Ασκήσεις Φροντιστηρίου «Υπολογιστική Νοημοσύνη Ι»
1ο Φροντιστήριο

Πρόβλημα 1^o

Μία μορφή της σιγμοειδούς συνάρτησης ορίζεται ως εξής: $\varphi(\upsilon) = \dfrac{1}{1+\exp(-\alpha\upsilon)}$.

Η συνάρτηση αυτή κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 0 και 1. Δείξτε ότι η παράγωγος $\varphi(\upsilon)$ ως προς το υ δίνεται από τον παρακάτω τύπο: $\varphi'(\upsilon) = \dfrac{d\varphi}{d\upsilon} = \alpha\varphi(\upsilon)[1-\varphi(\upsilon)]$.

Ποια είναι η τιμή της παραγώγου για υ=0;

<u>Λύση</u>

$$\varphi(\mathrm{u}) = \frac{1}{1+\exp(-au)}$$

$$\varphi'(\mathrm{u}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+\exp(-au)}\right) \underline{\underline{\;*(1),(2),(3)\;}} \frac{-1}{[1+\exp(-au)]^2}\cdot(-a)\cdot\exp(-au) =$$

$$= a\cdot\frac{1}{1+\exp(-au)}\cdot\frac{1-1+\exp(-au)}{1+\exp(-au)} \quad \underline{\underline{(1-1+a=a)}}$$

$$= a\cdot\frac{1}{1+\exp(-au)}\cdot\left[\frac{1+\exp(-au)}{1+\exp(-au)}-\frac{1}{1+\exp(-au)}\right] = a\cdot\varphi(\mathrm{u})\,[\,1-\varphi(\mathrm{u})\,]$$

Για u=0

$$\varphi(0) = \frac{1}{1+\exp(0)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi'(0) = a\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4}$$

$$* \qquad \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)}\cdot\frac{dg(x)}{dx} \quad (1) \quad , \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \quad (2)$$

$$\frac{d\exp(ax)}{dx} = a \cdot \exp(ax) \quad (3)$$

Πρόβλημα 2ο

Μια δεύτερη μορφή της σιγμοειδούς συνάρτησης ορίζεται ως εξής:

$$\varphi(\upsilon) = \frac{1-\exp(-\alpha\upsilon)}{1+\exp(-\alpha\upsilon)} = \tanh\left(\frac{\alpha\upsilon}{2}\right),$$

όπου με tanh συμβολίζεται η υπερβολική εφαπτομένη. Η δεύτερη αυτή μορφή της σιγμοειδούς συνάρτησης κυμαίνεται μεταξύ των τιμών –1 και +1. Δείξτε ότι η παράγωγος $\varphi(\upsilon)$ ως προς το υ δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\varphi'(\upsilon) = \frac{d\varphi}{d\upsilon} = \frac{\alpha}{2}\left[1-\varphi^2(\upsilon)\right].$$

Ποια είναι η τιμή της παραγώγου για υ=0; Θεωρήστε ότι η παράμετρος α τείνει στο άπειρο. Ποια είναι η μορφή που παίρνει η $\varphi(\upsilon)$;

<u>Λύση</u>

$$\varphi(u) = \frac{1-\exp(-au)}{1+\exp(-au)} = \tanh\left(\frac{au}{2}\right)$$

$$\varphi'(u) = \frac{d}{dx}\cdot\tanh\left(\frac{au}{2}\right) \underset{=\!=}{\overset{*(1)}{}} \sec h^2\left(\frac{au}{2}\right)\cdot\frac{a}{2} = \frac{a}{2}\cdot\left[1-\tanh^2\left(\frac{au}{2}\right)\right] \underset{=\!=}{\overset{*(2)}{}} \frac{a}{2}\cdot\left(1-\varphi^2(u)\right)$$

Για u=0 έχω $\varphi(u)=0$ άρα $\varphi'(u)=\frac{a}{2}$

Για $\alpha \to \infty$:

$$\varphi(u) = \begin{cases} 1 & ,u>0 \\ 0 & ,u=0 \\ -1 & ,u<0 \end{cases} = \operatorname{sgn}(u)$$

