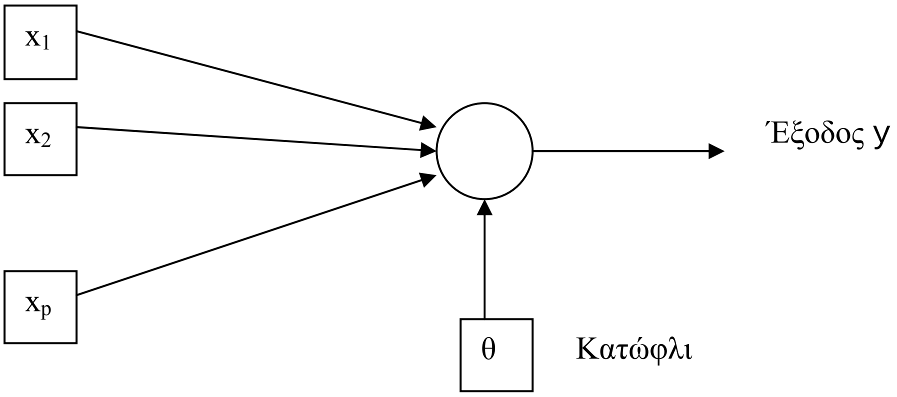
Ασκήσεις Φροντιστηρίου «Υπολογιστική Νοημοσύνη Ι»
3ο Φροντιστήριο

Πρόβλημα 1ο

Το perceptron ενός επιπέδου είναι ένας γραμμικός ταξινομητής προτύπων. Δικαιολογήστε αυτή την πρόταση.



Perceptron (στοιχειώδης αισθητήρας) ενός επιπέδου

Λύση

Ας ασχοληθούμε με την περίπτωση ενός προβλήματος δύο κλάσεων. Μπορούμε πάντα να σχεδιάσουμε ένα perceptron ενός επιπέδου το οποίο χαρακτηρίζεται από ένα διάνυσμα βαρών, τέτοιο ώστε να μπορούμε να γράψουμε:

* $\mathbf{w}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ για ένα διάνυσμα τιμών εισόδου x που ανήκει στην κλάση c_1.
  $\mathbf{w}^T\mathbf{x} < \mathbf{0}$ για ένα διάνυσμα τιμών εισόδου x που ανήκει στην κλάση c_2.

Ο κανόνας ταξινόμησης που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο είναι γραμμικός, και διαχωρίζει το χώρο σε δύο ημιεπίπεδα. Τα σημεία του 1ου ανήκουν στην κλάση c_1 και τα σημεία του δεύτερου ανήκουν στην κλάση c_2.

* ορίζουμε : $\chi(n) = [\ \theta\ , x_1(n)\ , x_2(n)\ , \ldots\ , x_n(n)\ ]^T$

$w(n) = [\ +1\ , w_1(n)\ , w_2(n)\ , \ldots\ , w_n(n)\ ]^T$

Οπότε :

$$u(n) = \sum_{i=0}^{n} w_i(n) \cdot x_i(n) = w^T(n) \cdot x(n)$$

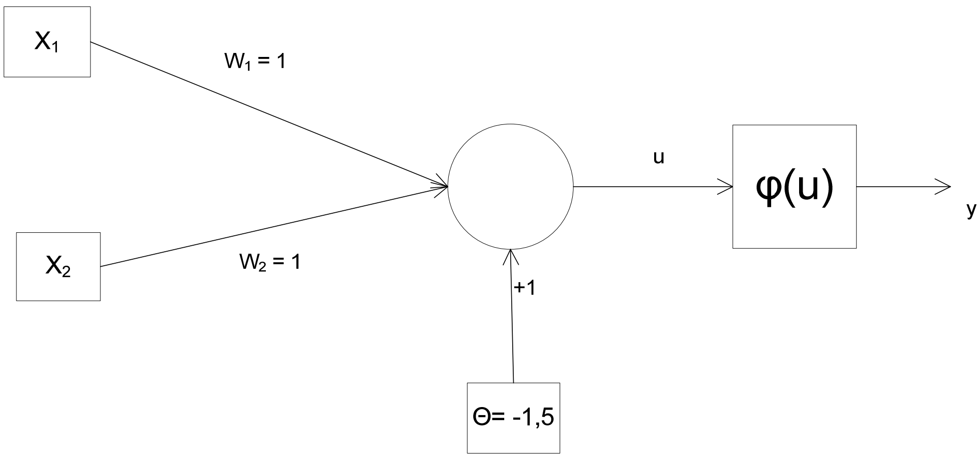
Πρόβλημα 2ο

Χρησιμοποιήστε ένα perceptron για να υλοποιήσετε τις λογικές συναρτήσεις AND, OR και NOT. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί το perceptron για την υλοποίηση της λογικής συνάρτησης XOR και αν όχι γιατί;

