Κεφάλαιο 6: Θεωρία Παιγνίων

6.1 Εισαγωγή

Η Θεωρία παιγνίων ασχολείται με αποφάσεις, υπό αβέβαιες συνήθως συνθήκες, όπου εμπλέκονται δύο ή και περισσότεροι νοήμονες «αντίπαλοι», και όπου ο καθένας τους φιλοδοξεί να βελτιστοποιήσει την δική του απόφαση εις βάρος των άλλων ή σε συνεργασία με άλλους, διαμορφώνοντας ίσως συνασπισμούς. Εφόσον συμμετέχουν τουλάχιστον δύο παίκτες με τουλάχιστον δύο στρατηγικές ο καθένας με αντίθετα συμφέροντα, το αποτέλεσμα για κάθε παίκτη καθορίζεται από τις συνδυασμένες επιλογές όλων των παικτών και δίνεται από τον πίνακα αποτελεσμάτων του παιγνίου. Ονομάζουμε λοιπόν παίγνιο την κατάσταση σύγκρουσης ή ανταγωνισμού ή και συνεργασίας μεταξύ των αντιπάλων ή μεταξύ των ομάδων των αντιπάλων.

6.1.1 Ιστορική αναδρομή

Η αρχική ανάπτυξη της θεωρίας παιγνίων αποδίδεται στον John von Neumann (1928), ο οποίος μελετώντας το αντικείμενο αυτό ανακάλυψε και όρισε την σχέση της θεωρίας παιγνίων με τον γραμμικό προγραμματισμό. Αργότερα ο George B. Dantzig ανέπτυξε την θεωρία Simplex του γραμμικού προγραμματισμού και έτσι δόθηκε η δυνατότητα να επιλυθούν πολλά προβλήματα της θεωρίας παιγνίων. Στην συνέχεια με την πολύτιμη προσφορά του αμερικάνου μαθηματικού Nash αναπτύχθηκε πιο πολύ η θεωρία παιγνίων. Για την εργασία του αυτή ο αμερικάνος μαθηματικός τιμήθηκε με το βραβείο Nobel οικονομίας. Σε μια ειδική κατηγορία της θεωρίας παιγνίων, τα παίγνια με συνεργασία, πολύτιμη ήταν η προσφορά του Shapley. Τέλος ο Lemke, με την ανάπτυξη του ομώνυμου αλγόριθμου, έκανε το πρώτο βήμα στην ανακάλυψη αλγορίθμων που χρησιμοποιούνται για την επίλυση παιγνίων. Συγκεκρινένα στην αμερικάνικη ταινία “Beautiful Mind” ο ηθοποιός Russell Crow υποδύεται τον John Nash και εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι ενώ ανακάλυψε το Nash Equilibrium εντούτοις έχασε τη δική του ψυχική ισορροπία!

6.1.2 Βασικά χαρακτηριστικά

Ο όρος «Θεωρία παιγνίων» παραπέμπει σε επιτραπέζια παίγνια, όπως το σκάκι, το τάβλι, τα χαρτιά κ.λ.π., διότι από μαθηματικής άποψης η μελέτη αυτών των παιγνίων μοιάζει με την μελέτη των περιστάσεων όπου λαμβάνονται σοβαρές οικονομικές, πολιτικές, στρατιωτικές ή άλλες αποφάσεις από περισσότερος από ένα αποφασίζοντα. Πιο αναλυτικά σε κάθε παίγνιο ο κάθε αντίπαλος αναφέρεται ως παίκτης . Κάθε παίκτης έχει στην διάθεση του έναν αριθμό, πεπερασμένο ή άπειρο, επιλογών, που αναφέρονται ως στρατηγικές. Τα αποτελέσματα ενός παιγνίου διατυπώνονται ως συναρτήσεις απώλειας ή συναρτήσεις κέρδους ή αμοιβής, μια για κάθε παίκτη, που όμως επηρεάζονται από τις αποφάσεις των άλλων παικτών. Ένα παίγνιο χαρακτηρίζεται από μια συλλογή κανόνων που το διέπουν και που είναι γνωστοί σε όλους τους παίκτες. Οι κανόνες αυτοί ορίζουν τι μπορεί και τι δεν μπορεί να κάνει ένας παίκτης. Οι ίδιοι κανόνες ορίζουν επίσης και τις αμοιβές ή απώλειες που απορρέουν από τις επιλογές των παικτών. Μία κίνηση είναι ένα σημείο του παιγνίου στο οποίο οι παίκτες πρέπει να κάνουν επιλογές ανάμεσα στις διαθέσιμες κάθε φορά. Ένα σύνολο κινήσεων και επιλογών αποτελεί ένα «παίξιμο» του παιγνίου. Οι στρατηγικές είναι κεντρική έννοια στα παίγνια, τα οποία συχνά αναφέρονται ως παίγνια στρατηγικής. Μια στρατηγική μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα σύνολο αποφάσεων που διατυπώνεται πριν το «παίξιμο» και που ορίζει λεπτομερώς τις επιλογές που γίνονται σε κάθε δυνατή περίπτωση.