Όπου **tanh** : Υπερβολική εφαπτομένη

sech : Υπερβολική συνεφαπτομένη

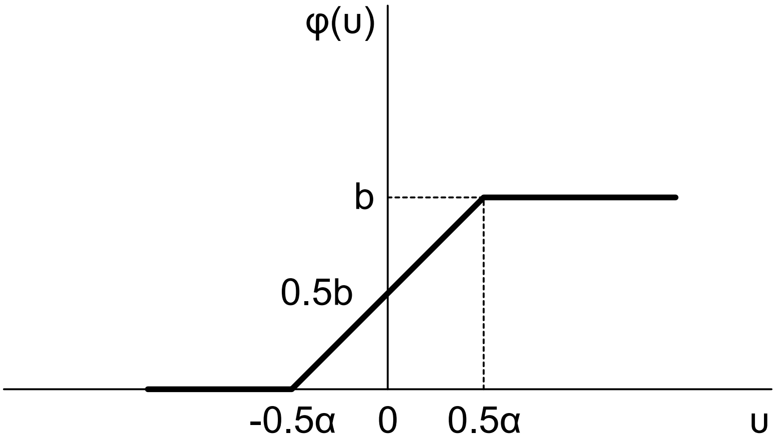
$$* \ \frac{d}{dx}\tanh(x) \ = \ \sec h^2(x) \quad (1)$$

$$\sec h^2(x) + \tanh^2(x) = 1 \quad (2)$$

Πρόβλημα 3ο

Θεωρείστε τη συνάρτηση του παρακάτω σχήματος:

1. Δώστε ένα τύπο που να περιγράφει τη συνάρτηση $\varphi(\upsilon)$ ως προς το υ.
2. Τι μορφή παίρνει η $\varphi(\upsilon)$ εάν το α τείνει προς το 0;



<u>Λύση</u>

1)

$$\varphi(u) = \begin{cases} b & ,u > 0.5a \\ \frac{b}{a}(u+0.5a) \quad {}^{*(1)} & ,-0.5a < u < 0.5a \\ 0 & ,u < -0.5a \end{cases}$$

2) $a \to 0$

$$\varphi_{a\to o}(u) = \begin{cases} b & ,u > 0 \\ \frac{b}{2} \quad {}^{*(2)} & ,u = 0 \\ 0 & ,u < 0 \end{cases}$$

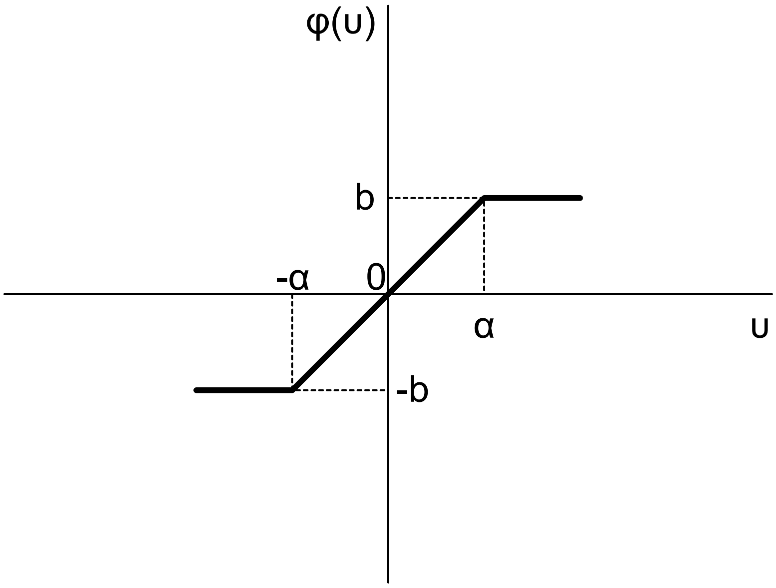
*

(1) Βρίσκουμε $y = \frac{b}{a}\cdot u + 0.5\cdot b = \frac{b}{a}(u + 0.5a)$

(2) $\varphi(u) = \frac{b}{a}(u + 0.5a) \underset{=\!=}{u=0} \frac{b}{2}$

*Πρόβλημα 4^ο^*

Επαναλάβετε τα ερωτήματα του προβλήματος 3 για τη συνάρτηση του παρακάτω σχήματος:



<u>Λύση</u>

1)

$$\varphi(u) = \begin{cases} b & ,u > a \\ \frac{b}{a}u & ,-a < u < a \\ -b & ,u < -a \end{cases}$$

3) $a \to 0$

$$\varphi_{a\to 0}(u) = \begin{cases} b & ,u > 0 \\ 0 & ,u = 0 \\ -b & ,u < 0 \end{cases}$$

*Πρόβλημα 5^ο^*

Βρείτε τον αριθμό των συνάψεων για τα παρακάτω δίκτυα:

1. Ένα πλήρως διασυνδεδεμένο εμπρός τροφοδότησης δίκτυο με 10 νευρώνες εισόδου, ένα επίπεδο με 4 κρυφούς νευρώνες και 2 νευρώνες εξόδου.
2. Ένα εμπρός τροφοδότησης δίκτυο με 10 νευρώνες εισόδου, ένα επίπεδο με 4 κρυφούς νευρώνες και 2 νευρώνες εξόδου, όπου κάθε νευρώνας του κρυφού επιπέδου δέχεται είσοδο από 6 νευρώνες εισόδου και κάθε νευρώνας εξόδου δέχεται είσοδο από 3 νευρώνες του κρυφού επιπέδου.

