Γραμμική Άλγεβρα
Θέματα εξέτασης: Παραδείγματα και σχόλια[*]

Ε. Γαλλόπουλος
Καθηγητής
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

22 Ιουλίου 2016[†]

Περιγραφή, οδηγίες χρήσεις και αντενδείξεις

Σχολιάζουμε και παραθέτουμε απαντήσεις σε επιλεγμένα θέματα εξετάσεων[1]. Στόχος του φυλλαδίου είναι βοηθήσει όσους έλαβαν μέρος στην εξέταση και έχουν γενικές απορίες σχετικά με τα θέματα καθώς επίσης και όσους πρέπει να εξεταστούν σε επόμενη περίοδο και αναζητούν περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το είδος των ερωτήσεων που τίθενται στις εξετάσεις.

Με την ευκαιρία αυτή, αναφέρουμε ότι κατά κάποιο τρόπο, η εξέταση είναι ένα σημαντικό εργαλείο για την «ανάκτηση σημαντικών πληροφοριών» από τους εξεταζόμενους (εσάς). Τι πληροφορίες είναι αυτές; Ό,τι μπορεί να αναδείξει το βαθμό κατανόησης και εξοικείωσης αλλά και τις αδυναμίες, παρανοήσεις και άγνοιά σας για τα βασικά ζητήματα του μαθήματος. Θέλουμε επίσης να φανεί η δυνατοτητα που έχετε να απαντάτε σε βασικά ερωτήματα (που πολύ πιθανό να ¨τα βρείτε μπροστά σας¨ σε μελλοντικά μαθήματα και εφαρμογές). Στόχος είναι επίσης να σας δώσει την ευκαιρία να δείξετε ό,τι ιδιαίτερες δεξιότητες έχετε αναπτύξει ανταμοίβοντας τη δυνατότητα να συνδυάζετε πληροφορίες, να «κόβετε δρόμο» και να επιλέγετε γρήγορους τρόπους λύσης καθώς και να αποθαρρύνει την «παπαγαλία».

Μερικές προειδοποιήσεις:

Προσοχή (1): Η απλή αποστήθιση των παρακάτω δεν εξασφαλίζει την επιτυχία σε επόμενη εξέταση ούτε υπονοείται ότι οι ερωτήσεις που παρουσιάζονται θα επαναχρησιμοποιηθούν.

Προσοχή (2): η εξέταση περιείχε επιπλέον ερωτήσεις 'πολλαπλής επιλογής' τις οποίες δεν παρουσιάζουμε. Επιπλεόν, κάθε εξέταση μπορεί να περιέχει και ορισμένες 'μη αναμενόμενες' ερωτήσεις.

Προσοχή (3): σχολιάζουμε τις εκδοχές των ασκήσεων, πληροφορίες σχετικά με την επιλογή της θεματικής, κ.λπ. Εννοείται ότι αυτά τα ζητήματα δεν αποτελούν μέρος των απαντήσεων που έπρεπε να δώσετε. Πιο κοντά στις αναμενόμενες απαντήσεις είναι οι προτάσεις σε *πλάγια γραφή* Επίσης, σε αρκετές περιπτώσεις, δεν παρατίθενται αναλυτικά όλα τα βήματα και οι επιμέρους πράξεις.

1 Στοιχειώδεις πράξεις - η Αλφαβήτα της Γραμμικής Άλγεβρας

Συνήθως, 1-2 θέματα (που ενδέχεται να είναι τύπου πολλαπλής επιλογής) αφορούν στοιχειώδη ζητήματα της Γραμμικής Άλγεβρας και του Λογισμού Μητρώων. Προέρχονται κυρίως από τα κε-

[*]**DRAFT** εκδοχή 1 - το κείμενο μπορεί να αναθεωρηθεί.

[†]Αναθεωρήσεις: 7/6/2017

[1]Πολλά υπήρχαν σε κάποια μορφή στην εξέταση Ιουνίου 2016.

φάλαια 1-2 του βιβλίου του Strang και ενδεχομένως από τα εισαγωγικά ζητήματα των υπόλοιπων κεφαλαίων. Ερωτήσεις αυτής της κατηγορίας ελέγχουν αν γνωρίζετε τις βασικές αλγεβρικές πράξεις μεταξύ μητρώων, τις έννοιες του αναστρόφου και αντιστρόφου, τη γεωμετρική ερμηνεία της επίλυσης γραμμικού συστήματος, και να υπολογίζετε γρήγορα μικρές ορίζουσες, να λύνετε γρήγορα πολύ μικρά ή συστήματα με ειδική δομή ή να αναγνωρίζετε ότι δεν υπάρχει λύση, τι είναι το εσωτερικό γινόμενο, η ευκλείδεια νόρμα, και οι συναφείς ανισότητες (όπως τριγωνική και CBS), και την ορθογωνιότητα διανυσμάτων και μητρώων. Επίσης ελέγχουν αν είστε κάπως εξοικειωμένοι με τους διανυσματικούς χώρους, την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας και των βάσεων, και με την έννοια των ιδιοτιμών.