6.1.3 Ταξινόμηση παιγνίων

Τα παίγνια ταξινομούνται συχνά σε διάφορα είδη μέσω ποικίλων κριτηρίων. Εδώ θα προσπαθήσουμε να δώσουμε κάποιες κατηγορίες. Αρχικά ένα βασικό κριτήριο, βάσει του οποίου μπορούμε να ταξινομήσουμε ένα παίγνιο είναι ο αριθμός των παικτών που συμμετέχουν. Αν λοιπόν συμμετέχουν δύο παίκτες τα παίγνια ονομάζονται «παίγνια δύο παικτών» , ενώ εάν συμμετέχουν n παίκτες έχουμε τα «παίγνια n παικτών» , όπου n>2. Η παρουσία δύο παικτών είναι η ελάχιστη απαίτηση για να έχουμε φαινόμενα ανταγωνισμού και συνεργασίας. Η παρουσία τριών ή περισσότέρων παικτών οδηγεί περαιτέρω και στην δυνατότητα σχηματισμού συνασπισμών. Όπου μια ομάδα από δύο ή περισσότερους παίκτες ενώνουν τα ενδιαφέροντα τους και συναρμονίζουν τις στρατηγικές τους. Έτσι έχουμε «παίγνια με ή άνευ συνεργασίας», μια ταξινόμηση που βασίζεται στο κατά πόσο οι παίκτες πριν παίξουν το παίγνιο μπορούν να μορφώσουν συνασπισμούς και να επιτύχουν δεσμευτικές συμφωνίες για τις στρατηγικές.
Ακόμη μπορούμε να ταξινομήσουμε τα παίγνια σύμφωνα με το εάν η σειρά που λαμβάνονται οι αποφάσεις παίζει ρόλο ή όχι. Έτσι έχουμε τα «δυναμικά» παίγνια όπου η σειρά με την οποία λαμβάνονται οι αποφάσεις παίζει ρόλο και τα «στατικά» παίγνια, στα οποία η σειρά με τη οποία ο παίκτης παίρνει τις αποφάσεις, δεν έχει σημασία.
Επιπλέον, ο αριθμός στρατηγικών ταξινομεί τα παίγνια σε «πεπερασμένα» και σε «μη-πεπερασμένα» ή σε απειροπαίγνια. Επειδή οι αμοιβές ή οι απώλειες δύο παικτών, με πεπερασμένο αριθμό στρατηγικών, μπορούν να διαταχθούν σε πίνακες ή μήτρες, τα παίγνια αυτά είναι γνωστά ως μητρικά ή πινακοπαίγνια.
Ένας άλλος τρόπος ταξινόμησης των παιγνίων είναι ως προς τα χαρακτηριστικά των συναρτήσεων αμοιβής ή απώλειας. Έτσι σε παίγνια δύο παικτών, όπου η αμοιβή του ενός είναι ίση με και προέρχεται από την απώλεια του άλλου, οι παίκτες βρίσκονται σε σύγκρουση και οποιαδήποτε συνεργασία είναι ανέφικτη. Τα παίγνια αυτά ονομάζονται παίγνια «μηδενικού αθροίσματος» αφού το άθροισμα των αμοιβών είναι μηδενικό.
Στα παίγνια γενικού μη- μηδενικού αθροίσματος, υπάρχουν συνήθως στοιχεία ανταγωνισμού όσο και συνεργασίας. Έχουμε δύο ακραίες περιπτώσεις. Στην ειδική περίπτωση παιγνίων μη-μηδενικού αθροίσματος οι παίκτες βρίσκονται σε σύγκρουση και η αμοιβή του ενός σημαίνει απώλεια για τον άλλον, ενώ στην ειδική περίπτωση παιγνίων σταθερής διαφοράς, οι παίκτες πρέπει να συνεργασθούν διότι είτε κερδίζουν είτε χάνουν μαζί.
Τέλος υπάρχει και μια ακόμη κατηγορία παιγνίων η οποία καθορίζεται από το εάν ο κάθε παίκτης επιλέγει διακριτές στρατηγικές. Πιο συγκεκριμένα, εάν ο παίκτης επιλέγει διακριτές στρατηγικές (π.χ ή την 1 ή την 2,…) λέμε ότι ο παίκτης παίζει με καθαρή στρατηγική, οπότε και αυτού του είδους τα παίγνια ονομάζονται παίγνια «καθαρής στρατηγικής». Στην αντίθετη περίπτωση, οπού ο κάθε παίκτης είναι δυνατόν να επιλέξει έναν συνδυασμό στρατηγικών, λέμε ότι έχουμε παίγνια «μικτής στρατηγικής».

6.1.4 Τρόποι περιγραφής και ανάλυσης των παιγνίων

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι περιγραφής και ανάλυσης των παιγνίων. Λέμε ότι το παίγνιο είναι σε εκτεταμένη μορφή όταν οι κανόνες που διέπουν το παίγνιο περιγράφεται μέσω ενός δένδρου, του δένδρου παιγνίου, όπου οι κινήσεις δηλώνονται ως κλάδοι και οι παίκτης που έχει σειρά για να κάνει μια κίνηση ως κορυφή ή κόμβος. Παριστάνονται επίσης, οι πληροφορίες και οι επιλογές που είναι στην διάθεση των παικτών, όπως και οι τελικές αμοιβές ή απώλειες όλων των παικτών στο τέλος του «παιξίματος».

Ένα παίγνιο σε εκτεταμένη μορφή είναι τέλειας πληροφόρησης εάν δεν γίνονται ταυτόχρονες κινήσεις και για κάθε κίνηση όλοι οι παίκτες γνωρίζουν τις επιλογές που έγιναν σε όλες τις προηγούμενες κινήσεις, έστω και αν οι κινήσεις ήταν τυχαίες. Το σκάκι είναι παράδειγμα παιγνίου τέλειας πληροφόρησης, ενώ το πόκερ δεν είναι. Η εκτεταμένη μορφή των παιγνίων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην ανάπτυξη προγραμμάτων υπολογιστών που παίζουν επιτραπέζια παιχνίδια, όπως σκάκι και τάβλι.

Ένας δεύτερος τρόπος περιγραφής παιγνίου απαιτεί την θεώρηση όλων των δυνατών στρατηγικών κάθε παίκτη και γίνεται μέσω της δήλωσης των αμοιβών ή απωλειών των παικτών, οι οποίες είναι αποτέλεσμα όλων των εναλλακτικών συνδυασμών των στρατηγικών που επιλέγουν. Έτσι, π.χ. τα πεπερασμένα παίγνια δύο παικτών περιγράφονται συνήθως με την βοήθεια δύο μητρών (πινάκων) και τότε μιλάμε για τα δι-μητρικά παίγνια ή δι- πινακοπαίγνια. Οι μήτρες αυτές παρουσιάζουν μέσω των στοιχείων τους την αμοιβή ή την απώλεια των παικτών κάθε ζεύγους στρατηγικών, όπου οι στρατηγικές του ενός αντιστοιχούν στις γραμμές των πινάκων, ενώ οι στρατηγικές του άλλου στις στήλες.

Δεν είναι απαραίτητο να περιγράψουμε ένα παίγνιο αποκλειστικά με την βοήθεια μητρών. Εάν, π.χ ο αριθμός των στρατηγικών του κάθε παίκτη δεν είναι πεπερασμένος, τότε οι στρατηγικές αυτές θα μπορούσαν να περιγραφούν σαν στοιχεία κάποιου συνόλου, ενώ οι αμοιβές ή οι απώλειες των παικτών θα μπορούσαν να εκφρασθούν σαν πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων των στρατηγικών. Όταν η περιγραφή ενός παιγνίου γίνεται με αυτό τον τρόπο λέμε ότι το παίγνιο είναι σε κανονική μορφή. Σε αυτή την μορφή, ο δυναμικός χαρακτήρας των παιγνίων υποβαθμίζεται. Έχουμε δηλαδή παίγνια ενός «παιξίματος», όπου οι παίκτες ενεργούν μόνο μια φορά και χωρία κάποια εξαρτούμενη σειρά αποφάσεων. Παίγνια με αυτή την μορφή είναι με άλλα λόγια στατικά. Τα παίγνια σε κανονική μορφή είναι συνήθως πιο κατάλληλα στην περιγραφή περίπλοκων πραγματικών εφαρμογών της αγοράς, της οικονομίας κ.α. Είναι επίσης πιο κατάλληλα για την θεωρητική και αλγοριθμική μελέτη, ιδίως στην περίπτωση που τα σύνολα των στρατηγικών δεν είναι πεπερασμένα.

6.2 Παίγνια μηδενικού αθροίσματος

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ονομάζουμε παίγνια μηδενικού αθροίσματος, τα παίγνια εκείνα όπου η απώλεια του ενός παίκτη είναι η αμοιβή του άλλου, οπότε το άθροισμα τους είναι μηδέν. Φυσικά, τα ενδιαφέροντα των παικτών σ' ένα τέτοιο παίγνιο είναι εντελώς αντίθετα και βρίσκονται σε σύγκρουση. Επομένως, δεν υπάρχει περίπτωση συνεργασίας των παικτών.

6.2.1 Η Περίπτωση καθαρής στρατηγικής

Η βασική υπόθεση στην θεωρία αυτή είναι:

«Κάθε παίκτης επιλέγει μια στρατηγική που την δίνει την δυνατότητα να επιτύχει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα, δεδομένου ότι ο αντίπαλος γνωρίζει την στρατηγική που αυτός ακολουθεί».

