\rangle \\ \langle a, a\rangle &\geq 0 \text{ και } \langle a, a\rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0 \end{aligned}$$

Μήκος πραγματικού διανύσματος

Το μήκος διανύσματος a (επίσης, `ευκλείδεια νόρμα' ή `νόρμα-2') ορίζεται ως[α'].

$$\|a\| := \sqrt{\langle a, a\rangle}$$

[α'] Προσέξτε: από αυτά που είδαμε για το εσωτερικό γινόμενο, το όρισμα θα είναι πραγματικός μη αρνητικός αριθμός. Επίσης εδώ εννοείται η θετική τετραγωνική ρίζα.

Εσωτερικό γινόμενο στον Ευκλείδειο χώρο

Αν $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ τότε τα διανύσματα είναι της μορφής

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

και ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο ως το βαθμωτό

$$\langle a, b \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n$$

Στο λογισμό μητρώων: Γράφουμε $a^\top b$ όπου τα a, b είναι διανύσματα (στήλες).

Άσκηση: Να επαληθεύσετε ότι ο παραπάνω τύπος ικανοποιεί τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου (στο $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$).

Πόσο κοστίζει το εσωτερικό γινόμενο;

- Θα μετρήσουμε το κόστος ως προς τις εκτελούμενες βασικές αριθμητικές πράξεις.
- Για τον υπολογισμό χρειάζονται το πολύ n πολλαπλασιασμοί και $n-1$ προσθέσεις, δηλ. σύνολο $2n-1$ **αριθμητικές πράξεις** (συντομεύουμε και ως $2n$.)
- Το κόστος είναι γραμμικό (δηλ. αν διπλασιάσουμε το n, διπλασιάζονται και οι πράξεις, κ.ο.κ.)

Μαθηματικές παρατηρήσεις

Έστω ότι υπάρχει κάποιος 'χώρος'[1] $\mathcal{V}$ από τον οποίο αντλούμε διανύσματα. Επίσης συμβολίζουμε με $\mathbb{R}_+$ τους πραγματικούς μη αρνητικούς αριθμούς.

- Όταν τα διανύσματα είναι πραγματικά, προσέξτε ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τη συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$:
    - συμμετρία
    - γραμμικότητα ως προς κάθε μεταβλητή (διγραμμικότητα)
    - αυστηρή θετικότητα του $\langle a, a \rangle$ για κάθε μη μηδενικό a.
- Πιο γενικά, η νόρμα ($\| \cdot \|$) μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση $\| \cdot \| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_+$ για την οποία ισχύει ότι $\|x\| \geq 0$ για κάθε x στο χώρο και ότι $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- Μία γενική νόρμα διανυσμάτων είναι η νόρμα-p (συνήθως λέγεται νόρμα ℓ_p)

$$\|x\|_p = (|\xi_1|^p + \cdots + |\xi_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

- Μία συνάρτηση χαρακτηρίζεται ως ημινόρμα (seminorm) αν ισχύουν οι ιδιότητες της νόρμας εκτός από την αυστηρή θετικότητα, δηλ. υπάρχει $x \neq 0 \in \mathcal{V}$ τ.ώ. $\|x\| = 0$.

---

[1] Σύντομα θα δούμε τι χώρος είναι αυτός (γραμμικός διανυσματικός χώρος)

Προσοχή στο σώμα ορισμού και στο είδος της νόρμας!

Ποιό είναι το μήκος του $x = [4, -1, \sqrt{8}]$;

- $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle >} = \sqrt{4^2 + 1 + 8} = 5$
- Όμως υπάρχουν και άλλες νόρμες: $\|x\|_1 = |4| + |-1| + |\sqrt{8}|$, $\|x\|_\infty = \max\{|4|, |-1|, |\sqrt{8}|\} = 4$.
- Γενικότερα $\|x\|_p = (|\xi_1|^p + \cdots + |\xi_n|^p)^{1/p}$ για θετικό ακέραιο p
- $\|x\|_0 = (\#$ μη μηδενικών στοιχείων του $x)$

Η περίπτωση των μιγαδικών διανυσμάτων: Ποια είναι η Ευκλείδεια νόρμα του $x = [1, \iota]$;

- Είναι $\sqrt{1 + \iota^2}$;
- ΟΧΙ γιατί τότε θα είχε μηδενική νόρμα-2 !!! (αντιβαίνει στον κανόνα ότι το μόνο το μηδενικό διάνυσμα έχει μηδέν νόρμα).
- Για να αποφευχθεί αυτό το πρόβλημα, ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου στον ευκλείδειο μιγαδικό χώρο είναι λίγο διαφορετικός.
- Βλ. σελ. 614-615 του βιβλίου.

Στον μιγαδικό ευκλείδειο χώρο $\mathbb{C}^n$

Ο χώρος που αποτελείται από το σύνολο των σημείων (n-tuples) του Καρτεσιανού γινομένου

$$\mathbb{C}^n := \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) | \alpha_1 \in \mathbb{C}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}\}$$

Τότε

$$\langle a, b \rangle := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta}_j$$

Προσέξτε ότι η παραπάνω τροποποίηση είναι απαραίτητη, ειδάλλως μπορεί να ισχύει ότι $\langle a, a \rangle < 0$, κάτι που δεν θέλουμε. Για παράδειγμα, αν χρησιμοποιούσαμε τον ορισμό για τα πραγματικά διανύσματα για το διάνυσμα $a = [\imath, 0]$, τότε θα είχαμε για μήκος τη τετραγωνική ρίζα του $\imath \cdot \imath + 0 = -1$.
Με τον τροποποιημένο ορισμό, $\langle a, a \rangle = (-\imath)\imath + 0 = 1$ επομένως δεν υπάρχει πρόβλημα (προκύπτει ότι $\|a\| = 1$.)

Εσωτερικό γινόμενο (υπενθ.)

Ιδιότητες

Συμμετρία $\langle a,b\rangle = \overline{\langle b,a\rangle}$

Διγραμμικότητα $\langle \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2, b\rangle = \xi_1\langle a_1, b\rangle + \xi_2\langle a_2, b\rangle$

Θετικότητα $\langle a,a\rangle \geq 0$ και ισότητα με 0 αν και μόνον αν $a = 0$.

Εσωτερικό γινόμενο στον Ευκλείδειο χώρο

- Για πραγματικά διανύσματα (δηλ. διανύσματα με πραγματικά στοιχεία)

$$\langle a,b\rangle := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j, \quad \text{και } \|a\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2\right)^{1/2}$$

- Για μιγαδικά διανύσματα (δείτε και παρακάτω)

$$\langle a,b\rangle := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta_j}, \quad \text{και } \|a\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2\right)^{1/2}$$

Σημ.: Η ορισθείσα νόρμα διανύσματος αποκαλείται Ευκλείδεια νόρμα ή 2-νόρμα. Αν είναι προφανές ότι εννοείται αυτή, μπορεί να παραλείπεται ο υποδείκτης και γράφουμε απλά $\|a\|$.