Λύση

A) AND

Input		**Output**
X_1	X_2	y
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0



$$y = f(u) = \begin{cases} 1 & , \quad u \geq 0 \\ 0 & , \quad u < 0 \end{cases}$$

$$u = w_1x_1 + w_2x_2 + \theta = x_1 + x_2 - 1{,}5$$

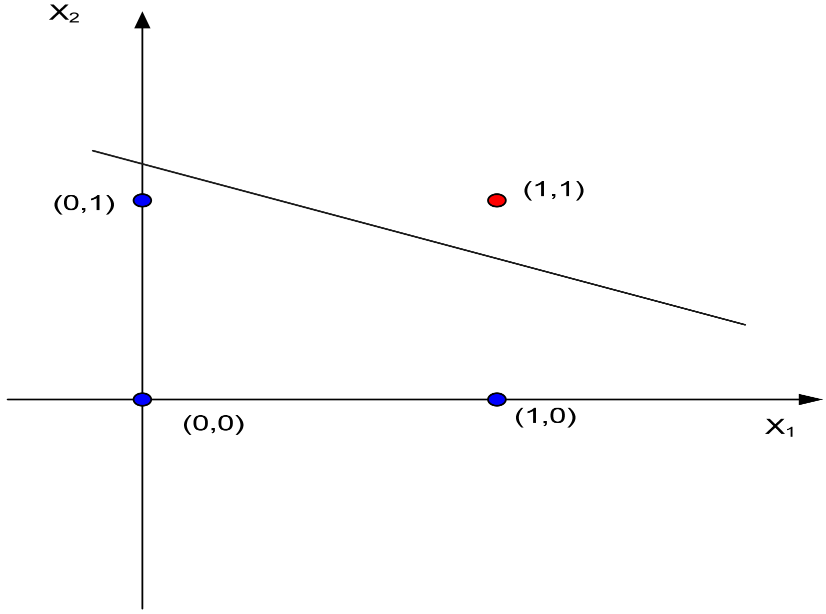
Έτσι έχουμε:

Αν $x_1 = x_2 = 1$ τότε $u = 0{,}5$ άρα $y = 1$

Αν $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ τότε $u = -0{,}5$ άρα $y = 0$

Αν $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ τότε $u = -0{,}5$ άρα $y = 0$

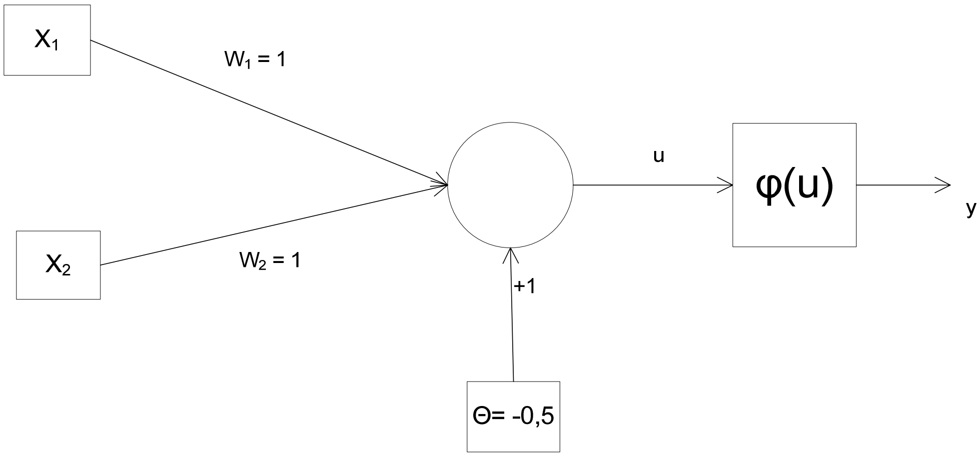
Αν $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ τότε $u = -0,5$ άρα $y = 0$