Παράδειγμα:
Έστω ότι έχουμε το παίγνιο μεταξύ δύο παικτών Ι και ΙΙ που παίζεται σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:
Σε κάθε τετράγωνο φαίνεται η ωφέλεια που θα έχει ο παίκτης Ι εάν επιλέξει τη στρατηγική που αντιστοιχεί σε αυτή τη γραμμή και ο αντίπαλός του (ΙΙ) επιλέξει τη στρατηγική που αντιστοιχεί σε αυτή τη στήλη. Στόχος του κάθε παίκτη είναι με δεδομένη την επιλογή του αντιπάλου του να επιλέξει την ενέργεια που θα του αποφέρει την μεγαλύτερη ωφέλεια ή την μικρότερη ωφέλεια στον αντίπαλό του.

		ΙΙ			
		1	2	3	4
Ι	1	8	2	9	5
	2	6	5	7	18
	3	7	3	-4	10

Αν ο παίκτης Ι επιλέξει την στρατηγική 1, τότε σύμφωνα με την παραπάνω βασική υπόθεση, ο παίκτης ΙΙ θα πρέπει να επιλέξει την στρατηγική 2, για να κρατήσει την ωφέλεια του πρώτου παίκτη σε όσο το δυνατόν χαμηλότερα επίπεδα. Όμοια αν ο πρώτος παίκτης επιλέξει την στρατηγική 2, ο δεύτερος παίκτης θα πρέπει να επιλέξει την στρατηγική 2 και αν τέλος ο πρώτος παίκτης επιλέξει την στρατηγική 3, τότε ο δεύτερος παίκτης θα επιλέξει την στρατηγική 3. Ενώ στις δύο πρώτες περιπτώσεις ο δεύτερος παίκτης προσπαθεί να έχει εκείνος λιγότερες απώλειες και έτσι ο πρώτος παίκτης να έχει λιγότερες ωφέλειες, στην τρίτη περίπτωση παρατηρούμε ότι χάνει ο πρώτος παίκτης και έχει ωφέλειες ο δεύτερος παίκτης.

Έτσι λοιπόν στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε ποιες είναι οι δυνατές ωφέλειες του Ι παίκτη αν παίξει πρώτος αυτός και επίσης βλέπουμε την maxmin τιμή, που είναι η υψηλότερη τιμή/αμοιβή που ο παίκτης Ι μπορεί να πάρει στα σίγουρα επιλέγοντας κάποια συγκεκριμένη ενέργεια. Αντίστοιχα, η minmax είναι η χαμηλότερη τιμή στην οποία μπορεί να τον περιορίσει ο αντίπαλός του.

		ΙΙ					
		1	2	3	4	min γραμμής	
Ι	1	8	2	9	5	2	
	2	6	5	7	18	5	maxmin τιμή=5

3	7	3	-4	10	-4

Αν τώρα παίξει πρώτος ο ΙΙ παίκτης έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

		II					
		1	2	3	4	min γραμμής	
I	1	8	2	9	5	2	
	2	6	5	7	18	5	maxmin τιμή=5
	3	7	3	-4	10	-4	
max στήλης		8	5	9	18		
		minmax τιμή = 5					

Από τον οποίο βλέπουμε ότι αν ο παίκτης ΙΙ θέλει να ελαχιστοποιήσει την απώλεια του θα επιλέξει την στρατηγική 2. Έτσι, η minmax τιμή είναι 5 και δηλώνει την ανώτερη τιμή ή απώλεια που ο παίκτης ΙΙ δύναται να χάσει.

Η κατώτερη τιμή (maxmin τιμή) του πρώτου παίκτη και η ανώτερη τιμή (minmax τιμή) του δεύτερου είναι συντηρητικές τιμές και αποτελούν κατά κάποιο τρόπο τα επίπεδα ασφαλείας των δύο παικτών.

Όπως είδαμε παραπάνω, ο πρώτος παίκτης θα αμειφθεί με τουλάχιστον 5 μονάδες, ενώ ο παίκτης ΙΙ θα χάσει το πολύ 5 μονάδες. Επομένως το μόνο λογικό αποτέλεσμα που περιμένουμε να δούμε είναι όντως ο Ι παίκτης να κερδίσει 5 μονάδες και ο ΙΙ παίκτης να χάσει 5 μονάδες.

Το παραπάνω παράδειγμα έχει την ιδιότητα να ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη:

<u>maxmin τιμή= minmax τιμή</u>

Παίγνια αυτού του είδους, λέγεται ότι είναι αυστηρώς προσδιορισμένα, αφού η έκβαση τους είναι «προκαθορισμένη».

Ορισμός:

Ένα παίγνιο καθαρής στρατηγικής και μηδενικού αθροίσματος, στο οποίο συμμετέχουνε δύο παίκτες με πίνακα αμοιβής $A=[\alpha_{ij}]$ διαστάσεως m x n, λέμε ότι ικανοποιεί την συνθήκη σαγματικού σημείου αν και μόνο αν ισχύει:

$$\max_{i=1,\dots,m}\{\min_{j=1,\dots,n}\{a_{ij}\}\} = \min_{j=1,\dots,n}\{\max_{i=1,\dots,m}\{a_{ij}\}\}$$

ή αλλιώς, λέμε ότι ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με δύο παίκτες, οι οποίοι χρησιμοποιούν καθαρές στρατηγικές, επιδέχεται σαγματικό σημείο μόνο τότε όταν α=β, ή όταν

$$\max_{\sigma\tau o\acute{\iota}\chi\varepsilon\iota o}\{\min \gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta}\varsigma\} = \min_{\sigma\tau\acute{\eta}\lambda\varepsilon\varsigma}\{\max \sigma\tau\acute{\eta}\lambda\eta\varsigma\}$$

Αν έχουμε έναν πίνακα Α, λέμε ότι το στοιχείο α_{pq} αντιστοιχεί σε ένα «σαγματικό σημείο» του Α, αν είναι ταυτόχρονα ελάχιστο στοιχείο της γραμμής p και ελάχιστο σημείο της στήλης q, δηλαδή αν ισχύει:

$\alpha_{pj} \geq \alpha_{pq} \quad \forall j$

και

$\alpha_{iq} \leq \alpha_{pq} \quad \forall I$

Υπάρχουν παίγνια καθαρής στρατηγικής και μηδενικού αθροίσματος, που συμμετέχουνε δύο παίκτες, στα οποία δεν υπάρχει σαγματικό σημείο. Παρόλαυτα ισχύει πάντα η ανισότητα:

$\alpha \leq \beta$ ή maxminτιμή ≤ minmaxτιμή

Πιο γενικά η τιμή του παιγνίου πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη:

$\alpha \leq u \leq \beta$ ή maxminτιμή ≤ τιμή του παιγνίου ≤ minmaxτιμή

Σε ένα παίγνιο έχουμε σημείο ισορροπίας ή σαγματικό στοιχείο όταν ισχύει η ισότητα στην παραπάνω σχέση. Αν σε ένα παίγνιο δεν έχουμε σημείο ισορροπίας, τότε δεν ξέρουμε τι μπορεί να συμβεί, όμως αν επανέλθουμε στο προηγούμενο παράδειγμα μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι ο παίκτης Ι δεν θα κερδίσει ποσό μικρότερο της maxmin τιμής και ο παίκτης ΙΙ δεν θα χάσει ποσό μεγαλύτερο την minmax τιμής.