Οι ερωτήσεις αυτής της κατηγορίας είναι πολύ απλές και ως εκ τούτου προβλέπουν αρκετά αξιόπιστα κατά πόσον ο εξεταζόμενος <u>δεν</u> θα περάσει το μάθημα. Αν κάποιος δεν μπορεί να απαντήσει αυτές τις ερωτήσεις, ή κάνει πολλά λάθη (λίγα λάθη μπορεί να οφείλονται σε απροσεξίες και ως ένα βαθμό μπορεί να δικαιολογούνται, τα πολλά λάθη όμως αναδεικνύουν άγνοια), ή ξοδέψει πολύ χρόνο, τότε το πιο πιθανό είναι ότι στις υπόλοιπες ερωτήσεις θα έχει μεγάλο πρόβλημα και θα είναι καλύτερα γι' αυτόν να επανεξεταστεί (ενώ αν έχει περάσει, θα είναι από τύχη). Όπως και με τη γλώσσα, αν δεν έχεις μάθει το αλφάβητο και κάποιο βασικό λεξιλόγιο, δεν έχει και πολύ νόημα να προσπαθήσεις να διαβάσεις και να κατανοήσεις ακόμα και πολύ απλά κείμενα. Εκτός βέβαια αν έχεις μεγάλη τύχη και αρκετή διαίσθηση, όμως τότε θα εχεις περάσει με σημαντικά κενά κάτι που δεν εξυπηρετεί κανέναν (ιδιαίτερα εσένα) καθώς το θέμα στη μάθηση δεν είναι να ¨ξεγελάσετε το σύστημα¨ αλλά να αποκτήσετε τις γνώσεις που χρειάζονται για να αντιμετωπίσετε τις προκλήσεις που θα τεθούν σε επόμενα μαθήματα καθώς και επαγγελματικά, όπου θα θεωρείται δεδομένο ότι γνωρίζετε σε κάποιο επίπεδο την Γραμμική Άλγεβρα. Επομένως ασχοληθείτε με το μάθημα εγκαίρως και μην επιλέξετε την αδυναμία και την ανασφάλεια!

Παραθέτουμε μερικές ερωτήσεις αυτού του είδους.

Αν $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **,** $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}$ **τότε το** $BA^\top C^\top$ **είναι**

$a)$**: -36** $b)$**:** $\begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}$ $c)$**:** $\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}$ $d)$**: 5** $e)$**: -15** $f)$**: κανένα από τα υπόλοιπα**

<u>ΑΠ:</u> Δεν παραθέτουμε τις λύσεις καθώς είναι πολύ εύκολο να υπολογιστούν - - δείτε παραδείγματα στο βιβλίο, διαφάνειες, κ.λπ.

<u>Παρατηρήσεις</u>: Εδώ αξίζει να θυμηθείτε ότι $BA^\top C^\top = B(CA)^\top$. Επίσης, σε ασκήσεις αυτού του τύπου, συχνά αξίζει να ελέγξετε γρήγορα ποια είναι η καλύτερη σειρά να γίνουν οι πολλαπλασιασμοί ώστε να μειωθεί η υπολ. πολυπλοκότητα, π.χ. αν έχετε γινόμενα του τύπου $A_1A_2A_3\cdots A_k$ και το A_k είναι διάνυσμα στήλη ή το A_1 είναι γραμμή, τότε καλύτερα να πολλαπλασιάζετε μητρώα με διανύσματα κατά προτεραιότητα παρά μητρώα μεταξύ τους (αυτό είναι κάτι που ενδιαφέρει και τον compiler!).

Ακολουθούν μερικά ακόμα ερωτήματα αυτής της κατηγορίας. Για ευκολία στα παρακάτω χρησιμοποιούμε το ίδιο μητρώο A (αξίζει να αναφέρουμε ότι σε πολλές περιπτώσεις, τα στοιχεία των μητρώων τα οποία καλείστε να χρησιμοποιήσετε είναι παραμετροποιημένα με βάση κάποιο συνδυασμό ψηφίων του Α.Μ. σας).

Δίνεται το μητρώο $A = [1,3,1;1,2,3;2,6,2;1,1,5]$**.**

1. ***α)* Να υπολογίσετε το $G = A^\top A$ καθώς και το ίχνος του $F = AA^\top$ (Υπόδ. Αξίζει να κάνετε οικονομία πράξεων, όποτε είναι δυνατό). *β)* Να εξηγήσετε τι σημαίνει ότι ένα μητρώο είναι διαγωνιοποιήσιμο και γιατί το G είναι τέτοιο. *γ)* Να υπολογίσετε την ορίζουσα του G. *δ)* Να βρείτε την ορίζουσα του $A^\top FA$ και *ε)* να εξηγήσετε αν το F είναι συμμετρικό και θετικά ορισμένο ή όχι (Υπόδειξη: Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε ιδιοτιμές).**

2. **Αν από το παραπάνω A κατασκευάσετε το μητρώο $Q = \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,3} \end{pmatrix}$ να δείξετε γραφικά τη γεωμετρική ερμηνεία της λύσης χρησιμοποιώντας τη θεώρηση <u>ως προς στήλες</u>, για το σύστημα $Qx = e_1$ όπου $e_1 \in \mathbb{R}^2$ είναι το πρώτο διάνυσμα της τυπικής βάσης και ως συνήθως το $\alpha_{i,j}$ συμβολίζει το στοιχείο στη θέση (i,j) του A. (Υπόδ. Μπορείτε αν θέλετε να λύσετε το**

σύστημα αλγεβρικά για να βρείτε τις ακριβείς τιμές. Σε κάθε περίπτωση, το σχήμα πρέπει να είναι σωστά σχεδιασμένο ώστε να αναδεικνύεται η γεωμετρική ερμηνεία).

3. **Να υπολογίσετε μητρώο $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με μονάδες στην διαγώνιο, τέτοιο ώστε το γινόμενο MA να έχει μηδενικά στις θέσεις 3 ως 4 της <u>2ης</u> στήλης.** ***β)*** **Να γράψετε το M^{-1}; (δεν χρειάζονται πράξεις)**

<u>ΑΠ:</u> 1α) Το G είναι 3×3 ενώ το F 4×4. Μπορείτε να υπολογίσετε μόνοι σας ότι $G = \begin{pmatrix} 7 & 18 & 13 \\ 18 & 50 & 26 \\ 13 & 26 & 39 \end{pmatrix}$. *Θυμηθείτε τώρα ότι αν A είναι $m\times n$ και το B είναι $n\times m$ τότε ισχύει ότι* $\mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA)$. *Επομένως δεν χρειάζεται να υπολογιστεί το (μεγαλύτερο) $F = AA^\top$ αλλά κατευθείαν από το G έχουμε ότι* $\mathrm{trace}(F) = \mathrm{trace}(G) = 7 + 50 + 39 = 96$.