Λύση

1.

Πλήρως συνδεδεμένο εμπρός τροφοδότηση δίκτυο :

α) Όλοι οι νευρώνες εισόδου τροφοδοτούν τους νευρώνες στο κρυφό επίπεδο

β) Όλοι οι νευρώνες στο κρυφό επίπεδο τροφοδοτούν όλους τους νευρώνες εξόδου

γ) Δεν υπάρχει ανάδραση

Από τα παραπάνω έχουμε:

Από (α) $10 \cdot 4 = 40$ συνάψεις

Από (β) $4 \cdot 2 = 8$ συνάψεις

Άρα έχουμε σύνολο 48 συνάψεις

2.

(α) Κάθε νευρώνας του κρυφού επιπέδου δέχεται είσοδο από 6 νευρώνες επιπέδου άρα $4 \cdot 6 = 24$ συνάψεις

(β) Κάθε νευρώνας εξόδου δέχεται είσοδο από 3 νευρώνες κρυφού επιπέδου άρα $2 \cdot 3 = 6$ συνάψεις

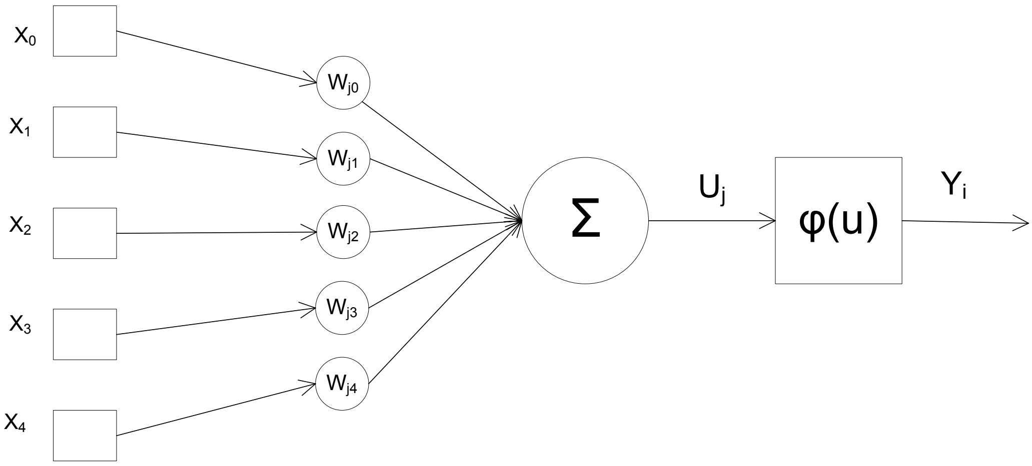
Συνεπώς, από (α) και (β) έχουμε 24+6=30 συνάψεις

Πρόβλημα 6^o

Ένας νευρώνας j δέχεται είσοδο από 4 άλλους νευρώνες των οποίων τα επίπεδα ενεργοποίησης είναι 10, -20, 4 και –2. τα αντίστοιχα συναπτικά βάρη του νευρώνα j είναι 0.8, 0.2, -1.0 και –0.9. Υπολογίστε την έξοδο του νευρώνα j καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Ο νευρώνας είναι γραμμικός.
2. Ο νευρώνας ακολουθεί το McCulloch-Pitts μοντέλο.
3. Ο νευρώνας έχει ως συνάρτηση ενεργοποίησης τη σιγμοειδή $\varphi(\upsilon) = \dfrac{1}{1+\exp(-\alpha\upsilon)}$.

<u>Λύση</u>



X0 = -1	Wj0 = 0
X1 = 10	Wj0 = 0.8
X2 = -20	Wj0 = 0.2
X3 = 4	Wj0 = -1.0
X4 = -2	Wj0 = -0.9

$$u_j = \sum_{i=0}^{4} x_i \cdot w_{ji} = (-1\cdot 0) + (10\cdot 0.8) + (-20\cdot 0.2) + (4\cdot(-1.0)) + (-2\cdot(-0.8)) = 0 + 8 - 4 - 4 + 1.8 = 1.8$$