Θεώρημα :

Αν ένας πίνακας Α έχει σαγματικό σημείο (p,q) $\Leftrightarrow$ $\alpha=\beta=\alpha_{pq}$.

Ποιο κριτήριο όμως πρέπει να επιλέξουμε για να πάρουμε μια απόφαση; Συνήθως η λογική που ακολουθούμε είναι να επιλέγουμε κάποιο κριτήριο με βάσει την διαθέσιμη σε μας πληροφορία. Στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος, όπου ο το κέρδος του ενός είναι ίσο με και προέρχεται από την απώλεια του άλλου, συνήθως λαμβάνομε τις αποφάσεις στηριζόμενοι στο minmax-maxmin κριτήριο. Βάσει αυτού του κριτηρίου, το οποίο χαρακτηρίζεται ως συντηρητικός τρόπος λήψεως απόφασης, κάθε παίκτης επιλέγει την στρατηγική που του επιφέρει την καλύτερη δυνατή έκβαση από το σύνολο των χειρότερων αποτελεσμάτων.

Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι έχουμε έναν πίνακα Α, ο οποίος έχει ένα σαγματικό στοιχείο. Υπολογίζουμε ότι ο παίκτης στοίχου, ακολουθεί την στρατηγική i, ενώ ο παίκτης στήλης ακολουθεί την στρατηγική j. Αν η γραμμή i έχει ένα σαγματικό σημείο (i,l), τότε $\alpha_{ij} \geq \alpha_{il} = \alpha$. Αν η γραμμή i δεν έχει κανένα σαγματικό σημείο, ενώ η στήλη j έχει κάποιο, έστω το α_{kj}, τότε $\alpha_{ij} \leq \alpha_{kj} = \alpha$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν ο παίκτης στοίχου επιλέξει μια στρατηγική που αντιστοιχεί σε γραμμή που περιέχει ένα σαγματικό σημείο, τότε μπορεί να εξασφαλίσει ένα κέρδος τουλάχιστον α, ενώ αν δεν επιλέξει μια τέτοια στρατηγική, ο παίκτης στήλης θα επιλέξει μια στρατηγική έτσι ώστε να περιορίσει το κέρδος του πρώτου παίκτη, το οποίο θα είναι σε αυτή την περίπτωση το πολύ α. Έτσι λοιπόν η πιο σωστή τακτική είναι ο παίκτης στοίχου να επιλέξει μια στρατηγική που θα απευθύνεται σε στοίχο που θα περιέχει σαγματικό σημείο και ο παίκτης στήλης να επιλέξει μια στρατηγική που θα απευθύνεται σε στήλη που θα περιέχει σαγματικό σημείο. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι το στοιχείο (i,j) είναι σαγματικό σημείο με τιμή α_{ij}.

Μία βέλτιστη λύση του παιγνίου ή αλλιώς μια ισορροπία εάν κανείς από τους παίκτες δεν επωφελείται από μονομερή μεταβολή της στρατηγικής του. Σε μια τέτοια περίπτωση, λέμε ότι το παίγνιο βρίσκεται σε μια κατάσταση ισορροπίας. Αν ο πίνακας του παιγνίου έχει σαγματικό σημείο, τότε η λύση του παιγνίου είναι:

- Ο παίκτης στοίχου επιλέγει μια στρατηγική που απευθύνεται σε γραμμή που περιέχει σαγματικό σημείο.
- Ο παίκτης στήλης επιλέγει μια στρατηγική που απευθύνεται σε στήλη που περιέχει σαγματικό σημείο.
- Η αμοιβή του παίκτη στοίχου και η απώλεια του παίκτη στήλης είναι α = β και αντίστροφα.
- Η αμοιβή του παίκτη στήλης και η απώλεια του παίκτη στοίχου είναι -α = -β.

Ο παρακάτω αλγόριθμος είναι ένας αλγόριθμος εύρεσης σημείου ισορροπίας σε παίγνια καθαρής στρατηγικής:

```
INPUT A=[aij}mxn
DO i=1,m
      R[i]= min A[i,:]
ENDDO
DO j=1,n
      C[j]=max A[:,j]
ENDDO
a= max R[:]; i= maxlocation R[:]
b= min C[:]; j= minlocation C[:]
IF a=b THEN
   u=a
   RETURN u,i,j
ELSE
    RETURN a,b,i,j
ENDIF
```

Όπου:

A[i,:] είναι η γραμμή i,

A[:,j] είναι η στήλη j

R[:] διάνυσμα διάστασης m

C[:] διάνυσμα διάστασης n.

6.2.2 Σημείο Ισορροπίας NASH (Nash Equilibrium)

<u>Ορισμός</u> : Ένα ζεύγος στρατηγικών (k.l) που αντιστοιχεί σε μια γραμμή k και την στήλη j, αποτελεί ένα «μη-συνεργατικό σημείο ισορροπίας Nash» για το διμητρικό παίγνιο με πίνακες απώλειας A και B, αν οι ανισότητες

$\alpha_{kl} \leq \alpha_{il}$

$b_{kl} \leq b_{kj}$

ισχύουν για κάθε i=1,…,m και για κάθε j=1,…,n.
Η τιμή $\alpha_0 = \alpha_{kl}$ είναι η απώλεια κατά Nash που έχει ο παίκτης στοίχου και η τιμή $\beta_0 = b_{kl}$ είναι η απώλεια κατά Nash που έχει ο παίκτης στήλης.

Φυσικά στην περίπτωση που οι πίνακες A, B είναι πίνακες κέρδους(αμοιβής), τότε ο ορισμός 6.1 ισχύει αλλά με την διαφορά ότι οι ανισότητες αντιστρέφονται.

Ο παρακάτω αλγόριθμος μας βοηθά στην εύρεση των σημείων ισορροπίας κατά Nash.

Βήμα 1^o: Υπογράμμισε τα ελάχιστα σημεία κάθε στήλης του πίνακα A.

Βήμα 2^o: Υπογράμμισε τα ελάχιστα σημεία κάθε γραμμής του πίνακα B.

Βήμα 3^o: Αν το παίγνιο έχει σημεία ισορροπίας κατά Nash αυτά θα είναι τα ζεύγη (i,j), τα οποία αντιστοιχούν στα στοιχεία α_{ij} και b_{ij}.

Αν στο παίγνιο που εξετάζουμε, οι πίνακες A, B είναι πίνακες κέρδους(αμοιβής), τότε στο πρώτο και στο δεύτερο βήμα του αλγορίθμου θα πρέπει να αναζητήσουμε τα μέγιστα στοιχεία γραμμής και στήλης αντίστοιχα.

<u>Παράδειγμα</u> :

Έστω ότι έχουμε το παίγνιο:

		II	
		1	2
I	1	(3,2)	(2,3)
	2	(4,1)	(1,0)

Αν εκτελέσουμε τον αλγόριθμο αναζήτησης σημείων ισορροπίας κατά Nash, θα βρούμε δύο σημεία ισορροπίας κατά Nash, το (1,1) και το (2,2), τα οποία αντιστοιχούν στα αποτελέσματα (3,2) και (1,0) αντίστοιχα.