Όπως παρατηρούμε ο νευρώνας perceptron λειτουργεί σωστά

B) OR

Input		Output
X1	**X2**	**y**
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0



$$y = f(u) = \begin{cases} 1 & , \quad u \geq 0 \\ 0 & , \quad u < 0 \end{cases}$$

$$u = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \theta = x_1 + x_2 - 0{,}5$$

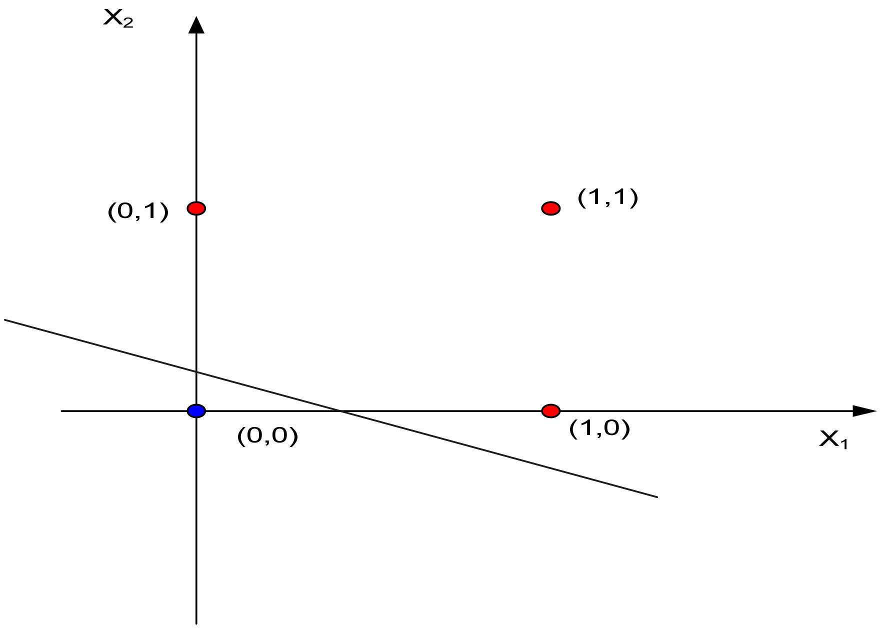
Έτσι έχουμε:

Αν $x_1 = x_2 = 1$ τότε $u = 1{,}5$ άρα $y = 1$

Αν $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ τότε $u = 0{,}5$ άρα $y = 1$

Αν $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ τότε $u = 0{,}5$ άρα $y = 1$

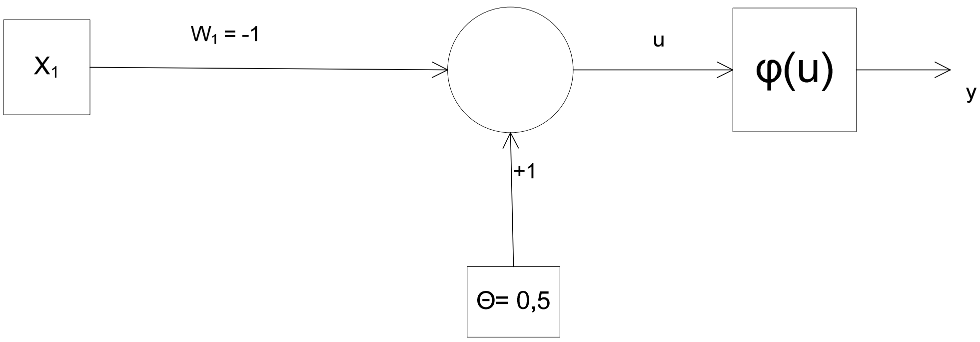
Αν $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ τότε $u = -0{,}5$ άρα $y = 0$