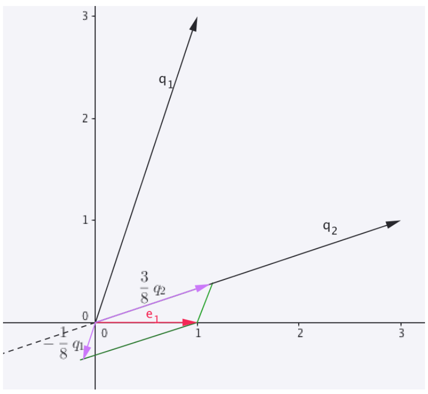
1β) Ένα $n\times n$ μητρώο Z χαρακτηρίζεται "διαγωνιοποιήσιμο" αν υπάρχει $n\times n$ μητρώο, έστω X, που είναι αντιστρέψιμο, τέτοιο ώστε το $X^{-1}ZX$ να είναι διαγώνιο. Το μητρώο G είναι πραγματικό και συμμετρικό, και ως εκ τούτου έπεται από τη θεωρία ότι είναι διαγωνιοποιήσιμο.

1γ) Όπως και με το ίχνος, ισχύει ότι αν A είναι $m\times n$ και το B είναι $n\times m$ τότε $\det(AB) = \det(BA)$. *Επομένως* $\det(F) = \det(G)$. *Όμως* $\mathrm{rank}(AA^\top) < 4$ *καθώς είναι γινόμενο μητρώων* 4×3 *επί* 3×4 *(γενικά* $\mathrm{rank}(AB) \le \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$ *και στην περίπτωσή μας* $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^\top) \le 3 < 4$*). Επομένως το τετραγωνικό μητρώο F δεν είναι πλήρους τάξης, άρα δεν είναι αντιστρέψιμο, επομένως* $\det(F) = 0$ *και σύμφωνα με τα προηγούμενα* $\det(G) = \det(F) = 0$.

1δ) Η ορίζουσα του $A^\top FA$ θα είναι 0 γιατί το γινόμενο είναι 4×4 έχει τάξη το πολύ ίση με την μικρότερη τάξη όλων των παραγόντων, δηλ. το πολύ 3. Επομένως το μητρώο δεν είναι πλήρους τάξης και η ορίζουσά του θα είναι 0.

1ε) Το $F = AA^\top$ είναι συμμετρικό καθώς $F^\top = (AA^\top)^\top = (A^\top)^\top A^\top = AA^\top = F$. Δεν είναι όμως θετικά ορισμένο γιατί οι γραμμές του A είναι γραμμικά εξαρτημένες καθώς το μητρώο είναι 4×3 (αυτό αρκεί, αλλά εδώ υπάρχει επιπλέον και η προφανής γραμμική εξάρτηση των γραμμών 1 και 3), επομένως υπάρχει μη μηδενικό $x \in \mathbb{R}^4$ τέτοιο ώστε $x^\top A = 0$ (οποιοδήποτε στον μη τετριμμένο μηδενόχωρο του $A^\top$, π.χ. το $x = (2, 0, -1, 0)^\top$.) Άρα $x^\top AA^\top x = 0$ επομένως το μητρώο είναι συμμετρικό θετικά ημιορισμένο αλλά όχι ΣΘΟ.

2) $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ επομένως $Qx = e_1$ λύνεται εύκολα καθώς $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$ και επομένως $Q^{-1}e_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$. Η γεωμετρική "κατά στήλες" ερμηνεία της λύσης του συστήματος δείχνει με ποιόν τρόπο πρέπει να γίνει ο γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων που αντιστοιχούν στις στήλες του μητρώου $Q = [q_1, q_2]$ ώστε να παραχθεί το διάνυσμα του δεξιού μέλους (στην περίπτωσή μας το e_1). Από τα παραπάνω φαίνεται (αλγεβρικά) ότι $e_1 = -\frac{1}{8}q_1 + \frac{3}{8}q_2$. Για να ερμηνεύσετε γεωμετρικά, χαράζουμε την ευθεία από την άκρη του e_1 (δηλ. το σημείο $(1, 0)$), παράλληλα προς το διάνυσμα q_2 μέχρι το σημείο τομής της παραλλήλου με το q_1. Η τομή βρίσκεται στην άκρη του διανύσματος $-\frac{1}{8}q_1$. Αντίστοιχα, το σημείο τομής της γραμμής που είναι παράλληλη με το q_1 και που έχει ως ένα σημείο την άκρη του e_1 θα είναι η άκρη του διανύσματος $\frac{3}{8}q_2$.



3) Θέτουμε $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Από την ειδική μορφή του μητρώου έπεται (από τη θεωρία) ότι* $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Αν και δεν ζητάται, ισχύει ότι* $MA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -7 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

2 Γενικές ερωτήσεις

Αν είναι γνωστό ότι τα διανύσματα $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ είναι κάθετα μεταξύ τους και όλα έχουν νόρμα-2 ίση με 1, και $A = u_1u_1^\top + 2u_2u_2^\top + 3u_3u_3^\top$ τότε $A^{-1} = u_1u_1^\top + \frac{1}{2}u_2u_2^\top + \frac{1}{3}u_3u_3^\top$.

a): Σωστό b): Λάθος

<u>ΑΠ:</u> Αφού τα διανύσματα u_1, u_2, u_3 είναι κάθετα και έχουν μήκος 1, τότε αν θέσουμε $U = (u_1, u_2, u_3)$ είναι ορθογώνιο, δηλ. $U^\top U = U^\top U = I$. Επίσης από τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού μπορούμε να γράψουμε $A = UDU^\top$ όπου το $D = \mathrm{diag}(1,2,3)$ είναι διαγώνιο, άρα η εξίσωση δίνει το φασματικό ανάπτυγμα του A δηλ. το D περιέχει τις ιδιοτιμές. Επομένως $A^{-1} = UD^{-1}U^\top$ που είναι ακριβώς το $u_1u_1^\top + \frac{1}{2}u_2u_2^\top + \frac{1}{3}u_3u_3^\top$ επομένως ΣΩΣΤΟ.