Στο παράδειγμα αυτό παρατηρούμε ένα συχνά εμφανιζόμενο φαινόμενο, να παρουσιάζονται περισσότερα από ένα σημεία ισορροπίας κατά Nash και οι εκβάσεις να είναι διαφορετικές σε κάθε περίπτωση. Έτσι λοιπόν αν σε κάποιο παίγνιο έχουμε περισσότερα από ένα σημεία ισορροπίας θα πρέπει να βρούμε έναν τρόπο διάταξης αυτών των σημείων, έτσι ώστε να μπορούμε να βρούμε το καλύτερο δυνατό σημείο από αυτά, δηλαδή το σημείο ισορροπίας που θα επιφέρει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα στους παίκτες. Υπάρχουνε περιπτώσεις παιγνίων που είναι εμφανές πιο είναι το καλύτερο σημείο ισορροπίας (όπως στο παραπάνω παράδειγμα όπου το σημείο αυτό είναι το σημείο (1,0) αφού και οι δύο παίκτες σε αυτή την περίπτωση έχουνε την μικρότερη δυνατή απώλεια), όμως υπάρχουνε και παίγνια που δεν μπορούμε άμεσα να εντοπίσουμε το καλύτερο σημείο ισορροπίας κατά Nash ανάμεσα στο σύνολο όλων των σημείων ισορροπίας. Σε αυτές τις περιπτώσεις πρέπει διατάξουμε τα σημεία αυτά και τότε να επιλέξουμε το καλύτερο από αυτά. Παρόλαυτα υπάρχει το ενδεχόμενο να μην μπορούμε να έχουμε μια ολική διάταξη πολυδιάστασων σημείων και έτσι καταφεύγουμε σε μερική διάταξη του συνόλου και σύμφωνα με κάποιες συνθήκες που έχουνε οριστεί στο υπό εξέταση παίγνιο (διαφορετικές για κάθε παίγνιο), επιλέγουμε τελικά εκείνο το σημείο ισορροπίας που επιφέρει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα σε όλους τους παίκτες ή στην πλειοψηφία αυτών.

<u>Ορισμός</u> : Ένα ζεύγος στρατηγικών (k.l) καλείται « ατομικώς ευσταθές» αν είναι μη-συνεργατικό σημείο ισορροπίας.

ενώ

<u>Ορισμός</u> : Ένα ζεύγος στρατηγικών (k.l) καλείται « συλλογικά ασταθές» αν οι δύο παίκτες μπορούνε από κοινού να βρούνε ένα ζεύγος στρατηγικών (p,q) τέτοιο ώστε:

$$\alpha_{kl} \geq \alpha_{pq} \quad (6.1)$$

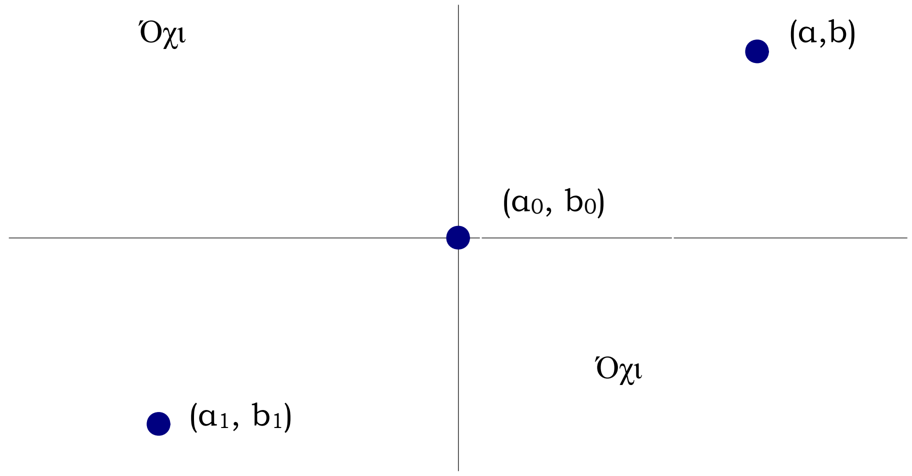
$$b_{kl} \geq b_{pq} \quad (6.2)$$

όπου μια τουλάχιστον ανισότητα είναι αυστηρή. Λέμε τότε ότι το ζεύγος (k.l) « κυριαρχείται» από το ζεύγος (p,q). Στην περίπτωση που οι πίνακες A, B είναι πίνακες αμοιβής τότε οι παραπάνω ανισότητες αντιστρέφονται.

<u>Ορισμός</u> : Ένα ζεύγος στρατηγικών (k.l) καλείται « συλλογικά ευσταθές» εάν δεν κυριαρχείται από κάποιο άλλο ζεύγος στρατηγικών. Τα συλλογικά ευσταθή ζεύγη στρατηγικών είναι « Pareto βέλτιστα» ή «Pareto αποτελεσματικά σημεία».

<u>****Κυριαρχία Pareto (Σημείωση).</u>

Έστω ότι έχουμε έναν διπλό πίνακα [A,B], τα στοιχεία του οποίου είναι τα ζεύγη (α_{ij}, b_{ij}). Έστω ότι (α,b), (α_0, b_0) και (α_1, b_1) είναι κάποια τυχαία στοιχεία του πίνακα [A,B]. Αν αυτά αντιπροσωπεύουν τα ζεύγη αμοιβών δύο παικτών ενός παιγνίου και $\alpha \geq \alpha_0$, όπως και $b \geq b_0$ (τουλάχιστον μια από τις ανισότητες ισχύει αυστηρά), λέμε ότι το ζεύγος (α,b) « κυριαρχεί» επί του ζεύγους (α_0, b_0). Όμοια αν τα στοιχεία του πίνακα είναι ζεύγη απωλειών και οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν , τότε λέμε ότι το ζεύγος (α_0, b_0) « κυριαρχεί» επί του ζεύγους (α,b).
Για παράδειγμα εάν έχουμε ένα παίγνιο το οποίο μπορεί να παρασταθεί γεωμετρικά ως εξής:



Σχήμα 6.1

και τα ζεύγη (α,b), (α_0, b_0) και (α_1, b_1) αντιστοιχούν σε αμοιβές, τότε λέμε ότι το ζεύγος (α,b) κυριαρχεί επί του ζεύγους (α_0, b_0), το οποίο στην συνέχει κυριαρχεί επί του ζεύγους (α_1, b_1). Αντίστροφα όμως αν τα ζεύγη(α,b), (α_0, b_0) και (α_1, b_1) αντιστοιχούν σε απώλειες για τους παίκτες, τότε λέμε ότι το ζεύγος (α_1, b_1) κυριαρχεί επί του ζεύγους (α_0, b_0), το οποίο στην συνέχει κυριαρχεί επί του ζεύγους (α,b). Για τα σημεία που αντιστοιχούν στους χώρους με το ΟΧΙ, δεν μπορεί να γίνει καμία σύγκριση, για να πούμε ποιο κυριαρχεί έναντι κάποιου άλλου.