Όπως παρατηρούμε ο νευρώνας perceptron λειτουργεί σωστά

Γ) NOT

input	output
x_1	y
1	0
0	1



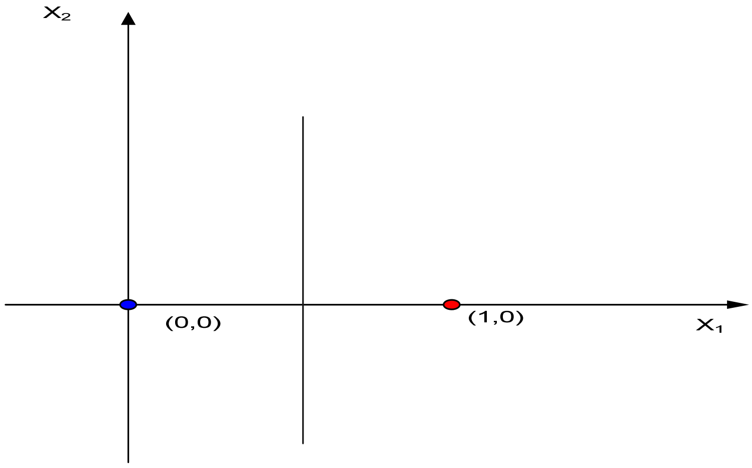
$$y = f(u) = \begin{cases} 1 & , \quad u \geq 0 \\ 0 & , \quad u < 0 \end{cases}$$

$u = w_1 x_1 + \theta = -x_1 + 0,5$

Έτσι έχουμε:

Αν $x_1 = 1$ τότε $u = -0,5$ άρα $y = 0$

Αν $x_1 = 0$ τότε $u = 0,5$ άρα $y = 1$

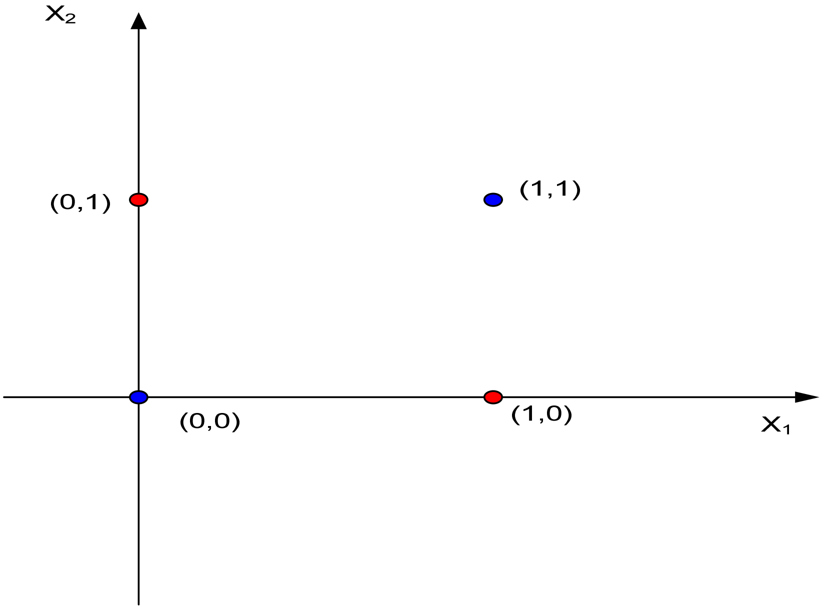


Όπως παρατηρούμε ο νευρώνας perceptron λειτουργεί σωστά

Δ) XOR

Input		Output
X_1	X_2	y
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Δεν είναι γραμμικά διαχωρίσιμη συνάρτηση και δεν μπορεί να διαχωριστεί από τον perceptron.



Πρόβλημα 3ο

Θεωρήστε δύο μονοδιάστατες, με Gaussian κατανομή κλάσεις c_1 και c_2 οι οποίες έχουν κοινή διασπορά ίση με 1. Οι μέσες τιμές τους είναι ίσες με:

$$\mu_1 = -10$$

$$\mu_2 = +10$$

Αυτές οι δύο κλάσεις είναι γραμμικά διαχωριζόμενες. Σχεδιάστε ένα ταξινομητή που να διαχωρίζει αυτές τις δύο κλάσεις.