1. Γραμμικός: $\varphi(u) = u$ άρα y_i **= 1.8**

2. McCulloch – Pits: $\varphi(u) = \begin{cases} +1 & u \geq 0 \\ 0 & u < 0 \end{cases}$ άρα y_i **= 1**

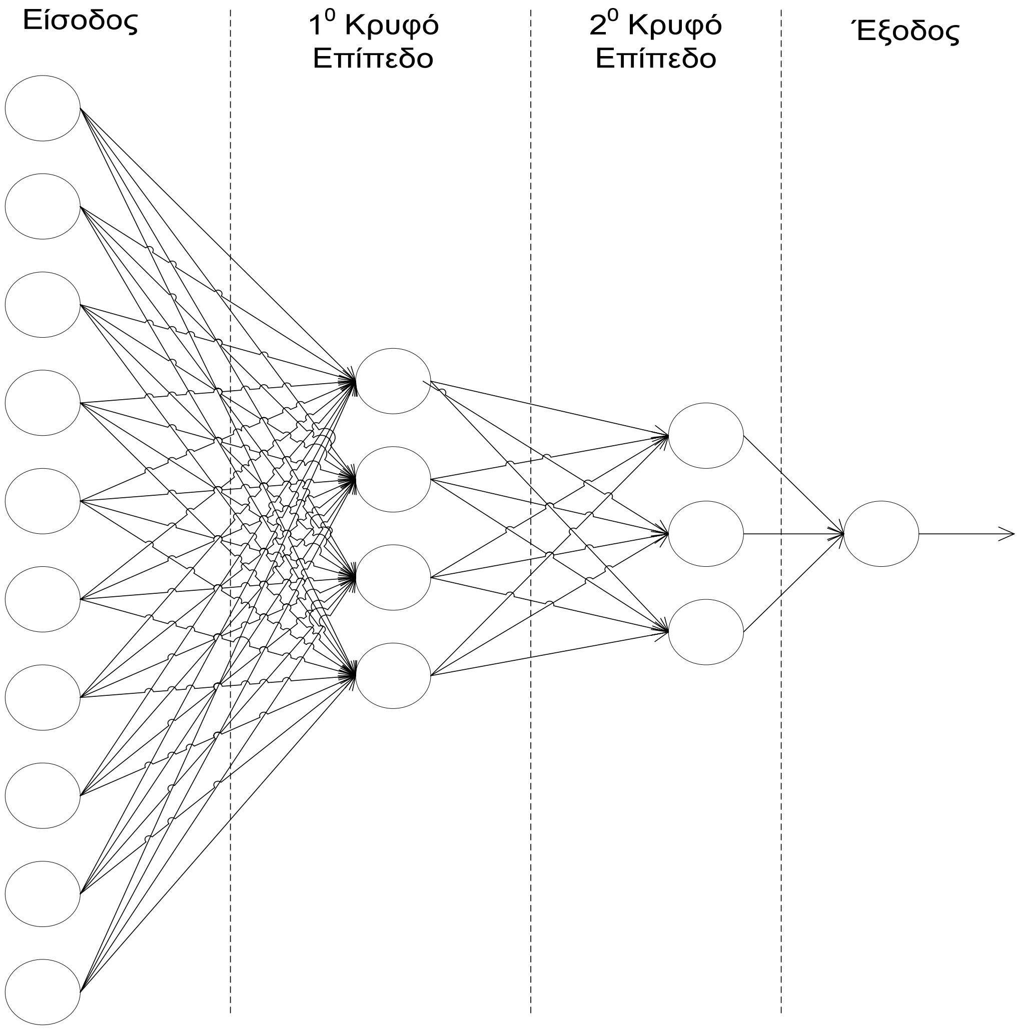
3. Σιγμοειδή συνάρτηση ενεργοποίησης: $\varphi(u) = \dfrac{1}{1+\exp(-u)}$