Μοναδιαίο διάνυσμα

Μοναδιαίο αποκαλείται κάθε διάνυσμα μήκους 1. Οποιοδήποτε μη μηδενικό διάνυσμα μπορεί να «κανονικοποιηθεί» ώστε να παραχθεί ένα «συγγραμμικό» διάνυσμα μήκους 1:

$$\hat{a} = \frac{1}{\|a\|} a$$

Παράδειγμα: Αν $a = [3,4]^\top$ τότε

$$\hat{a} = \frac{1}{\|a\|} a = \frac{1}{\sqrt{25}} a = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Πόρισμα 1:

Γενικά σχύει ότι

$$\langle a, \xi_1 b + \xi_2 c \rangle = \bar{\xi}_1 \langle a, b \rangle + \bar{\xi}_2 \langle a, c \rangle$$

Απόδειξη: ΔΕΙΞΤΕ ΤΟ

Πόρισμα 2:

Αν τα διανύσματα και οι βαθμωτοί δεν περιέχουν μιγαδικές τιμές τότε

$$\langle a, \xi_1 c + \xi_2 c \rangle = \xi_1 \langle a, b \rangle + \xi_2 \langle a, c \rangle$$

Απόδειξη: Τετριμμένη

Καθετότητα / ορθογωνιότητα και Γωνίες

Ορθογωνιότητα διανυσμάτων

Έστω δύο διανύσματα a, b και ότι $\langle a, b \rangle = 0$. Τότε λέγεται ότι είναι κάθετα ή ορθογώνια (μεταξύ τους).

Γωνία μεταξύ διανυσμάτων

Η γωνία, έστω ϕ, μεταξύ των διανυσμάτων a και b ορίζεται ως η τιμή που ικανοποιεί

$$\phi := \arccos\left(\frac{1}{\|a\|_2 \|b\|_2}\langle a, b\rangle\right).$$

Συχνά χρησιμοποιούμε απευθείας το συνημίτονο $\cos\phi = \frac{1}{\|a\|_2\|b\|_2}\langle a, b\rangle$

Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ διανυσμάτων και μήκος διανύσματος

Η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των , b ορίζεται ως $\|a - b\|_2$ και το μήκος διανύσματος είναι η απόστασή του από το 0, δηλ. $\|a\|_2$.

Παρατηρήσεις

(Θεωρούμε ότι χρησιμοποιούμε την νόρμα $\|\cdot\|_2$)

Δίδονται σύμμορφα διανύσματα a, b,

$$\begin{aligned}\|a+b\|^2 &= \langle a+b, a+b\rangle = \langle a, a+b\rangle + \langle b, a+b\rangle \\ &= (\langle a,a\rangle + \langle a,b\rangle) + (\langle b,a\rangle + \langle b,b\rangle) \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 + \langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\Re\langle a,b\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|a-b\|^2 &= \langle a-b, a-b\rangle = \langle a, a-b\rangle - \langle b, a-b\rangle \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 - \langle a,b\rangle - \langle b,a\rangle \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\Re\langle a,b\rangle\end{aligned}$$

Αν τα a, b είναι κάθετα μεταξύ τους, $\langle a,b\rangle = 0$ επομένως

$$\|a-b\|^2 = \|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \text{ Πυθαγόρειο θεώρημα!}$$

Σημαντικές ισότητες και ανισότητες

Θεωρούμε ότι χρησιμοποιούμε τη νόρμα-2

Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz (CBS)

$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ με ισότητα ανν $x = \alpha y$ ή ένα από τα x, y μηδενικό.

Τριγωνική ανισότητα

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Κανόνας παραλληλογράμου

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Πυθαγόρεια ταυτότητα

Αν $x \perp y$ τότε $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Σημ.: Ορισμένα από τα παραπάνω γενικεύονται και σε άλλες νόρμες (για τις οποίες δεν μιλήσαμε ακόμα!)

Πολλαπλασιασμός μητρώων

(θεώρηση μέσω εσωτερικών γινομένων)

Ο πολλαπλασιασμός του $m \times k$ μητρώου A με το $k \times n$ μητρώο B γράφεται ως

$$C \quad = \quad AB$$

Το γινόμενο C είναι $m \times n$ και νοείται μόνον όταν το πλήθος στηλών του A είναι ίσο με το πλήθος γραμμών του B.

Μέσω εσωτερικών γινομένων

Το στοιχείο στη θέση (i, j) του C είναι ίσο με το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής i του A με τη στήλη j του B.

Πολλαπλασιασμός μητρώων: Θεώρηση μέσω εσωτερικών γινομένων

$$\begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \cdots & \gamma_{1,n} \\ \boxed{\gamma_{2,1}} & \gamma_{2,2} & \cdots & \gamma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m,1} & \gamma_{m,2} & \cdots & \gamma_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,k} \\ \alpha_{\mathbf{2},\mathbf{1}} & \alpha_{\mathbf{2},\mathbf{2}} & \cdots & \alpha_{\mathbf{2},\mathbf{k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \cdots & \alpha_{m,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{\mathbf{1},\mathbf{1}} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \beta_{\mathbf{2},\mathbf{1}} & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{\mathbf{k},\mathbf{1}} & \beta_{k,2} & \cdots & \beta_{k,n} \end{pmatrix}$$

Γενικός τύπος

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j} &= \alpha_{i,1}\beta_{1,j} + \alpha_{i,2}\beta_{2,j} + \cdots + \alpha_{i,k}\beta_{k,j} \\ &= \sum_{s=1}^{k} \alpha_{i,s}\beta_{s,j}, \text{ για } i = 1, \ldots, m \text{ και } j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Σχόλια

- Συμπεραίνουμε (είδαμε στην τάξη) ότι το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων μεγέθους k στοιχίζει $2k-1$ αριθμ. πράξεις και κατά συνέπεια ο πολλαπλασιασμός των παραπάνω μητρώων κοστίζει $mn(2k-1)$ αριθμ. πράξεις.
- Αν οι διαστάσεις είναι ίδιες, το κόστος είναι ανάλογο του n^3 (κυβικό). Δηλ. ο πολλαπλασιασμός δύο μητρώων μεγέθους 100×100 στοιχίζει $100^3 = 10^6$ αριθμητικές πράξεις! Η μείωση του κόστους σε πράξεις του πολλαπλασιασμού μητρώων είναι ένας σημαντικός στόχος των ερευνητών σήμερα. Για παράδειγμα, έχει αποδειχθεί ότι με ειδικές μεθόδους μπορούμε να υπολογίσουμε το γινόμενο με πλήθος πράξεων της τάξης του $\gamma n^{\log_2 7}$ για κάποια σταθερά γ, που για μεγάλο n είναι μικρότερο του $2n^3$.
- Είδαμε διάφορους τρόπους με τους οποίους ορίσαμε τον πολλαπλασιασμό μητρώων. Πριν λίγο με εσωτερικά γινόμενα και στην προηγούμενη διάλεξη ως συλλογή πολλαπλασιασμών μητρώου με διανύσματα (π.χ. τις στήλες του πολλαπλασιαζόμενου μητρώου).
- Οι τρόποι είναι ισοδύναμοι μαθηματικά ισοδύναμοι αλλά όπως θα δούμε στη διάρκεια του εξαμήνου και σε άλλα μαθήματα, η ισοδυναμία αυτή δεν εξασφαλίζει ίδιο κόστος και ακρίβεια όταν υλοποιούνται ως προγράμματα (και εκεί χρειάζεται να παρέμβουμε για να επιλέξουμε τον "καλύτερο τρόπο").