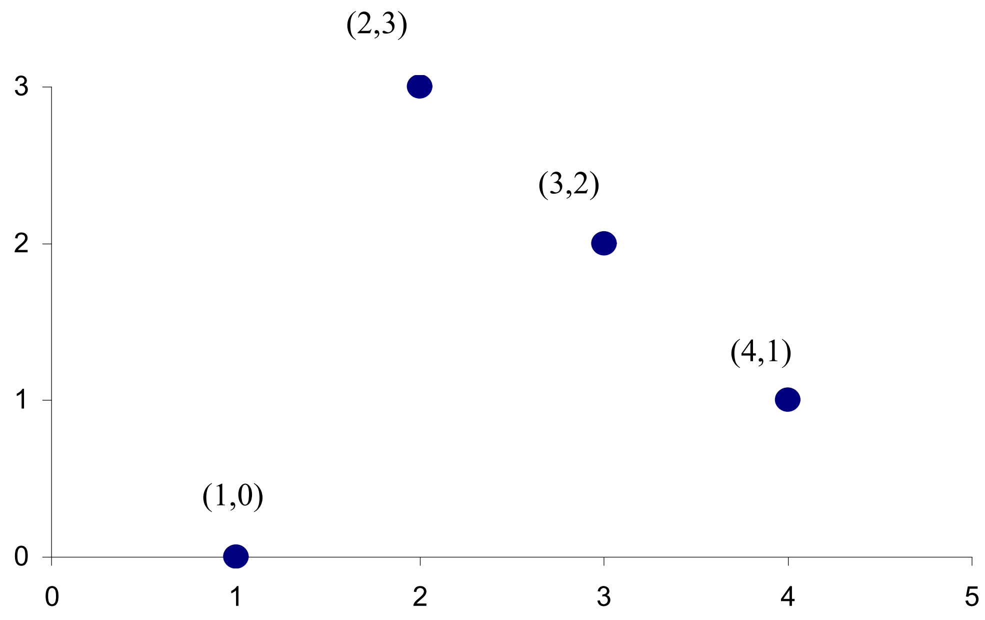
Αν για δύο σημεία (α_0, b_0) και (α_1, b_1) οι διαφορές $\alpha_0 - \alpha_1$ και $b_0 - b_1$ έχουνε διαφορετικό πρόσημο, δηλαδή $(\alpha_0 - \alpha_1)(b_0 - b_1) < 0$, τότε ούτε ($\alpha_0$, b_0) κυριαρχεί επί του ζεύγους (α_1, b_1), ούτε το (α_1, b_1) κυριαρχεί επί του ζεύγους (α_0, b_0). Όπως μπορούνε να δούμε από το σχήμα, όταν έχουμε σαν δεδομένο το σημείο (α_0, b_0) και θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε, τα σημεία που το κυριαρχούν βρίσκονται βορειοανατολικά του, ενώ όταν θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε, τα στοιχεία που το κυριαρχούν, βρίσκονται νοτιοδυτικά του.

Έτσι τα ζεύγη αμοιβής ενός πίνακα [Α,Β], τα οποία δεν κυριαρχούνται από κανένα άλλο ζεύγος αμοιβής ονομάζονται «Pareto μέγιστα». Ενώ τα ζεύγη απώλειας ενός πίνακα [Α,Β], τα οποία δεν κυριαρχούνται από κανένα άλλο ζεύγος απώλειας λέγονται «Pareto ελάχιστα». Τα Pareto μέγιστα ή Pareto ελάχιστα σημεία πολλές φορές καλούνται και « Pareto βέλτιστα ή Pareto αποτελεσματικά σημεία». ***

Ορισμός : Λέμε ότι το σημείο ισορροπίας Nash (p,q) είναι « προτιμότερο» από ένα δεύτερο σημείο ισορροπίας Nash (k,l), αν ικανοποιούνται οι ανισότητες (6.1), (6.2), δηλαδή αν το σημείο (p,q) κυριαρχεί.

Ορισμός : Ένα σημείο ισορροπίας Nash το οποίο ταυτόχρονα είναι και Pareto ελάχιστο ονομάζεται « αποδεκτό».
Έχουμε όμως και μια ιδιόμορφη περίπτωση, όπου ένα διμητρικό παίγνιο επιδέχεται ένα μοναδικό μη-συνεργατικό σημείο ισορροπίας, το οποίο ταυτόχρονα είναι και Pareto βέλτιστο, δηλαδή τόσο ατομικά όσο και συλλογικά ευσταθές. Σε μια τέτοια περίπτωση, έστω και αν οι παίκτες δεν έχουνε κάνει μια εκ΄ των προτέρων συμφωνία είναι λογικό να υποθέσουμε ότι όλοι οι παίκτες τείνουν να επιλέξουν το ζεύγος στρατηγικών που απευθύνεται σε αυτό το σημείο. Έστω και αν υπάρχουν περισσότερα από ένα μη- συνεργατικά σημεία ισορροπίας, όταν υπάρχει μεταξύ αυτών μοναδικό Pareto βέλτιστο, όλοι οι παίκτες τείνουν να το επιλέξουν.

Συνέχεια του Παραδείγματος :



Σχήμα 6.2

Στο παράδειγμα αυτό, αν παρατηρήσουμε το παραπάνω σχήμα, το σημείο (1,0) που αντιστοιχεί στο σημείο ισορροπίας Nash (2,2) είναι και Pareto ελάχιστο. Είναι λογικό να υποθέσουμε λοιπόν ότι οι παίκτες θα προτιμήσουν αυτό το ζεύγος στρατηγικών, έστω και αν δεν το έχουνε συμφωνήσει από την αρχή, αφού όλοι τους με αυτή την στρατηγική έχουνε τις μικρότερες δυνατές απώλειες από το να επιλέγανε το μη-συνεργατικό σημείο ισορροπίας (1,1) το οποίο αντιστοιχεί σε απώλειες (3,2).

Παρατήρηση:
Μια πολύ συνηθισμένη περίπτωση που συναντούμε στα δι-μητρικά παίγνια είναι όταν το παίγνιο δεν έχει ένα μοναδικό αποδεκτό σημείο ισορροπίας Nash. Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχει κίνδυνος το πραγματικό αποτέλεσμα του παιγνίου να αντιστοιχεί σε ένα σημείο ανισορροπίας κατά Nash. Ο κίνδυνος αυτός ορισμένες φορές αποφεύγεται αν υπάρχει κάποιο είδος συνεργασίας ή επικοινωνίας μεταξύ των παικτών. Κάτι τέτοιο δεν αποτελεί εγγύηση, αφού παρά την επικοινωνία των παικτών η επιλογή του καλύτερου σημείου μη-συνεργατικής ισορροπίας μπορεί να μην είναι εύκολο να προσδιοριστεί. Όταν λέμε ότι ένα σημείο είναι σημείο ανισορροπίας κατά Nash, εννοούμε ότι στην προσπάθεια του κάθε παίκτης να επιβάλει ένα σημείο ισορροπίας Nash στους συμπαίκτες του, οι παίκτες καταλήγουνε σε ένα ζεύγος στρατηγικών που δεν αντιστοιχεί σε κάποιο σημείο ισορροπίας Nash από τα πολλά που υπάρχουν.

Παράδειγμα : (Μάχη των φύλων)

Έστω ότι έχουμε το ζεύγος Παπαδόπουλου, που αποτελείται από τον Πέτρο, ο οποίος είναι φανατικός οπαδός του Πάοκ και την Αριάδνη, η οποία είναι φανατική οπαδός των εκπτώσεων. Έστω ότι το επόμενο Σάββατο, γίνεται ο τελικός κυπέλλου, μεταξύ του Ολυμπιακού και του Πάοκ. Δυστυχώς όμως η ώρα διεξαγωγής του αγώνα συμπίπτει με την ώρα που ανακοινώθηκε ότι θα πραγματοποιηθούν μεγάλες εκπτώσεις σε ένα πολυκατάστημα.