<u>Παρατηρήσεις</u>: Το σημαντικό εδώ είναι να αντιληφθείτε ότι το μητρώο μπορεί να γραφτεί ως $A = UDU^\top$ όπου το $U = (u_1, u_2, u_3)$ είναι τετραγωνικό με κάθετες στήλες άρα είναι ορθογώνιο. Επίσης $D = \mathrm{diag}(1,2,3)$. Πάντως το πρόβλημα μπορεί να λυθεί (με περισσότερο κόπο) ελέγχοντας αν ισχύει ότι το $B = u_1u_1^\top + \frac{1}{2}u_2u_2^\top + \frac{1}{3}u_3u_3^\top$ ικανοποιεί ότι $BA = I$. Ακολουθεί ο έλεγχος της τιμής του

$$(u_1u_1^\top + \frac{1}{2}u_2u_2^\top + \frac{1}{3}u_3u_3^\top)(u_1u_1^\top + 2u_2u_2^\top + 3u_3u_3^\top)$$

Ας δούμε και αυτήν την επιλογή - κλειδί στον τρόπο αυτό είναι να αξιοποιήσετε την καθετότητα και το μήκος των διανυσμάτων u_j:

$$(u_1u_1^\top + \frac{1}{2}u_2u_2^\top + \frac{1}{3}u_3u_3^\top)(u_1u_1^\top + 2u_2u_2^\top + 3u_3u_3^\top) \quad = \quad A_1 + A_2 + A_3 \;\; \text{όπου}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= u_1 \underbrace{(u_1^\top u_1)}_{=1} u_1^\top + u_1 \underbrace{(u_1^\top 2u_2)}_{=0} u_2^\top + u_1 \underbrace{(u_1^\top 3)}_{=0} u_3u_3^\top = u_1u_1^\top \\ A_2 &= \frac{1}{2}u_2u_2^\top(u_1u_1^\top + 2u_2u_2^\top + 3u_3u_3^\top) = \frac{1}{2}u_2u_2^\top 2u_2u_2^\top = u_2u_2^\top \end{aligned}$$

και παρόμοια $A_3 = u_3u_3^\top$. Επομένως

$$BA = u_1u_1^\top + u_2u_2^\top + u_3u_3^\top = UU^\top = I \text{ λόγω ορθογωνιότητας.}$$

Προσέξτε επίσης ότι αν επιλέγαμε άλλες τιμές συντελεστών για το υποψήφιο A^{-1} η απάντηση θα ήταν ΛΑΘΟΣ.

Ένα άλλο ερώτημα είναι το εξής:

Αν η ορίζουσα ενός συμμετρικού μητρώου είναι θετική τότε ποιό από τα παρακάτω είναι οπωσδήποτε σωστό;

a): κανένα από τα υπόλοιπα b): το μητρώο έχει όλες τις ιδιοτιμές του θετικές c): το μητρώο είναι θετικά ορισμένο d): το μητρώο έχει όλες τις ιδιοτιμές του μη αρνητικές

<u>ΑΠ:</u> Η ορίζουσα είναι το γινόμενο των ιδιοτιμών, οι οποίες λόγω συμμετρίας είναι πραγματικές. Δεν γνωρίζουμε τίποτα άλλο, επομένως θα μπορούσαμε να έχουμε άρτιο πλήθος ιδιοτιμών που είναι αρνητικές και το γινόμενο να είναι θετικό, επομένως δεν ισχύουν (b, c, d). Επομένως η σωστή απάντηση είναι (a).

Ένα άλλο ερώτημα που θέσαμε ήταν

Αν εφαρμόσουμε Gram-Schmidt για να ορθοκανονικοποιήσουμε $m+1$ τυχαία διανύσματα που ανήκουν στο $\mathbb{R}^m$ τότε είναι σίγουρο ότι σε καποιο βήμα θα προκύψει μηδενικό διάνυσμα.

a)**: Λάθος** b)**: Σωστό**

<u>ΑΠ:</u> Αν υπήρχαν $m+1$ ορθοκανονικά διανύσματα θα ήταν γραμμικά ανεξάρτητα. Αυτό όμως αποκλείεται καθώς ο χώρος είναι διάστασης m. Επομένως κάποια στιγμή στη διαδικασία της ορθοκανονικοποίησης θα προκύψει μηδενικό διάνυσμα, άρα ΣΩΣΤΟ.

Ένα άλλο παράδειγμα ερωτήματος:

Έστω $n > 1$ και γενικό μητρώο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Έστω επίσης και οι παρακάτω προτάσεις

1. **Όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές.**
2. **Όλες οι ιδιάζουσες τιμές είναι θετικές.**
3. **Η αναγμένη κλιμακωτή μορφή δεν έχει μηδενικές γραμμές.**
4. **Υπάρχουν $W \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $H \in \mathbb{R}^{1\times n}$ τέτοια ώστε $A = WH$.**
5. **Το μητρώο $AA^\top$ είναι συμμετρικό θετικά ορισμένο.**

Ποιός συνδυασμός προτάσεων είναι ο μόνος ορθός;

a)**: Οι 2, 3, 5** b)**: Οι 2, 5** c)**: Οι 1, 2, 3, 4** d)**: όλες οι προτάσεις είναι σωστές.** e)**: Οι 1, 3, 4** f)**: κανένας από τους προτεινόμενους συνδυασμούς.**

(Σημ. στην ερώτηση δεν ζητάται εξήγηση, εμείς απλά αναφέρουμε το σκεπτικό που θάπρεπε να έχετε για να καταλήξετε στην σωστή απάντηση.)