Ιδιότητες

- Για σύμμορφα A, B, C, ισχύει προσεταιριστική ιδιότητα ως προς τον πολλαπλασιασμό μητρώων:

$$A(BC) = (AB)C$$

- Ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα:

$$A(B+C) = AB + AC$$

- Προσοχή (μία ακόμα φορά): Γενικά (όχι πάντα), δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, κάτι που οδηγεί σε σημαντικές διαφορές του λογισμού μητρώων από το λογισμό με πραγματικούς και μιγαδικούς. Γενικά,

$$AB \neq BA$$

-

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = (A+B)A + (A+B)B = A^2 + \underbrace{BA + AB}_{\neq 2AB} + B^2$$

-

$$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$$

Παραδείγματα 1/2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

τότε

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

Αν $c = B(:,1)$, τότε

$$Ac = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ενώ το } cA \text{ δεν ορίζεται!}$$

Παραδείγματα 2/2

Αν

$$a = [1,\ 2], b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

τότε

$$ab = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11, \quad ba = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix},$$

Αναστροφή μητρώου

- Το **ανάστροφο** ενός μητρώου A συμβολίζεται με $A^\top$. Το στοιχείο σε κάθε θέση (i,j) του $A^\top$ είναι ίδιο με το στοιχείο στη θέση (j,i) του A, δηλ. $(A^\top)_{ij} = \alpha_{ji}$.
- Αν $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, τότε $A^\top \in \mathbb{R}^{n\times m}$.
- Αν $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, το **ερμιτιανό ανάστροφό** του (ή συζυγές ανάστροφο) συμβολίζεται A^* (ή ενίοτε με A^H) και το στοιχείο στη θέση (i,j) είναι $(A^*)_{ij} = (\overline{a_{ji}})$, όπου η γραμμή δηλώνει το μιγαδικό συζυγές·
- Ένα μητρώο A ονομάζεται **συμμετρικό** αν $A = A^\top$ και **ερμιτιανό** αν $A = A^*$.

Παραδείγματα

1. Το μητρώο $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ είναι συμμετρικό (και ερμιτιανό).
2. Το μητρώο $A = \begin{bmatrix} 5 & 7+j \\ 7+j & 2 \end{bmatrix}$ είναι μιγαδικό συμμετρικό αλλά όχι ερμιτιανό.
3. Το μητρώο $A = \begin{bmatrix} 5 & 7+j \\ 7-j & 2 \end{bmatrix}$ είναι ερμιτιανό (αλλά όχι συμμετρικό).

Αναστροφή γινομένου μητρώων

Το (ερμιτιανό) ανάστροφο του γινομένου δύο μητρώων είναι ταυτόσημο με το γινόμενο των (ερμιτιανών) αναστρόφων σε ανάστροφη φορά!

- $(AB)^\top = B^\top A^\top$
- $(AB)^* = B^* A^*$

ΠΡΟΣΟΧΗ Γενικά $(AB)^\top \neq A^\top B^\top$

Σύνοψη ιδιοτήτων

Θεωρούμε ότι όλα τα μητρώα λαμβάνουν τιμές σε κάποιο σώμα/πεδίο $\mathbb{F}$.

1. Αν $A \in \mathbb{F}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{F}^{k\times l}$, $C \in \mathbb{F}^{l\times n}$, τότε $A(BC) = (AB)C \in \mathbb{F}^{m\times n}$.
2. Αν $A \in \mathbb{F}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{F}^{k\times n}$, $C \in \mathbb{F}^{k\times n}$, τότε $A(B+C) = AB + AC \in \mathbb{F}^{m\times n}$.
3. Αν $A \in \mathbb{F}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{F}^{m\times k}$, $C \in \mathbb{F}^{k\times n}$, τότε $(A+B)C = AC + BC \in \mathbb{F}^{m\times n}$.
4. Αν $\alpha \in \mathbb{F}$ και $A \in \mathbb{F}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{F}^{k\times n}$ τότε $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) \in \mathbb{F}^{m\times n}$.
5. Έστω $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ τότε $I_m A = A I_n$, και $0_{k,m}A = 0_{k,n}, A0_{n,l} = 0_{m,l}$.
6. Αν $A \in \mathbb{F}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{F}^{k\times n}$, τότε $(AB)^\top = B^\top A^\top \in \mathbb{F}^{n\times m}$ και $(AB)^* = B^* A^* \in \mathbb{F}^{n\times m}$

Άσκηση

Δίνονται

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να δείξετε αν μπορούν να υπολογιστούν τα παρακάτω και αν ναι να τα υπολογίσετε:

$$AA, AA^\top, A^\top A, AB, BA, B^2, AA^\top - B, AA^\top AA^\top$$

Δυνάμεις μητρώου

Για κάθε τετραγωνικό μητρώο A και θετικό ακέραιο k η k-οστή δύναμη του A είναι το μητρώο που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του A με τον εαυτό του, k φορές.

$$A^k = A \cdot A \cdots A.$$

Επιπλέον $A^0 = I$.

Αντιστροφή και αρνητικές δυνάμεις: Θα δούμε σύντομα ότι εφόσον ένα τετραγωνικό μητρώο A ικανοποιεί τη συνθήκη της αντιστρεψιμότητας, τότε μπορούμε να ορίσουμε και το μητρώο A^{-1} για το οποίο ισχύει ότι

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Πολυώνυμα μητρώου

Ορισμός:

Έστω το πραγματικό πολυώνυμο βαθμού m,

$$p(\zeta) = \gamma_0 + \gamma_1\zeta + \cdots + \gamma_m\zeta^m.$$

Τότε για οποιοδήποτε τετραγωνικό μητρώο $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, το πολυώνυμο $p(A) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι το μητρώο

$$p(A) = \gamma_0 I + \gamma_1 A + \cdots + \gamma_m A^m.$$

Πολυώνυμα μητρώου

(μελλοντικά ... γενικές συναρτήσεις μητρώων!)

Ορισμός:

Έστω το πραγματικό πολυώνυμο βαθμού m,

$$p(\zeta) = \gamma_0 + \gamma_1\zeta + \cdots + \gamma_m\zeta^m.$$

Τότε για οποιοδήποτε τετραγωνικό μητρώο $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, το πολυώνυμο $p(A) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι το μητρώο

$$p(A) = \gamma_0 I + \gamma_1 A + \cdots + \gamma_m A^m.$$

- Στη γενική τους μορφή, τα πολυώνυμα μητρώων δέχονται συντελεστές που είναιμητρώα $c_j \in \mathbb{R}^{n\times s}$:

$$P(A) = c_0 + Ac_1 + \cdots + A^m c_m \in \mathbb{C}^{n\times s}$$

- Ορισμός (μην τα συγχέετε με τα) λ-μητρώα · (λ-matrices) που έχουν τη μορφή:

$$A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 + \cdots + A_{m-1}\lambda^{m-1} + A_m\lambda^m$$

όπου λ βαθμωτός και A_j (σύμμορφα, όχι κατ' ανάγκη τετραγωνικά) μητρώα. Τα λ -μητρώα έχουν πολλές εφαρμογές (π.χ. θεωρία ελέγχου και ταλαντώσεων) αλλά δεν θα ασχοληθούμε.