$$\text{άρα} \quad y_i = \frac{1}{1+\exp(1.8)} = \frac{1}{1+0.165} = 0.858$$

Πρόβλημα 7^o

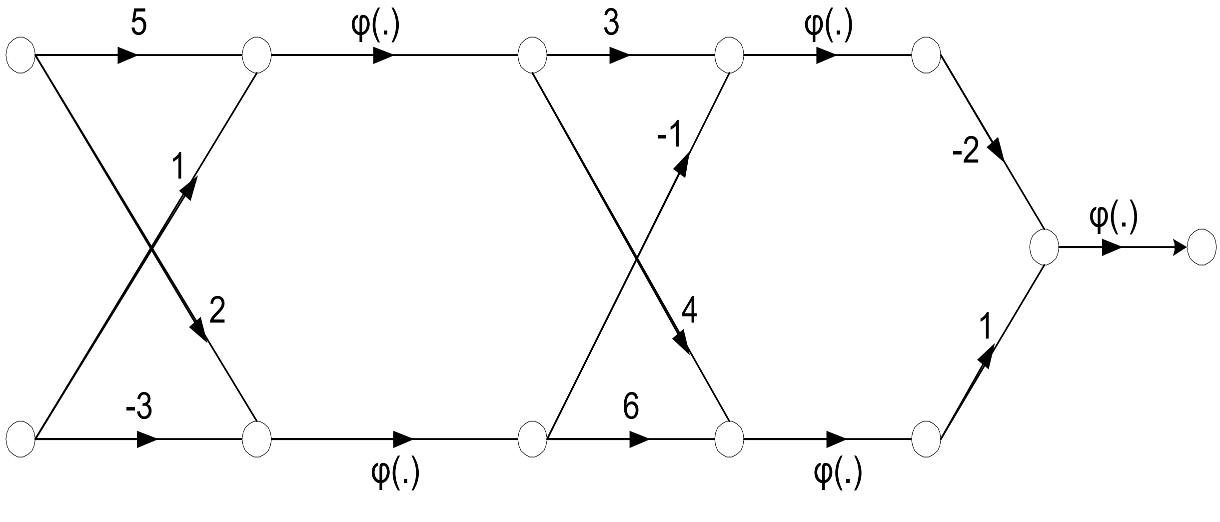
Ένα πλήρως διασυνδεδεμένο εμπρός τροφοδότησης δίκτυο έχει 10 νευρώνες εισόδου, 2 κρυφά επίπεδα με 4 και 3 νευρώνες αντίστοιχα και 1 νευρώνα εξόδου. Σχεδιάστε την αρχιτεκτονική αυτού του δικτύου.

<u>Λύση</u>



Πρόβλημα 8°

1. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το γράφημα ροής σήματος ενός 2-2-2-1 εμπρός τροφοδότησης δικτύου. Η συνάρτηση φ(·) υποδηλώνει τη σιγμοειδή συνάρτηση. Γράψτε τις εξισώσεις εισόδου-εξόδου για όλους τους νευρώνες του δικτύου.
2. Το δίκτυο του σχήματος δεν έχει κατώφλια. Θεωρήστε ότι εφαρμόζονται κατώφλια ίσα με +1 και –1 στον πάνω και κάτω νευρώνα αντίστοιχα του πρώτου κρυφού επιπέδου και κατώφλια ίσα με –1 και +2 στον πάνω και κάτω αντίστοιχα νευρώνα του δεύτερου κρυφού επιπέδου. Γράψτε τις εξισώσεις εισόδου-εξόδου για όλους τους νευρώνες του δικτύου.



<u>Λύση</u>

1.

Δηλώνουμε με νούμερο σε παρένθεση πάνω δεξιά από την συνάρτηση σε πιο κρυφό επίπεδο ανήκει, δηλ. $U_1^{(1)}$ και $U_2^{(1)}$ είναι οι αποκρίσεις του πρώτου επιπέδου.

Για το Νευρωνικό Δίκτυο του σχήματος έχουμε:

$U_1^{(1)} = 5x_1 + x_2$ $\qquad y_1^{(1)} = \varphi(U_1^{(1)})$

$U_2^{(1)} = 2x_1 - 3_2$ $\qquad y_2^{(1)} = \varphi(U_2^{(1)})$

$U_1^{(2)} = 3y_1^{(1)} - y_2^{(1)}$ $\qquad y_1^{(2)} = \varphi(U_1^{(2)})$

$U_2^{(2)} = 4y_1^{(1)} + 6y_2^{(1)}$ $\qquad y_2^{(2)} = \varphi(U_2^{(2)})$

$U^{(3)} = -2y_1^{(2)} + y_2^{(2)}$ $\qquad y^{(3)} = y = \varphi(U^{(3)})$

2.

Με κατώφλι:

$U_1^{(1)} = 5x_1 + x_2 - 1$ $\quad y_1^{(1)} = \varphi(U_1^{(1)})$

$U_2^{(1)} = 2x_1 - 3_2 + 1$ $\quad y_2^{(1)} = \varphi(U_2^{(1)})$

$U_1^{(2)} = 3y_1^{(1)} - y_2 + 1$ $\quad y_1^{(2)} = \varphi(U_1^{(2)})$

$U_2^{(2)} = 4y_1^{(1)} + 6y_2^{(1)} - 2$ $\quad y_2^{(2)} = \varphi(U_2^{(2)})$

$U^{(3)} = -2y_1^{(2)} + y_2^{(2)}$ $\quad y^{(3)} = y = \varphi(U^{(3)})$