<u>ΑΠ:</u> Ένα μητρώο μπορεί να έχει ιδιοτιμές κάθε είδους, χωρίς κανένα περιορισμό προσήμου. Επομένως αποκλείεται το 1. Ένα μητρώο μπορεί να είναι μειωμένης τάξης και να έχει μηδενικές ιδιάζουσες τιμές και μηδενικές γραμμές στην αναγμένη κλιμακωτή μορφή. Επομένως αποκλείονται τα 2 και 3. Επίσης η τάξη του μητρώου μπορεί να είναι μεγαλύτερη του 1, που αποκλείει το 4. Τέλος για να είναι το $AA^\top$ ΣΘΟ θα πρέπει το A να είναι πλήρους τάξης, γραμμών, κάτι που δεν εξασφαλίζεται σε ένα γενικό μητρώο. Επομένως αποκλείεται και το 5. Επομένως η σωστή απάντηση είναι (f).

3 Θέματα σχετικά με το κεφ. 4

Το κεφάλαιο αφορούσε μεταξύ άλλων την ορθογωνιότητα και ορθογωνιοποίηση, προβολές, σχέσεις καθετότητας μεταξύ βασικών υπόχωρων, καθώς και τα γραμμικά προβλήματα ελαχίστων τετραγώνων.

Παράδειγμα θέματος:

Δίνεται το μητρώο $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ και το διάνυσμα $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Στη συνέχεια της ερώτησης συμβολίζουμε με P το μητρώο ορθογώνιας προβολής P επί του χώρου στηλών του A.

a)**: να υπολογίσετε το P (χρειάζονται οι ακριβείς τιμές για να βαθμολογηθείτε).** b)**: να βρείτε την ορθογώνια προβολή του y, έστω $\hat{y}$, επί του του χώρου στηλών του A.** c)**: Να κυκλώσετε <u>Σωστό</u> ή <u>Λάθος</u> αν αληθεύει ότι $\|P^2 z\|_2 = \|(I-P)z\|_2$ για κάθε $z \in \mathbb{R}^4$.**

<u>ΑΠ:</u> a) Εξ ορισμού, το μητρώο ορθογώνιας προβολής είναι $P = A(A^\top A)^{-1}A^\top$ υπό τον όρο ότι οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, πράγμα που συμβαίνει όπως φαίνεται εύκολα από τη διαφορετική θέση των μηδενικών στις δύο στήλες. Υπολογίζουμε (και εδώ φαίνεται γιατί η επιλογή μας διευκολύνει τις πράξεις)

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^\top A)^{-1}A^\top = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{6} \end{pmatrix}$$

επομένως

$$P = A(A^\top A)^{-1}A^\top = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

b) *Ζητάται η ΟΠ επί του υπόχωρου που είναι Py επομένως*

$$\hat{y} = Py = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) *Τέλος επιλέγοντας π.χ. $z = e_1$ έχουμε ότι* $\|P^2 z\|_2 = \|Pz\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}^\top \right\|_2$. *Επίσης* $\|(I - P)z\|_2 = \|z - Pz\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\|_2$ *και προφανώς οι δύο ποσότητες δεν είναι ίσες.*

Έστω $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$**. Να χρησιμοποιήσετε τον αλγόριθμο Gram-Schmidt για να βρείτε μητρώο** $Q \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ **με ορθοκανονικές στήλες και άνω τριγωνικό** $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ **τέτοια ώστε** $A = QR$**.**

<u>ΑΠ:</u> Στο πρώτο βήμα κανονικοποιούμε την 1η στήλη του A:

$$q_1 \;=\; a_1/\|a_1\|_2 = (5,-3,1,1)^\top/\sqrt{36} = \frac{1}{6}(5,-3,1,1)^\top$$

Επίσης $\rho_{1,1} = \|a_1\| = 6$.

$$\tilde{q}_2 \;=\; a_2 - q_1 q_1^\top a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Τέλος $q_1^\top a_2 = 12$ *και* $\|\tilde{q}_2\| = 6$.

a)*: Το μητρώο Q είναι* $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ b)*: Το άνω τριγωνικό* $R = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

<u>Παρατηρήσεις</u>: Οι παραπάνω τιμές των μητρώων Q, R δεν είναι μοναδικές. Ειδικότερα, αφού $QR = (-Q)(-R)$ και το $-Q$ είναι ορθογώνιο και το R άνω τριγωνικό, θα μπορούσατε να έχετε αντίθετα πρόσημα (για παράδειγμα, αυτό το αποτέλεσμα θα προκύψει αν χρησιμοποιήσετε τη MATLAB).

Και ένα σύντομο ερώτημα αυτής της κατηγορίας:

Δίνονται τα 3 ζεύγη (ξ_j, ψ_j) (τιμών ξ_j, μετρήσεων ψ_j): $(-1,4),(1,13),(2,17)$.