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}, p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$

Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}, p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$

Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$;

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}, p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$

Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$; $\Omega = 3m$

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}, p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$

Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$; $\Omega = 3m$
- το εσωτερικό γινόμενο $p^\top q$;

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}, p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$

Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$; $\Omega = 3m$
- το εσωτερικό γινόμενο $p^\top q$; $\Omega = 2m - 1$

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}, p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$

Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$; $\Omega = 3m$
- το εσωτερικό γινόμενο $p^\top q$; $\Omega = 2m - 1$
- το γινόμενο μητρώου επί διάνυσμα Bw;

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}, p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$

Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$; $\Omega = 3m$
- το εσωτερικό γινόμενο $p^\top q$; $\Omega = 2m - 1$
- το γινόμενο μητρώου επί διάνυσμα Bw; $\Omega = k(2n-1)$

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}, p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$

Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$; $\Omega = 3m$
- το εσωτερικό γινόμενο $p^\top q$; $\Omega = 2m - 1$
- το γινόμενο μητρώου επί διάνυσμα Bw; $\Omega = k(2n-1)$
- το γινόμενο διανύσματος στήλης επί διανύσματος γραμμή $pw^\top$;

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}, p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$

Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$; $\Omega = 3m$
- το εσωτερικό γινόμενο $p^\top q$; $\Omega = 2m - 1$
- το γινόμενο μητρώου επί διάνυσμα Bw; $\Omega = k(2n-1)$
- το γινόμενο διανύσματος στήλης επί διανύσματος γραμμή $pw^\top$; $\Omega = mn$

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}, p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$

Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$; $\Omega = 3m$
- το εσωτερικό γινόμενο $p^\top q$; $\Omega = 2m - 1$
- το γινόμενο μητρώου επί διάνυσμα Bw; $\Omega = k(2n-1)$
- το γινόμενο διανύσματος στήλης επί διανύσματος γραμμή $pw^\top$; $\Omega = mn$
- το γινόμενο μητρώων AB;

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}, p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$

Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$; $\Omega = 3m$
- το εσωτερικό γινόμενο $p^\top q$; $\Omega = 2m - 1$
- το γινόμενο μητρώου επί διάνυσμα Bw; $\Omega = k(2n - 1)$
- το γινόμενο διανύσματος στήλης επί διανύσματος γραμμή $pw^\top$; $\Omega = mn$
- το γινόμενο μητρώων AB; $\Omega = (2k - 1)mn$

Ζητήματα κόστους

Έστω ότι $A \in \mathbb{R}^{m\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times n}, p \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n$

Πόσες αριθμητικές πράξεις χρειάζονται:

- ο γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\alpha p + \beta q$; $\Omega = 3m$
- το εσωτερικό γινόμενο $p^\top q$; $\Omega = 2m - 1$
- το γινόμενο μητρώου επί διάνυσμα Bw; $\Omega = k(2n-1)$
- το γινόμενο διανύσματος στήλης επί διανύσματος γραμμή $pw^\top$; $\Omega = mn$
- το γινόμενο μητρώων AB; $\Omega = (2k-1)mn$

Εφαρμογή: Εξόρυξη πληροφοριών από μητρώο

Έχουμε ένα «μαύρο κουτί» που υπολογίζει το γινόμενο $y = Ax$ οπου το x ειναι δικής μας επιλογης και ενός «κρυμμένου» μητρώου A που γνωρίζουμε πως έχει διάσταση $n \times n$.

΄Αθροιση στοιχείων κάθε γραμμής

Επιλέγουμε $x = e$ διάστασης n.

Ανάκτηση στοιχείου στη θέση (i, j)

Επιλέγουμε $x = e_j$ και με την έξοδο $Ae_j = x_j$ υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο $e_i^\top x_j$.

Ανάκτηση διαγωνίου του A;

Χρησιμοποιούμε το κουτί n φορές με είσοδο τα διανύσματα $e_1, e_2, \ldots, e_n$ και κάθε φορά υπολογίζουμε το Ae_j και στη συνέχεια το εσωτερικό του γινόμενο με το e_j, δηλ. $e_j^\top (Ae_j)$.

Μητρώα

Παραδείγματα χρήσης

πίνακες τιμών Λογιστικά και πρακτική αριθμητική: συσχετίσεις ποσοτήτων: (ηλικία, ύψος, βάρος), βαθμολόγια. Παρουσία γονιδίων σε δείγματα DNA (microarrays), Οικονομία: (πίνακες εισροών/εκροών. Μετεωρολογία: πίνακες βροχόπτωσης, Ανάκτηση πληροφορίας: Πίνακες όρων-κειμένων. Διαδίκτυο: Πίνακες διασύνδεσης (μητρώα γειτνίασης).

γραμμικοί μετασχηματισμοί που επιτελούν: Αλλαγή συντεταγμένων. Μετακίνηση στο χώρο (περιστροφή, διολίσθηση). Προσομοίωση (διακριτοποίηση παραγώγων και ολοκληρωμάτων).

Σχεδόν όπου χρησιμοποιούμε πίνακες αριθμών για τα δεδομένα μιας εφαρμογής.

Back to the future

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

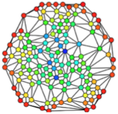
ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

Εισαγωγή στους Αλγορίθμους

Ενότητα 6η

Διδάσκων
Χρήστος Ζαρολιάγκης
Καθηγητής

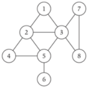
Γραφήματα
Βασικές Έννοιες και Εφαρμογές



Μη κατευθυνόμενα γραφήματα

Μη κατευθυνόμενο γράφημα. G = (V, E)

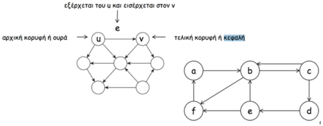
- V = κόμβοι ή κορυφές
- E = ακμές (ή πλευρές) μεταξύ ζευγαριών κόμβων
- E: διακριτές, δυαδικές, συμμετρικές σχέσεις μεταξύ αντικειμένων
- Παράμετροι μεγέθους γραφήματος: n = |V|, m = |E|



V = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }
E = { 1-2, 1-3, 2-3, 2-4, 2-5, 3-5, 3-7, 3-8, 4-5, 5-6 }
n = 8
m = 11

Κατευθυνόμενο γράφημα. G = (V, E)

- V = κόμβοι ή κορυφές
- E = ακμές (ή πλευρές) μεταξύ ζευγαριών κόμβων
- E: διακριτές, δυαδικές, ασύμμετρες σχέσεις μεταξύ αντικειμένων
- Παράμετροι μεγέθους γραφήματος: n = |V|, m = |E|
- Η ακμή e = (u, v) κατευθύνεται από τον κόμβο u στον κόμβο v



Παραδείγματα γραφημάτων

Εικόνα 2

Γράφημα	Κόμβοι	Ακμές
Οδικά δίκτυα	Διασταυρώσεις δρόμων	Τμήματα δρόμων
Δίκτυα επικοινωνιών	Υπολογιστές	Καλώδια οπτικών ινών
Παγκόσμιος Ιστός	Ιστοσελίδες	Υπερσύνδεσμοι
Κοινωνικά δίκτυα	Άνθρωποι	Σχέσεις
Τροφική αλυσίδα	Είδος οργανισμού	Θηρευτής-Θήραμα

Παράδειγμα: Μητρώο γραφήματος

μητρώο → γράφημα Έστω ένα τετραγωνικό μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε το γράφημα $G(A)$ του μητρώου είναι το γράφημα που δημιουργείται από το σύνολο κόμβων $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$ και το σύνολο ακμών, $\mathcal{E} = \{(i,j) | i,j \in \mathcal{K}\}$ (από τον κόμβο i στον κόμβο j), έτσι ώστε αν $\alpha_{i,j} \neq 0$, τότε $(i,j) \in \mathcal{E}$ με βάρος $\omega_{i,j} = \alpha_{i,j}$, ειδάλλως δεν υπάρχει ακμή από το i στο j.