<u>Λύση</u>

Από τους τύπους :

$y = w^T x + \theta$

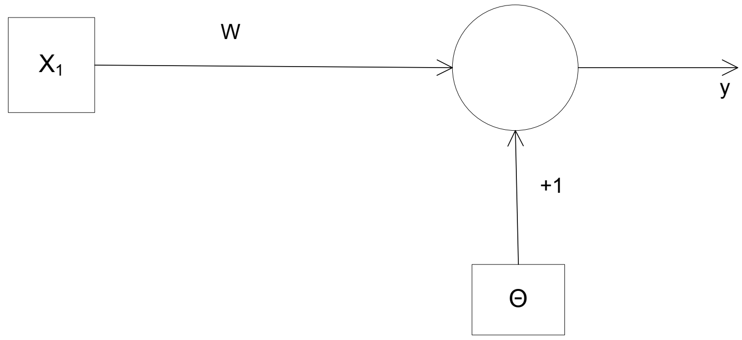
$w = C^{-1}(\mu_1 - \mu_2)$

$b = 1/2(\ \mu_2^T C^{-1} \mu_2 - \mu_1^T C^{-1} \mu_1\ )$

Έχουμε ότι ο Gaussian ταξινομητής αποτελείται από **μία μονάδα** με ένα βάρος και μηδέν τιμή κατωφλίου.

$$w = \frac{1}{\sigma^2}\left(\mu_1 - \mu_2\right) = -20$$

$$\theta = b = \frac{1}{2\sigma^2}\left(\left|\mu_1\right|^2 - \left|\mu_2\right|^2\right) = 0$$



Πρόβλημα 4ο

Να δείξετε ότι οι εξισώσεις

1) $\operatorname{sgn}(u) = \begin{cases} +1 & , \quad u > 0 \\ -1 & , \quad u < 0 \end{cases}$

2) $y(n) = \operatorname{sgn}(w^T(n)x(n))$

3) $d(n) = \begin{cases} +1 & , \quad x(n) \quad in \quad C_1 \\ -1 & , \quad x(n) \quad in \quad C_2 \end{cases}$

4) $w(n+1) = w(n) + \eta[\, d(n) - y(n)\,]\, x(n)$

που συνοψίζουν τον κανόνα σύγκλισης του perceptron είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις :

A) $w(n+1) = w(n)$ αν $w^T(n)x(n) > 0$ και $x(n) \in C_1$

$w(n+1) = w(n)$ αν $w^T(n)x(n) \leq 0$ και $x(n) \in C_2$

B) $w(n+1) = w(n) - \eta(n)x(n)$ αν $w^Te(n)x(n) > 0$ και $x(n) \in C_2$

$w(n+1) = w(n) + \eta(n)x(n)$ αν $w^Te(n)x(n) \leq 0$ και $x(n) \in C_1$

Λύση

1. Εάν $w^T(n)x(n) > 0$, τότε $y(n) = +1$. Εάν επίσης το $x(n)$ ανήκει στην κλάση C_1, τότε $d(n) = +1$. Επομένως το σήμα λάθους ισούται με $e(n) = d(n) – y(n) = 0$, οπότε

$$w(n+1) = w(n) + \eta\ e(n)\ x(n) = w(n)$$

2. Εάν $w^T(n)x(n) \leq 0$, τότε $y(n) = -1$. Εάν επίσης το $x(n)$ ανήκει στην κλάση C_2, τότε $d(n) = -1$. Επομένως το σήμα λάθους ισούται με $e(n) = d(n) – y(n) = 0$, οπότε

$$w(n+1) = w(n) + \eta\ e(n)\ x(n) = w(n)$$

3. Εάν $w^T(n)x(n) > 0$, τότε $y(n) = +1$. Εάν επίσης το $x(n)$ ανήκει στην κλάση C_2, τότε $d(n) = -1$. Επομένως το σήμα λάθους ισούται με $e(n) = d(n) – y(n) = -2$, οπότε

$$w(n+1) = w(n) + \eta\ e(n)\ x(n) = w(n) - 2\eta\ x(n), \quad \text{για } \eta(n)=2\eta$$

4. Εάν $w^T(n)x(n) \leq 0$, τότε $y(n) = -1$. Εάν επίσης το $x(n)$ ανήκει στην κλάση C_1, τότε $d(n) = +1$. Επομένως το σήμα λάθους ισούται με $e(n) = d(n) – y(n) = +2$, οπότε

$$w(n+1) = w(n) + \eta\ e(n)\ x(n) = w(n) + 2\eta\ x(n), \quad \text{για } \eta(n)=2\eta$$