Αν η πρώτη μέτρηση (ξ_1,ψ_1) ήταν $(-1,4)$ αυτό το ταίριασμα δεν θα είναι εφικτό. Να υπολογίσετε την γραμμή $y = \alpha_0 + \alpha_1 x$ που στην περίπτωση αυτή θα ελαχιστοποιεί την απόσταση

$$E = \sqrt{\sum_{j=1}^{3}(y(\xi_j) - \psi_j)^2}.$$

<u>ΑΠ:</u> (Σημ. Τυπικό ερώτημα της κατηγορίας «υπολογισμοί βέλτιστων λυσεων σύμφωνα με το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων», και μάλιστα χρησιμοποιώντας γραμμική συνάρτηση. Ειδικότερα, πρέπει να υπολογίσουμε το

$$\arg\min_{a\in\mathbb{R}^2} \|Xa - y\|_2, \text{ όπου } X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Για ευκολία εδώ χρησιμοποιούμε κανονικές εξισώσεις και καθώς το μητρώο είναι διάστασης 2, λύνουμε με αντιστροφή (αυτό δεν το συνιστούμε γενικά.) Ονομάζουμε τη βέλτιστη λύση $\hat{a}$ οπότε $X^\top X\hat{a} = X^\top y$ δηλ.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 43 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{a} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 34 \\ 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{59}{7} \\ \frac{61}{14} \end{pmatrix}$$

4 Θέματα σχετικά με το κεφάλαιο 3

Υπενθυμίζουμε ορισμένα βασικά ζητήματα του κεφαλαίου: Οι 4 θεμελιώδεις υπόχωροι, αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή, αναγωγή σε ΑΓΚΜ, τάξη μητρώου και άλλες πληροφορίες που ανακτώνται από τις μορφές αυτές, επίλυση ομογενών συστημάτων, επίλυση γενικού συστήματος, παραγοντοποίηση τάξης, κ.λπ.

Τυπική ερώτηση σχετικά με την ύλη αυτού του κεφαλαίου:

Δίνονται $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **και** $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

i) Βρείτε την ανηγμένων γραμμών κλιμακωτή μορφή του A. \ ii) Μία βάση για το χώρο στηλών είναι $\operatorname{range}(A) = \operatorname{span}\{\qquad\qquad\}$

iii) Μία βάση για το μηδενόχωρο είναι $\operatorname{null}(A) = \operatorname{span}\{\qquad\qquad\}$:

iv) Η πλήρης λύση του $Ax = b$ είναι $x =$

<u>ΑΠ:</u> Σημειώνουμε πρώτα ότι το μητρώο είναι 3×4. Γράφουμε $m = 3, m = 4$. Για την ΑΓΚΜ εκτελούμε τις απαραίτητες πράξεις μεταξύ γραμμών (εναλλαγές, γραμμικούς συνδυασμούς, και κλιμάκωση) μέχρις ότου καταλήξουμε στην επθυμητή (μοναδική) μορφή.

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{(1)} = L_1 A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{(2)} = L_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{(3)} = M_3 A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow R = D_3 A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Αυτό το τελευταίο μητρώο είναι το ζητούμενο R καθώς είναι σε ΑΓΚΜ. Από τη μορφή αυτή, φαίνεται ότι οι οδηγοί είναι στις στήλες 1, 2 και 3 επομένως μία βάση για το χώρο στηλών θα είναι οι αντίστοιχες στήλες του μητρώου, δηλ.

$$\text{η βάση είναι } \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{range}(A) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

Προσέξτε ότι το R δεν έχει μηδενικές γραμμές, άρα $\mathrm{rank}(A) = m = 3$. Σχετικά με το μηδενόχωρο, η διάστασή του θα είναι $\dim(\mathrm{null}(A)) = n - \mathrm{rank}(A) = 4 - 3 = 1$. Για να βρούμε το μηδενόχωρο λύνουμε το (εύκολο) ομογενές σύστημα με συντελεστές από το R

$$Rz = 0 \Rightarrow z = (3, -3, -5, 1)^\top \Rightarrow \text{η βάση του μηδενόχωρου είναι το } z \text{ άρα } \mathrm{null}(A) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Σχετικά με την πλήρη λύση, αυτή είναι μία μερική λύση του $Ax = b$ σύν όλες τις λύσεις του μηδενόχωρου. Για τη μερική λύση επιλέγουμε να θέσουμε τις ελεύθερες μεταβλητές 0 (στην περίπτωσή μας η μόνη ελεύθερη μεταβλητή είναι αυτή που αντιστοιχεί στην 4η στήλη). Απλοποιούμε μετατρέποντας το b όπως τροποποιήσαμε το A για να προκύψει το R, δηλ. $Rx = \hat{b}$ όπου $\hat{b} = D_3 M_3 L_2 L_1 b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ επομένως η μερική λύση που αντιστοιχεί στην επιλογή $(x)_4 = 0$ είναι $x_P = (-2, 2, 5, 0)^\top$. Η πλήρης λύση, επομένως, θα είναι

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Παρατηρήσεις: Υπενθυμίζουμε ότι η ΑΓΚΜ έχει τα εξής χαρακτηριστικά (οτιδήποτε άλλο δεν είναι ΑΓΚΜ):

- Οι μηδενικές γραμμές παρατίθενται τελευταίες.
- Το κυρίαρχο (πρώτο μη μηδενικό) στοιχείο των μη μηδενικών γραμμών είναι 1.
- Κάθε στήλη που περιέχει κυρίαρχο 1, έχει 0 στις υπόλοιπες θέσεις της στήλης.
- Το κυρίαρχο 1 κάθε γραμμής είναι στην πιο αριστερή θέση οποιουδήποτε κυρίαρχου στοιχείου των γραμμών που έπονται.