γράφημα → μητρώο Έστω το γράφημα G με n κόμβους $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ και το σύνολο ακμών, $\mathcal{E} = \{(i,j) | i,j \in \mathcal{K}\}$ βάρους ω_{ij}. Τότε το μητρώο του γραφήματος είναι το $n \times n$ μητρώο για το οποίο

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} \omega_{ij} & \text{αν } (i,j) \in E \\ 0 & \text{αν όχι} . \end{cases}$$

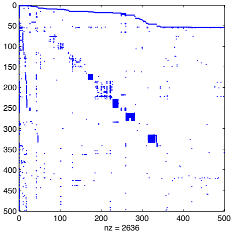
Παράδειγμα: Μητρώο γραφήματος

Μητρώο γειτνίασης

Το μητρώο γειτνίασης, ενός γραφήματος $G(\mathcal{V},\mathcal{E})$ με κόμβους $\mathcal{V}=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ και ακμές $\mathcal{E}=\{e_1,e_2,\ldots,e_d\}$ ακμές είναι το $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ όπου το στοιχείο $\alpha_{i,j}$ είναι ίσο με το πλήθος των ακμών από τον κόμβο i προς τον κόμβο j. Αν ένα γράφημα δεν έχει πολλαπλές ακμές και αυτοβρόχους (δηλ. ακμές τύπου (i,i)), τα στοιχεία του μητρώου γειτνίασης θα είναι $\alpha_{i,j}\in\{0,1\}$.

Συμμετρία και κατευθυνσιμότητα: αν το γράφημα είναι μη κατευθυνόμενο, το μητρώο γραφήματος είναι συμμετρικό.

Γράφημα → Μητρώο γειτνίασης



Μητρώο γειτνίασης A

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & i \text{ δείχνει τη σελίδα } j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Harvard500

1	http://www.harvard.edu
2	http://atwork.harvard.edu
3	http://lib.harvard.edu
...	...
500	http://www.hsdm.med.harvard.edu/(...)/implant.htm

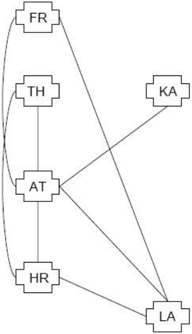
Μητρώο διασύνδεσης αεροδρομίων I

Πίνακας γειτνίασης (adjacency matrix) (αεροδρομίων)

A = (α_{ij}) όπου:

$$\alpha_{ij} = \begin{matrix} 1 & \exists(i \leftrightarrow j) \\ 0 & \nexists(i \leftrightarrow j) \end{matrix}$$

	TH	HR	KA	LA	FR	AT
TH	0	1	0	0	0	1
HR	1	0	0	1	0	1
KA	0	0	0	0	0	1
LA	0	1	0	0	1	1
FR	0	0	0	1	0	1
AT	1	1	1	1	1	0



Τετραγωνικός πίνακας 6×6 για τα 6 αεροδρόμια
[TH, HR, KA, LA, FR, AT]
Προφανώς, με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να μοντελοποιήσουμε άλλα «δίκτυα»
Δείτε ότι παραμένει ίδιος αν οι γραμμές γίνουν στήλες και οι στήλες γραμμές:

Μέτρηση διαδρομών με πολλαπλασιασμό μητρώων

$$[A^2]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k}\alpha_{k,j}$$

Μέτρηση διαδρομών με πολλαπλασιασμό μητρώων

$$\begin{aligned}[A^2]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k}\alpha_{k,j} \\ &= \#\ \text{διαδρομών μήκους 2 (1 στάσης) από το } i \text{ στο } j\end{aligned}$$

Απόδειξη; Για δεδομένα (i, j), κάθε όρος $\alpha_{i,k}\alpha_{k,j}$ είναι 0 η 1. Η μόνη περίπτωση να είναι 1 είναι όταν $\alpha_{i,k} = 1$ και $\alpha_{k,j} = 1$. Αυτό σημαίνει ότι αμφότερες οι ακμές $(i \rightarrow k)$ και $(k \rightarrow j)$ υπάρχουν, επομένως υπάρχει η διαδρομή $i \rightarrow k \rightarrow j$. και ο όρος συνεισφέρει στο άθροισμα. Επομένως η τιμή του αθροίσματος μετρά το συνολικό αριθμό διαδρομών μήκους 2 από το i στο j.

Μέτρηση διαδρομών με πολλαπλασιασμό μητρώων

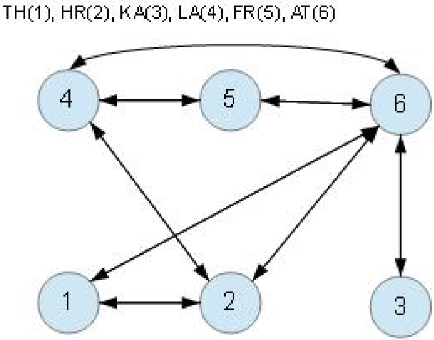
$$\begin{aligned}[A^2]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k}\alpha_{k,j} \\ &= \#\ \text{διαδρομών μήκους 2 (1 στάσης) από το } i \text{ στο } j\end{aligned}$$

Απόδειξη: Για δεδομένα (i,j), κάθε όρος $\alpha_{i,k}\alpha_{k,j}$ είναι 0 η 1. Η μόνη περίπτωση να είναι 1 είναι όταν $\alpha_{i,k} = 1$ και $\alpha_{k,j} = 1$. Αυτό σημαίνει ότι αμφότερες οι ακμές $(i \to k)$ και $(k \to j)$ υπάρχουν, επομένως υπάρχει η διαδρομή $i \to k \to j$. και ο όρος συνεισφέρει στο άθροισμα. Επομένως η τιμή του αθροίσματος μετρά το συνολικό αριθμό διαδρομών μήκους 2 από το i στο j.

Γενικότερα: Η τιμή $[A^k]_{i,j}$ είναι ίση με το πλήθος των διαδρομών από το i στο j μήκους k ($k-1$ στάσεις).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

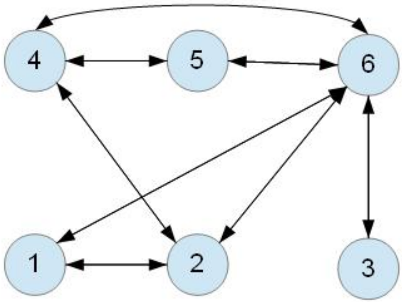
$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

TH(1), HR(2), KA(3), LA(4), FR(5), AT(6)



{(4,2,4), (4,5,4), (4,6,4)}

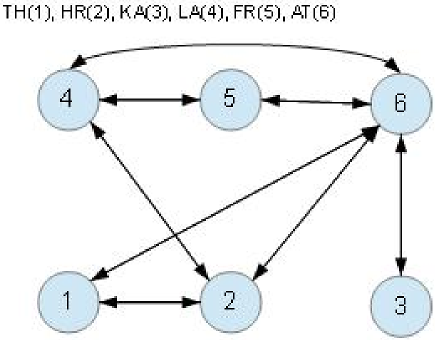
{(5,4,2),(5,6,2)}

(3 ?? 6)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

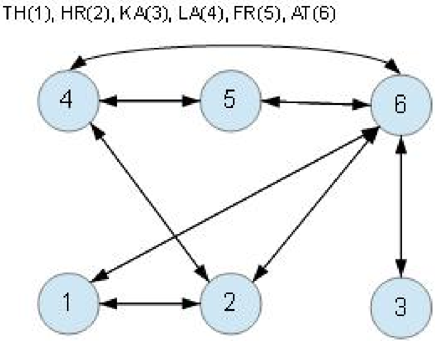
$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 5 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 5 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$



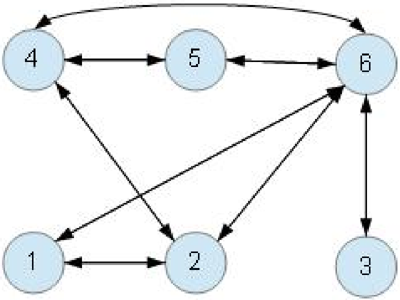
Αυτοαξιολόγηση: Ατιολογήστε γιατί $[A^3]_{6,2} = 8$;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