Κάθε ένας από τους συζύγους έχει δύο επιλογές:

1. « Να παρακολουθήσει τον αγώνα»
2. « Να επισκεφτούν το πολυκατάστημα που θα πραγματοποιηθούν οι εκπτώσεις».

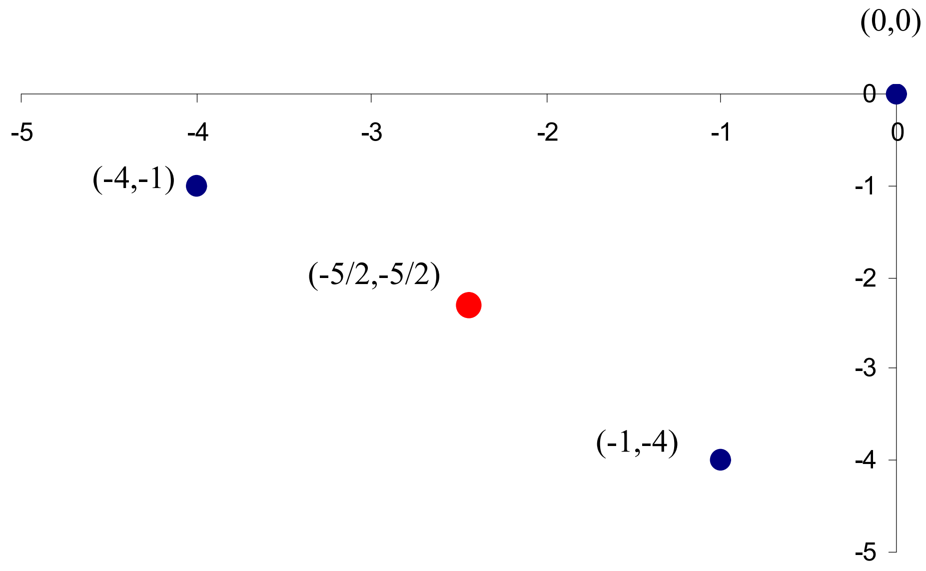
Φυσικά οι προτιμήσεις του Πέτρου και της Αριάδνης είναι αναμενόμενες, δηλαδή ο Πέτρος επιθυμεί να παρακολουθήσει τον αγώνα (βαθμός προτίμησης, έστω 4), ενώ επιθυμεί να ακολουθήσει την γυναίκα του στα ψώνια με βαθμό προτίμησης, έστω 1 και τέλος δεν θέλει να πάει μόνος του για ψώνια ή να παρακολουθήσει μόνος του τον αγώνα με βαθμό προτίμησης 0. Αντίστοιχα η Αριάδνη επιθυμεί να πάνε μαζί για ψώνια με βαθμό προτίμησης 4, να παρακολουθήσει τον αγώνα με βαθμό προτίμησης 1 και δεν επιθυμεί να παρακολουθήσει μόνη της τον αγώνα ή να πάει μόνη της για ψώνια με βαθμό προτίμησης 0.

Σύμφωνα με τις πιθανές στρατηγικές του καθενός, διαμορφώνεται ο παρακάτω πίνακας απωλειών:

		Αριάδνη 1	2
Πέτρος	1	(-4,-1)	(0,0)
	2	(0,0)	(-1,-4)

Παρατηρούμε ότι το ζεύγος των καθαρών στρατηγικών (1,1) και (2,2) αποτελεί σημείο ισορροπίας. Δηλαδή αν και ο καθένας τους έχει διαφορετικά ενδιαφέροντα, προτιμούν να μείνουν μαζί. Τα ζεύγη των στρατηγικών (1,2) και (2,1) δεν αποτελούν σημεία ισορροπίας.

Επιπλέον παρατηρούμε ότι οι απώλειες που προκύπτουν για τα ζεύγη ισορροπίας (1,1) και (2,2) είναι (-4,-1) και (-1,-4) αντίστοιχα και είναι διακριτές και μη συγκρίσιμες από πλευράς κυριαρχίας. Αυτό φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 6.3

Ο Πέτρος προτιμά το πρώτο ζεύγος στρατηγικών (1,1), ενώ η Αριάδνη το δεύτερο ζεύγος στρατηγικών (2,2). Δηλαδή δεν είναι ξεκάθαρο ότι τα δύο αυτά ζεύγη στρατηγικών είναι «ευσταθή», αφού ακόμη και αν ο Πέτρος ξέρει ότι η Αριάδνη θα επιλέξει την δεύτερη στρατηγική, μπορεί αυτός να επιμένει στην στρατηγική 1 ελπίζοντας ότι θα αλλάξει ην στρατηγική της η Αριάδνη. Ο κίνδυνος να μην έχουμε ισορροπία Nash είναι εμφανής. Αυτό θα γίνει αν ο Πέτρος επιλέξει την στρατηγική 1 ελπίζοντας ότι η Αριάδνη θα αλλάξει την στρατηγική της, ενώ στην πραγματικότητα η Αριάδνη δεν έχει σκοπό να αλλάξει την στρατηγική της και επιμείνει στην αρχική της επιλογή , δηλαδή την στρατηγική 2. Ανάλογα μπορεί να γίνει και με την Αριάδνη, δηλαδή να επιλέξει μια στρατηγική ελπίζοντας να αλλάξει ο Πέτρος την στρατηγική, κάτι που δεν θα κάνει τελικά ο Πέτρος. Επειδή όμως και οι δύο προτιμούνε να είναι μαζί από το να πραγματοποιήσουν την μεγαλύτερη επιθυμία τους, δηλαδή η Αριάδνη να επισκεφτεί το πολυκατάστημα και ο Πέτρος να παρακολουθήσει τον αγώνα, θα μπορούσανε να καταφύγουνε σε άλλους τρόπους για να επιλύσουν την διαφωνία τους. Θα μπορούσανε λοιπόν να ρίξουνε ένα κέρμα και ανάλογα με την έκβαση του νομίσματος να παρακολου-θήσουνε μαζί τον αγώνα ή να πάνε για ψώνια.

Σε μία τέτοια περίπτωση ο μέσος όρος αποτελέσματος του παιγνίου είναι ½(-4,-1)+1/2(-1,-4)=(-5/2,-5/2). Αν πραγματοποιηθεί όμως αυτός ο τρόπος λήψης απόφασης, θα έκανε το παίγνιο συνεργατικό.

Παρατηρούμε λοιπόν από το παραπάνω παράδειγμα ότι από την μία πλευρά όταν έχουμε ένα παίγνιο μη συνεργατικό στο οποίο υπάρχουνε παραπάνω από ένα σημεία ισορροπίας Nash, η έννοια της μη- συνεργατικής λύσης δεν είναι καλώς ορισμένη καθώς η μη συνεργασία των παικτών μπορεί να οδηγήσει το παίγνιο σε ανισορροπία Nash. Από την άλλη πλευρά όμως αν επιτραπεί η συνεργασία των παικτών οδηγούμαστε σε ένα σημείο ισορροπίας το οποίο δεν είναι μη συνεργατικό.

<u>Ορισμός</u> : Έστω ότι έχουμε δύο σημεία ισορροπίας Nash το (k,l) και το (p,q). Λέμε τότε ότι τα σημεία αυτά είναι

I. «συναλλάξιμα», αν και τα σημεία (k,q) και (p,l) είναι επίσης σημεία ισορροπία Nash.
II. « ισοδύναμα» αν $\alpha_{kl}=\alpha_{pq}$ και $b_{kl}=b_{pq}$.