Επομένως η ΑΓΚΜ γενικά διαφέρει από την κλιμακωτή μορφή (που σε αντίθεση με η ΑΓΚΜ είναι μοναδική μόνον ως προς τη μορφή όχι ως προς τις τιμές, και παρέχει περισσότερες πληροφορίες πιο άμεσα απ' ότι η κλιμακωτή μορφή. Βέβαια, η ΑΓΚΜ απαιτεί περισσότερες πράξεις για να υπολογιστεί.) Η διαδικασία έχει περιγραφεί με πολλά παραδείγματα στην τάξη (δείτε διαφάνειες και ασκήσεις φροντιστηρίου). Προσέξτε ότι τα μητρώα με τα οποία πολλαπλασιάζουμε σε κάθε βήμα j είναι στοιχειώδη μητρώα που επιτελούν τα εξής: α) Εναλλαγή (αν χρειάζεται) της γραμμής j με κάποια επόμενη γραμμή. β) άθροιση κατάλληλου πολλαπλάσιου της γραμμής j στις γραμμές $1, 2, ..., j-1, j+1, ..., m$ ώστε να μηδενιστούν τα στοιχεία της στήλης εκτός από το στοιχείο στη θέση (j, j). γ) διαίρεση όλων των στοιχείων της γραμμής με το διαγώνιο στοιχείο ώστε να γίνει 1. Προσέξτε γιατί δεν χρειάζονται πάντα όλα τα παραπάνω καθώς σε αρκετές περιπτώσεις το ζητούμενο προκύπτει αβίαστα.

5 Θέματα των κεφαλαίων 5 και 6

Μερικά βασικά ζητήματα του κεφαλαίου ήταν το θεώρημα Cayley-Hamilton και μερικές εφαρμογές του, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, μερικές σημαντικές συναρτήσεις των μητρώων (ίχνος, ορίζουσα, ιδιοτιμές), τα ιδιοδιανύσματα, φασματικό ανάπτυγμα και ζητήματα διαγωνιοποίησης και η μορφή Jordan.

Τα κεφάλαια 6 και 7 καθώς επίσης και το 3 αφορούν το σημαντικό θέμα των ειδικών παραγοντοποιήσεων που αποκαλύπτουν σημαντικές πληροοφορίες για το μητρώο. Μία από αυτές με ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι η παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών (το λεγόμενο SVD) (ιδιαίτερα το 6) αφορούν επίσης το η στις ιδιάζουσες τιμές και στα ιδιάζοντα διανύσματα που χρησιμοποιούνται σε πολλές εφαρμογές Big Data, δηλ. στην προσέγγιση μητρώων.

Μερικές ερωτήσεις σχετικές με τα θέματα αυτά:

Έστω ότι $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$**.**

1. **Να υπολογίσετε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του** A**:** $p(\lambda)$.........................

2. **Να βρείτε (βαθμωτούς) συντελεστές τέτοιους ώστε** $A^3 = \zeta A^2 + \rho A + \psi I$**:**

ΑΠ:: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ως προς τη μεταβητή λ είναι η ορίζουσα του μητρώου $\lambda I - A$ ή $A - \lambda I$ όπου λ είναι μεταβλητή.

Επιλέγοντας το ανάπτυγμα Laplace ως προς την 3η γραμμή, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= (\lambda-2)(\lambda(\lambda-3)-4) \\ &= (\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda-4) \\ &= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 2\lambda + 8 \end{aligned}$$

Άρα το χ.π. είναι

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 2\lambda + 8$$

Για το μέρος (2) θυμηθείτε το θεώρημα Cayley-Hamilton σύμφωνα με το οποίο αν αντικαταστήσουμε στο χ.π. το μητρώο θα προκύψει το ταυτοτικό μητρώο, με άλλα λόγια,

$$0_{3\times3} = A^3 - 5A^2 + 2A + 8I$$

Επομένως $A^3 = 5A^2 - 2A - 8I$ και οι συντελεστές που ζητάμε είναι
a): $\zeta = 5$ b): $\rho = -2$ c): $\psi = -8$

Παρατηρήσεις: Ο υπολογισμός της ορίζουσας είναι εύκολος (και αξίζει να θυμάστε ότι το πολυώνυμο έχει πάντα ακριβώς τον ίδιο βαθμό με το μέγεθος του μητρώου ανεξαρτήτως των όποιων απλοποιήσεων γίνονται στις πράξεις (ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής θα έχει πάντα μέτρο τη μονάδα (θα είναι 1 αν χρησιμοποιήσουμε την ορίζουσα $\det(\lambda I - A)$. Επίσης όταν υπολογίσετε την ορίζουσα για ένα μικρό ή απλό μητρώο, αξίζει να ενεργήσετε με τρόπο που να μειώσετε το πλήθος των πράξεων. Εδώ αυτό σημαίνει να χρησιμοποιήσετε τον μικρό τύπο (ανάπτυγμα Laplace) ως προς τη γραμμή ή στήλη που έχει τα περισσότερα μηδενικά. Εννοείται ότι το ίδιο αποτέλεσμα θα πέρνατε οποιονδήποτε τρόπο και να επιλέγατε να υπολογίσετε την ορίζουσα (απλά, αυξάνοντας το πλήθος των αριθμητικών πράξεων αυξάνει ο κόπος ,ο χρόνος που χρειάζεστε καθώς και η πιθανότητα να υποπέσετε σε σφάλμα.