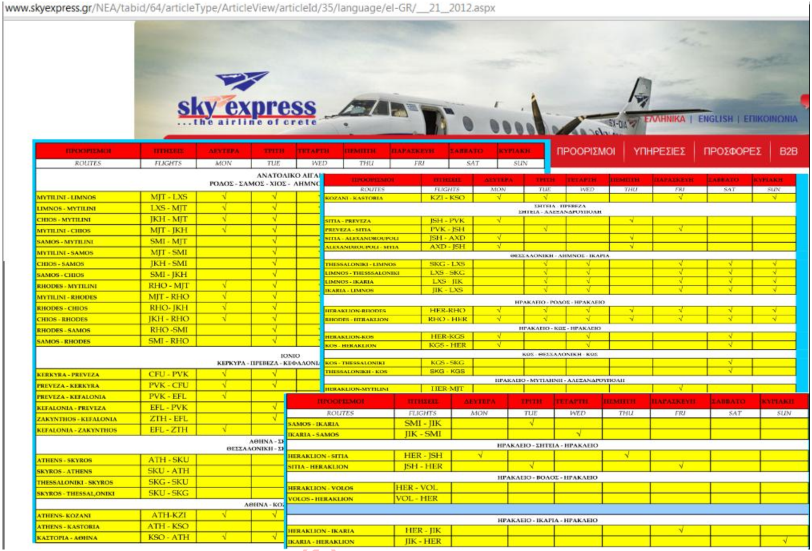
$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 5 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 5 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

TH(1), HR(2), KA(3), LA(4), FR(5), AT(6)



Ενδιαφέρον: Τι πληροφορία μας παρέχει η τιμή του $[A+A^2]_{i,j}$;

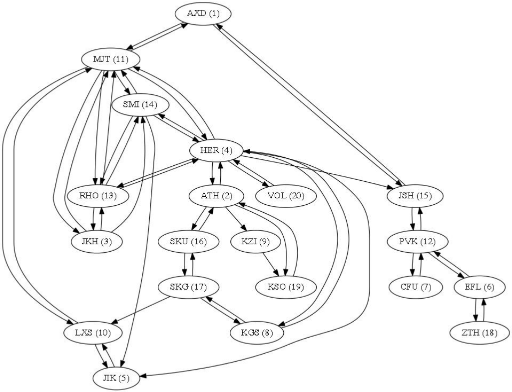


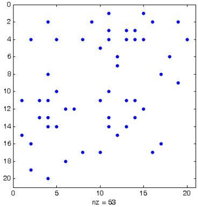
www.skyexpress.gr/NEA/tabid/64/articleType/ArticleView/articleId/35/language/el-GR/__21__2012.aspx

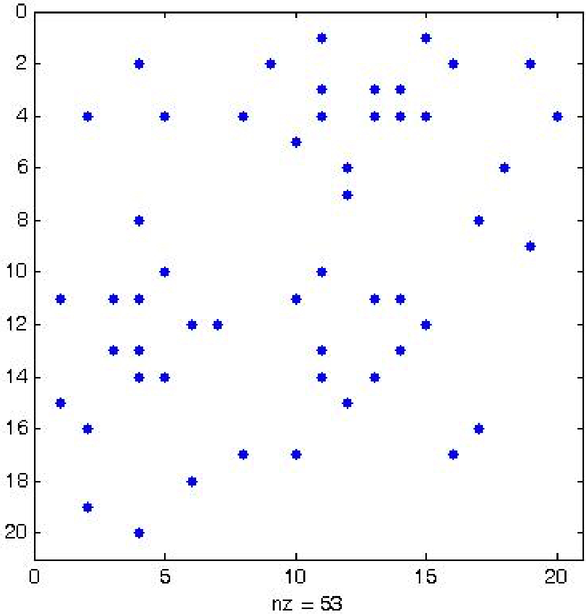
ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΙ	ΠΤΗΣΕΙΣ	ΔΕΥΤΕΡΑ	ΤΡΙΤΗ
ROUTES	*FLIGHTS*	*MON*	*TUE*
ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ ΑΙΓΑ **ΡΟΔΟΣ - ΣΑΜΟΣ - ΧΙΟΣ - ΛΗΜΝΟ**			
MYTILINI - LIMNOS	MJT - LXS	√	√
LIMNOS - MYTILINI	LXS - MJT	√	√
CHIOS - MYTILINI	JKH - MJT	√	√
MYTILINI - CHIOS	MJT - JKH	√	√
SAMOS - MYTILINI	SMI - MJT		√
MYTILINI - SAMOS	MJT - SMI		√
CHIOS - SAMOS	JKH - SMI		√
SAMOS - CHIOS	SMI - JKH		√
RHODES - MYTILINI	RHO - MJT	√	√
MYTILINI - RHODES	MJT - RHO	√	√
RHODES - CHIOS	RHO- JKH	√	√
CHIOS - RHODES	JKH - RHO	√	√
RHODES - SAMOS	RHO -SMI		√
SAMOS - RHODES	SMI - RHO		√
ΙΟΝΙΟ **ΚΕΡΚΥΡΑ - ΠΡΕΒΕΖΑ - ΚΕΦΑΛΟΝΙ**			
KERKYRA - PREVEZA	CFU - PVK	√	√
PREVEZA - KERKYRA	PVK - CFU	√	√
PREVEZA - KEFALONIA	PVK - EFL	√	
KEFALONIA - PREVEZA	EFL - PVK		√
ZAKYNTHOS - KEFALONIA	ZTH - EFL		√
KEFALONIA - ZAKYNTHOS	EFL - ZTH	√	
ΑΘΗΝΑ - ΣΚ **ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ - ΣΚ**			
ATHENS - SKYROS	ATH - SKU		
SKYROS - ATHENS	SKU - ATH		
THESSALONIKI - SKYROS	SKG - SKU		
SKYROS - THESSAL,ONIKI	SKU - SKG		
ΑΘΗΝΑ - ΚΟ			
ATHENS- KOZANI	ATH-KZI	√	√
ATHENS - KASTORIA	ATH - KSO		
ΚΑΣΤΟΡΙΑ - ΑΘΗΝΑ	KSO - ATH	√	√

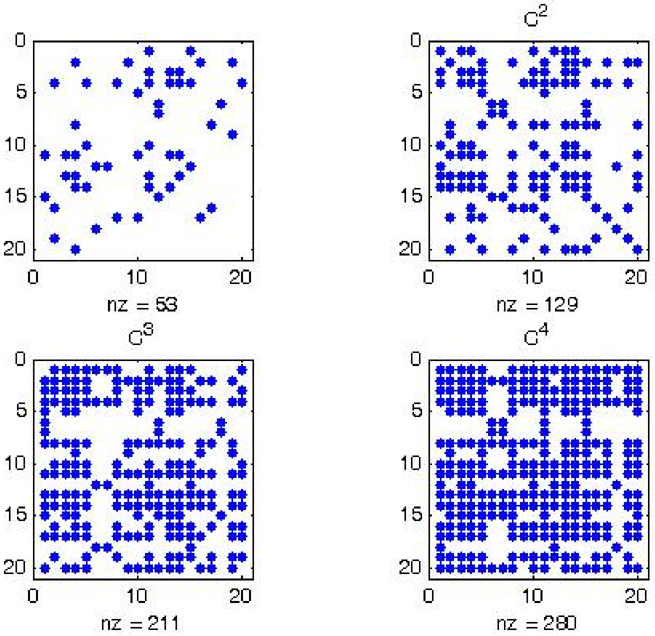
ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΙ	ΠΤΗΣΕΙΣ	ΔΕΥΤΕΡΑ	ΤΡΙΤΗ	ΤΕΤΑΡΤΗ	ΠΕΜΠΤΗ	ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ	ΣΑΒΒΑΤΟ	ΚΥΡΙΑΚΗ
ROUTES	*FLIGHTS*	*MON*	*TUE*	*WED*	*THU*	*FRI*	*SAT*	*SUN*
KOZANI - KASTORIA	KZI - KSO	√	√			√		√
ΣΗΤΕΙΑ - ΠΡΕΒΕΖΑ **ΣΗΤΕΙΑ - ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥΠΟΛΗ**								
SITIA - PREVEZA	JSH - PVK	√			√			
PREVEZA - SITIA	PVK - JSH		√			√		
SITIA - ALEXANDROUPOLI	JSH - AXD	√			√			
ALEXANDROUPOLI - SITIA	AXD - JSH	√			√			
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ - ΛΗΜΝΟΣ - ΙΚΑΡΙΑ								
THESSALONIKI - LIMNOS	SKG - LXS		√	√		√	√	√
LIMNOS - THESSSALONIKI	LXS - SKG		√	√		√	√	√
LIMNOS - IKARIA	LXS - JIK		√	√		√	√	√
IKARIA - LIMNOS	JIK - LXS		√	√		√	√	√
ΗΡΑΚΛΕΙΟ - ΡΟΔΟΣ - ΗΡΑΚΛΕΙΟ								
HERAKLION-RHODES	HER-RHO	√	√	√	√	√	√	√
RHODES - HERAKLION	RHO - HER	√	√	√	√	√	√	√
ΗΡΑΚΛΕΙΟ - ΚΩΣ - ΗΡΑΚΛΕΙΟ								
HERAKLION-KOS	HER-KGS	√		√			√	
KOS - HERAKLION	KGS - HER	√		√			√	
ΚΩΣ - ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ - ΚΩΣ								
KOS - THESSALONIKI	KGS - SKG						√	
THESSALONIKH - KOS	SKG - KGS						√	
ΗΡΑΚΛΕΙΟ - ΜΥΤΙΛΗΝΗ - ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥΠΟΛΗ								
HERAKLION-MYTILINI	HER-MJT					√		

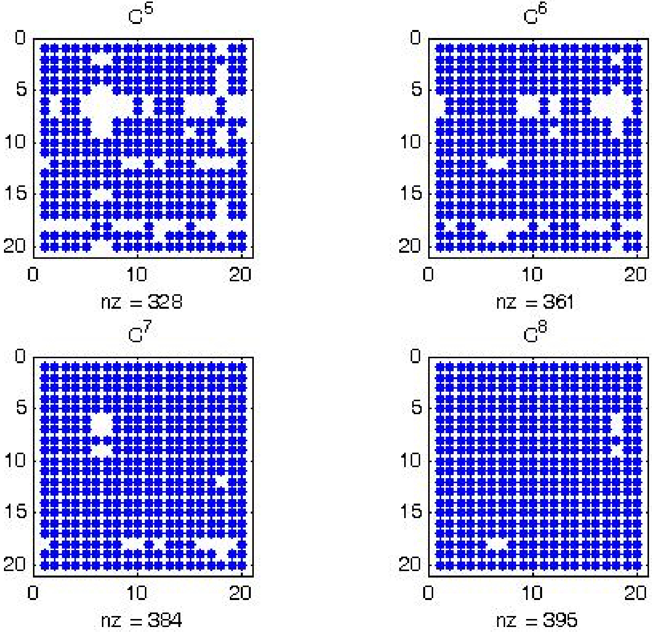
ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΙ	ΠΤΗΣΕΙΣ	ΔΕΥΤΕΡΑ	ΤΡΙΤΗ	ΤΕΤΑΡΤΗ	ΠΕΜΠΤΗ	ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ	ΣΑΒΒΑΤΟ	ΚΥΡΙΑΚΗ
ROUTES	*FLIGHTS*	*MON*	*TUE*	*WED*	*THU*	*FRI*	*SAT*	*SUN*
SAMOS - IKARIA	SMI - JIK		√					
IKARIA - SAMOS	JIK - SMI			√				
ΗΡΑΚΛΕΙΟ - ΣΗΤΕΙΑ - ΗΡΑΚΛΕΙΟ								
HERAKLION - SITIA	HER - JSH	√			√			
SITIA - HERAKLION	JSH - HER		√			√		
ΗΡΑΚΛΕΙΟ - ΒΟΛΟΣ - ΗΡΑΚΛΕΙΟ								
HERAKLION - VOLOS	HER - VOL							
VOLOS - HERAKLION	VOL - HER							
ΗΡΑΚΛΕΙΟ - ΙΚΑΡΙΑ - ΗΡΑΚΛΕΙΟ								
HERAKLION - IKARIA	HER - JIK					√		
IKARIA - HERAKLION	JIK - HER							√

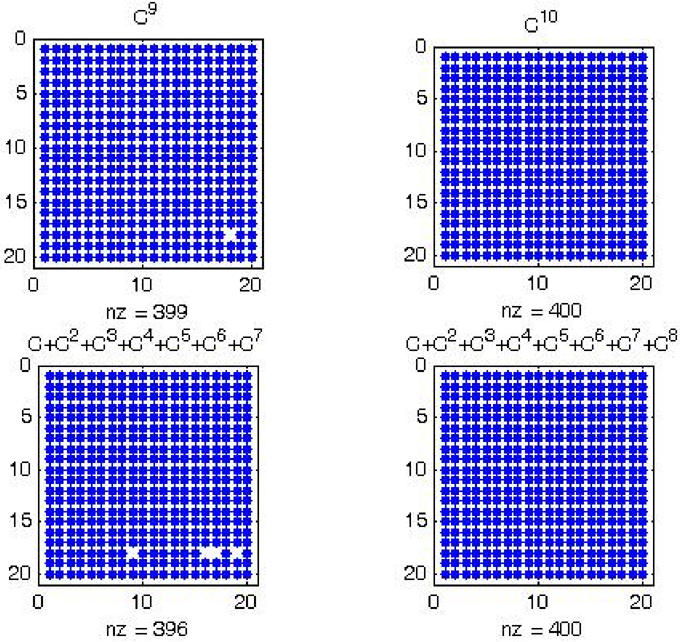

AXD (1)
MJT (11)
SMI (14)
HER (4)
RHO (13)
ATH (2)
VOL (20)
JSH (15)
JKH (3)
SKU (16)
KZI (9)
PVK (12)
SKG (17)
KSO (19)
CFU (7)
EFL (6)
LXS (10)
KGS (8)
ZTH (18)
JIK (5)


0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
0
5
10
15
20
nz = 53

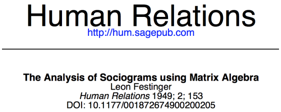

0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
0
5
10
15
20
nz = 53


0
5
10
15
20
0
10
20
nz = 53
C^2
nz = 129
C^3
nz = 211
C^4
nz = 280


C^5
0
5
10
15
20
0
10
20
nz = 328
C^6
0
5
10
15
20
0
10
20
nz = 361
C^7
0
5
10
15
20
0
10
20
nz = 384
C^8
0
5
10
15
20
0
10
20
nz = 395