Παραδειγμα ερώτησης:

Δίνεται $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$**. Να βρείτε (υπόδ. αξιοποιείστε την ειδική δομή)** $a)$**: τις ιδιάζουσες τιμές** $\sigma_1 =$, $\sigma_2 =$ $b)$**: το ψευδοαντίστροφο** $A^\dagger$

<u>ΑΠ:</u> $a)$ *Η τάξη του μητρώου και το πλήθος των μη μηδενικών ιδιαζουσών τιμών συμπίπτουν. Το μητρώο είναι 3×2 επομένως θα έχει δύο ιδιάζουσες τιμές. Προσέχουμε όμως ότι η 1η στήλη είναι πολλαπλάσιο της 2ης, άρα η τάξη του μητρώου θα είναι 1 (δεν είναι 0 γιατί τότε θα ήταν μηδενικό). Άρα μία ιδιάζουσα τιμή θα είναι 0 και επειδή οι ιδιάζουσες τιμές αναγράφονται σε φθίνουσα σειρά, γράφουμε $\sigma_2 = 0$. Απομένει επομένως να υπολογίσουμε το σ_1, που είναι η θετική τετραγωνική ρίζα του χ.π. του $A^\top A = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 18 & 36 \end{pmatrix}$. Άρα:*

$$p(\lambda) \quad = \quad \det(A^\top A - \lambda I) = (9-\lambda)(36-\lambda) - 18^2 = \lambda^2 - 45\lambda \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{45}.$$

Επίσης,

$$A^\top A - 45I = \begin{pmatrix} -36 & 18 \\ 18 & -9 \end{pmatrix}$$

επομένως δεξιό ιδιάζον διάνυσμα v_1 που αντιστοιχεί στο σ_1 είναι το κανονικοποιημένο διάνυσμα που λύνει το ομογενές σύστημα $(A^\top A - 45I)v_1 = 0$. Φαίνεται εύκολα (σχεδόν χωρίς πράξεις,) ότι $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^\top$.

$b)$ *Αφού γνωρίζουμε το SVD, το ψευδοαντίστροφο μπορεί να γραφτεί ως*

$$(U\Sigma V^\top)^\dagger = V\Sigma^\dagger U^\top = V \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{45}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\dagger U^\top$$

Λόγω όμως των μηδενικών του $\Sigma^\dagger$ (μόνο μη μηδενικό στη θέση (1,1)), το ψευδοαντίστροφο μπορεί να γραφτεί βάσει μόνον των σ_1, u_1, v_1 ως $A^\dagger = \frac{1}{\sigma_1} v_1 u_1^\top$ όπου u_1, v_1 είναι οι πρώτες στήλες των U, V, δηλ. τα ιδιάζοντα διανύσματα που αντιστοιχούν στο σ_1. Ισχύει επίσης γενικά ότι $Av_1 = \sigma_1 u_1$ επομένως

$$A^\dagger \quad = \quad \frac{1}{\sigma_1} v_1 u_1^\top = \frac{1}{{\sigma_1}^2} v_1 (Av_1)^\top = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές χρησιμοποιούνται στην διερεύνηση της συμπεριφοράς δυνάμεων μητρώου και γενικότερα στην συμπεριφορά ενός φαινομένου που μοντελοποιείται μέσω δυναμικού συστήματος (δηλ. συστήματος διαφορικών εξισώσεων), π.χ. πώς διεχέεται η πληροφορία σε ένα δίκτυο.

Η παρακάτω ερώτηση είναι τυπική:

Δίνονται $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$, $C = ee^\top$ **όπου** $e = (1,1)^\top$ **και** $A = \begin{pmatrix} B & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & C \end{pmatrix}$**. Να βρείτε** $X, M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ **όπου το** M **είναι διαγώνιο και τέτοια ώστε να ικανοποιείται η ισότητα** $AX = XM$ **και να απαντήσετε σχετικά με τη συμπεριφορά των στοιχείων των δυναμεων** A^k **καθώς** $k \to \infty$**.**

<u>ΑΠ:</u> Το μητρώο A είναι κατά πλοκάδες (μπλοκ) διαγώνιο, επομένως οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα μπορούν να υπολογιστούν από τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των μικρότερων μητρώων, B, C. Για παράδειγμα, $\lambda(A) = \lambda(B) \cup \lambda(C)$. Προφανώς όμως, η μία ιδιοτιμή του C είναι 0 (το μητρώο είναι τάξης 1). Επίσης εύκολα βλέπουμε ότι ένα ιδιοδιάνυσμα για το 0 είναι το $(1,-1)^\top$

καθώς $ee^\top(1,-1)^\top = (0,0)^\top$. Η άλλη ιδιοτιμή του C είναι το 2 καθώς $ee^\top e = 2e$. Επίσης, από τη σχέση αυτή έπεται ότι ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή αυτή είναι το ίδιο το e. Επομένως μπορούμε να λάβουμε ως (μη κανονικοποιημένα) γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A για τις ιδιοτιμές 2 και 0 αντίστοιχα τα διανύσματα

$$\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\}$$

Για το B έχουμε ότι το χ.π. είναι $(1/2-\lambda)^2 - 1/16$ άρα οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του $1/2-\lambda = \pm\frac{1}{4}$ άρα $\lambda(B) = \{\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\}$. Επομένως $\lambda(A) = \{2, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0\}$. Επίσης για τα ιδιοδιανύσματα του B,

$$(B-\frac{3}{4}I) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ ένα (μη κανονικοποιημένο) ιδιοδιάνυσμα είναι } z_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

και

$$(B-\frac{1}{4}I) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ ένα (μη κανονικοποιημένο) ιδιοδιάνυσμα είναι } z_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Επομένως

$$M = \mathrm{diag}([2, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0]), X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Καθώς το μητρώο είναι μπλοκ διαγώνιο,

$$A^k = \begin{pmatrix} B^k & 0 \\ 0 & C^k \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του B είναι μικρότερες από 1 (σε απόλυτη τιμή). Το C έχει μία ιδιοτιμή μεγαλύτερη του 1. Επομένως στην περίπτωσή μας, οι τιμές των στοιχείων των δυνάμεων του A επιδεικνύουν διαφορετική συμπεριφορά ανάλογα με τη θέση που βρίσκονται. Οι τιμές στις θέσεις $(A^k)_{1:2,1:2} = B^k$ τείνουν στο 0, οι τιμές $(A^k)_{3:4,3:4} = C^k$ τείνουν στο άπειρο και οι τιμές στις θέσεις εκτός των διαγώνιων πλοκάδων παραμένουν 0.