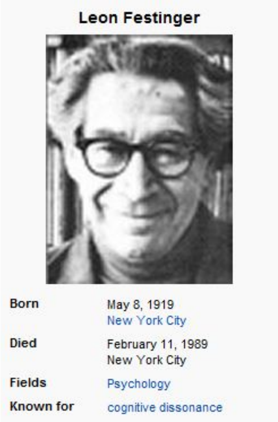

C^9
0
5
10
15
20
0
10
20
nz = 399
C^10
0
5
10
15
20
0
10
20
nz = 400
C+C^2+C^3+C^4+C^5+C^6+C^7
0
5
10
15
20
0
10
20
nz = 396
C+C^2+C^3+C^4+C^5+C^6+C^7+C^8
0
5
10
15
20
0
10
20
nz = 400

Σχόλια



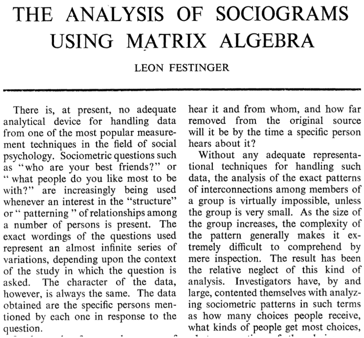
Human Relations
http://hum.sagepub.com

The Analysis of Sociograms using Matrix Algebra
Leon Festinger
Human Relations 1949; 2; 153
DOI: 10.1177/001872674900200205



Leon Festinger

Born	May 8, 1919 New York City
Died	February 11, 1989 New York City
Fields	Psychology
Known for	cognitive dissonance



THE ANALYSIS OF SOCIOGRAMS USING MATRIX ALGEBRA

LEON FESTINGER

There is, at present, no adequate analytical device for handling data from one of the most popular measurement techniques in the field of social psychology. Sociometric questions such as "who are your best friends?" or " what people do you like most to be with?" are increasingly being used whenever an interest in the "structure" or " patterning " of relationships among a number of persons is present. The exact wordings of the questions used represent an almost infinite series of variations, depending upon the context of the study in which the question is asked. The character of the data, however, is always the same. The data obtained are the specific persons mentioned by each one in response to the question.

hear it and from whom, and how far removed from the original source will it be by the time a specific person hears about it?

Without any adequate representational techniques for handling such data, the analysis of the exact patterns of interconnections among members of a group is virtually impossible, unless the group is very small. As the size of the group increases, the complexity of the pattern generally makes it extremely difficult to comprehend by mere inspection. The result has been the relative neglect of this kind of analysis. Investigators have, by and large, contented themselves with analyzing sociometric patterns in such terms as how many choices people receive, what kinds of people get most choices,

- Η μέτρηση των διαδρομών μέσω δυνάμεων μητρώων βρίσκεται στη βάση πολλών αλγορίθμων μεγάλης σημασίας για πολλές εφαρμογές.
- Η αρχική ιδέα οφείλεται στον Leo Festinger (1949) ([Fes49]). Προσέξτε ότι ο LF περιγράφεται στη Wikipedia ως an American social psychologist, perhaps best known for cognitive dissonance and social comparison theory!
- η πιο διάσημη μετεξέλιξη των ιδεών αυτών είναι ο αλγόριθμος PageRank που κατέστησε την Google κυρίαρχη εταιρία για λογισμικό αναζήτησης και φυλλομέτρησης.

Ταυτοτικά μητρώα (υπενθύμιση)

Είδαμε ότι για κάθε $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ υπάρχει το μηδενικό μητρώο

$$A + 0 = 0 + A = A$$

Ταυτοτικό ως προς την πρόσθεση μητρώων

Ορίζουμε και το ταυτοτικό μητρώο $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A\,I = I\,A = A$$

Ταυτοτικό ως προς τον πολλαπλασιασμό μητρώων

Ερώτημα Υπάρχει αντίστροφο μητρώο;

$$A\boxed{;} = \boxed{;}A = I$$

Αν υπήρχε ...

πώς θα το γράφαμε; Μάλλον A^{-1}

πώς θα έμοιαζε;

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{☺}{\Longrightarrow} A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Αν υπήρχε ...

πώς θα το γράφαμε; Μάλλον A^{-1}

πώς θα έμοιαζε;

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{🙂}}{\Longrightarrow} A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{😐}}{\Longrightarrow} A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{😐}}{\Longrightarrow} A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Αν υπήρχε ...

πώς θα το γράφαμε; Μάλλον A^{-1}

πώς θα έμοιαζε;

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{🙂}}{\Longrightarrow} A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{😐}}{\Longrightarrow} A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{😐}}{\Longrightarrow} A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{🙁}}{\Longrightarrow} A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

πώς θα το υπολογίζαμε; ; ; ;

Ιδιότητες αντιστρόφου

- Ακόμα και αν $A \neq 0$, μπορεί να μην υπάρχει αντίστροφο! Δεν φαίνεται πάντα με 'γυμνό μάτι!' 🙁
- Αν δεν υπάρχει αντίστροφο, το A λέγεται μη αντιστρέψιμο, ή ιδιάζον ή και ιδιόμορφο.
- Ένα διαγώνιο ή τριγωνικό μητρώο είναι αντιστρέψιμο $\Leftrightarrow$ τα διαγώνια στοιχεία είναι όλα μη μηδενικά.
- Το αντίστροφο διαγωνίου είναι διαγώνιο. Το αντίστροφο τριγωνικού είναι τριγωνικό (ίδιας δομής.)

Ιδιότητες και Ορθογώνια μητρώα

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Γενικά $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$,
- ενώ πάντα $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$
- Γενικά, άλλο η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ και άλλο η ΑΝΑΣΤΡΟΦΗ
- $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1} = A^{-\top}$
- Για ορισμένα ειδικά μητρώα, μπορεί να ισχύει $A^{-1} = A^\top$ οπότε $AA^\top = A^\top A = I$. Κάθε πραγματικό τετραγωνικό μητρώο που ικανοποιεί $A^\top = A^{-1}$ αποκαλείται ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΜΗΤΡΩΟ.
- Αν ένα μιγαδικό μητρώο $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ικανοποιεί $C^*C = I$, αποκαλείται ορθομοναδιαίο (unitary).
- ... προσέξτε ότι για όλες τις στήλες (και αντίστοιχα για τις γραμμές) ενός ορθογώνιου ή ορθομοναδιαίου μητρώου ισχύει ότι

$$\langle a_i, a_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j, \\ 0 & \text{αν } i \neq j. \end{cases}$$

Παράδειγμα

- Το μητρώο

  $$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

  είναι ορθογώνιο:

  $$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Προσέξτε ότι αν

  $$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

  τότε $A = R(\frac{\pi}{6})$.
- Ενδιαφέρον: Τα $R(\phi)$ είναι μητρώα με στοιχεία που είναι συναρτήσεις κάποιας παραμέτρου ϕ. Επίσης, για κάθε ϕ, το μητρώο $R(\phi)$ είναι ορθογώνιο.

Σχετικά με το αντίστροφο μητρώο

ΥΠΑΡΧΕΙ;	ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟ;	ΠΩΣ ΤΟ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ;
όχι πάντα	ναι, όταν υπάρχει	σπάνια απλά
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	Αν $AB = BA = I$,	
	και $CA = I = AC$	$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$
το μη αντιστρέψιμο		
δεν ξεχωρίζει εύκολα	τότε	$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\underbrace{(CA)B}_{=C(AB)=C} = BI = B$	συνήθως κοπιαστικά
... από ένα αντιστρέψιμο		
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$		$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$		$H^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$

L. Festinger.

The analysis of sociograms using matrix algebra.

Human Relations, 2:153 -- 158, 1949.