<u>Ορισμός</u> : Δύο παίγνια με πίνακες [A,B] και [C,D] αντίστοιχα ονομάζονται « στρατηγικά ισοδύναμα» αν υπάρχουνε θετικές σταθερές r_1, r_2 και αριθμοί M_1 και M_2 έτσι ώστε να ισχύει:

$C = r_1A + M_1$

και

$D= r_2 B + M_2$

<u>Θεώρημα</u> : Όλα τα στρατηγικά ισοδύναμα δι-μητρικά παίγνια έχουν τα ίδια σημεία ισορροπίας

<u>Πόρισμα</u> : Τα σημεία ισορροπίας Nash ενός παιγνίου με πίνακα [A,B] είναι συναλλάξιμα αν το παίγνιο είναι στρατηγικά ισοδύναμο με ένα παίγνιο με πίνακα $[A_i\ –A]$.

6.2.3 Επίπεδα Ασφάλειας

Για να ορίσουμε τα επίπεδα ασφαλείας, θα πάρουμε την περίπτωση των δι-πινακοπαιγνίων. Βέβαια, επειδή σε αυτή την περίπτωση και οι δύο παίκτες επιθυμούν να ελαχιστοποιούν την απώλεια τους ή να μεγιστοποιήσουν το κέρδος τους, τα επίπεδα ορίζονται και για τους δύο παίκτες είτε σε όρους minmax είτε σε όρους maxmin, ανάλογα με την περίπτωση.

<u>Ορισμός</u>: Έστω ότι έχουμε ένα παίγνιο με πίνακα απώλειας [A, B]. Ορίζουμε το επίπεδο ασφαλείας του παίκτη I σαν:

$$\overline{a}_0 = \min_{i=1,\dots,m} \{ \max_{j=1,\dots,n} \{a_{ij}\}\} \qquad (1)$$

και το επίπεδο ασφαλείας του παίκτη II σαν

$$\overline{\beta}_0 = \min_{j=1,\dots,n} \{ \max_{i=1,\dots,m} \{b_{ij}\}\} \qquad (2)$$

οι στρατηγικές $\bar{i}, \bar{j}$ για τις οποίες

$$\overline{a}_0 = \{ \max_{j=1,\dots,n} \{a_{\bar{i}j}\}\} \qquad (3)$$

και

$$\overline{\beta}_0 = \{ \max_{i=1,\dots,m} \{b_{i\bar{j}}\}\} \qquad (4)$$

για τις οποίες δηλαδή επιτυγχάνονται τα επίπεδα αυτά, είναι οι «καθαρές στρατηγικές minmax» ή «στρατηγικές ασφαλείας» των παικτών.

Στην περίπτωση που δεν έχουμε πίνακα απώλειας αλλά πίνακα αμοιβής, τα επίπεδα ασφαλείας ορίζονται ως «maxmin αμοιβές», δηλαδή τα max στον παραπάνω ορισμό γίνονται min και αντίστροφα, οπότε μιλάμε πια περί «κατωτέρων αμοιβών».

Παρατηρούμε ότι τα επίπεδα ασφαλείας ορίζονται για διαφορετικούς πίνακες , τους αντίστοιχους πίνακες απώλειας ή αμοιβής των παικτών. Το παρακάτω θεώρημα εγγυάται την ύπαρξη και μοναδικότητα των επίπεδών ασφαλείας όπως και την ύπαρξη των στρατηγικών ασφαλείας.

<u>Θεώρημα</u>: Για κάθε παίγνιο με πίνακα απώλειας [Α,Β], το επίπεδο ασφαλείας έκαστου παίκτη είναι μοναδικό και υπάρχει τουλάχιστον μια στρατηγική ασφαλείας για κάθε παίκτη.

<u>Παράδειγμα</u> : (Το δίλημμα του Φυλακισμένου)

Αν οι στρατηγικές των δυο φυλακισμένων παριστάνονται στον παρακάτω πίνακα:

		Φυλακισμένος ΙΙ	
		Ομολογία	Μη ομολογία
Φυλακισμένος Ι	Ομολογία	(5,5)	(0,20)
	Μη ομολογία	(20,0)	(1,1)

Ο πρώτος αριθμός σε κάθε ζεύγος παριστάνει την απώλεια σε έτη κάθειρξης του πρώτου φυλακισμένου, ενώ ο δεύτερος αριθμός παριστάνει την απώλεια σε έτη κάθειρξης του δεύτερου φυλακισμένου.

Υπολογίζουμε τα επίπεδα ασφαλείας του κάθε φυλακισμένου, ως εξής:

		1	2	max
I	1	(5,5)	(0,20)	5 ← minmax
	2	(20,0)	(1,1)	20
	max	8 ↑minmax	5	minmax $\overline{\alpha}_0 = \overline{\beta}_0 = 5$

Τα επίπεδα ασφαλείας των δύο παικτών είναι (5,5) και αντιστοιχούν στις στρατηγικές (1,1), δηλαδή στην περίπτωση που ομολογήσουν και οι δύο. Σε αυτή την περίπτωση δηλαδή οι στρατηγικές ασφαλείας και οι στρατηγικές ισορροπίας Nash είναι ίδιες.

Το παραπάνω φαινόμενο, δηλαδή η σχέση των στρατηγικών ισορροπίας Nash και των στρατηγικών ασφαλείας δεν είναι πάντα τόσο απλή. Οι δυνατές σχέσεις που μπορεί να τα συνδέουν είναι:

- Όπως στο παραπάνω παράδειγμα, όπου το παίγνιο έχει ένα μοναδικό(αποδεκτό) σημείο ισορροπίας Nash και οι στρατηγικές που αντιστοιχούν στο σημείο ισορροπίας αυτό είναι και στρατηγικές ασφαλείας, αφού $(\alpha_0, \beta_0) = (\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0)$.
- Η « ασφαλής» έκβαση του παιγνίου $(\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0)$ δεν είναι πάντα ισοδύναμη με την έκβαση Nash (α_0, β_0). Γενικά η έκβαση $(\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0)$ δεν μπορεί να είναι προτιμότερη από μία έκβαση Nash (α_0, β_0). Ακόμη και στην περίπτωση που το ζεύγος των στρατηγικών Nash είναι μοναδικό και ταυτίζεται με το ζεύγος των στρατηγικών ασφαλείας, η έκβαση $(\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0)$ μπορεί να είναι χειρότερη από την έκβαση (α_0, β_0), κυρίως γιατί οι δύο παίκτες επιλέγουν τις στρατηγικές ασφαλείας τους χωρία να γνωρίζουν αν πράγματι αυτές αποτελούν την βέλτιστη απάντηση στην στρατηγική του αντιπάλου τους.
- Το παίγνιο δεν επιδέχεται ισορροπία Nash σε καθαρές στρατηγικές, όμως το πιο πάνω θεώρημα εγγυάται την ύπαρξη στρατηγικών ασφαλείας.
- Οι στρατηγικές ασφαλείας δεν αντιστοιχούν σε κάποιο αποδεκτό σημείο ισορροπίας Nash.

Ακόμη όμως και στην περίπτωση που οι στρατηγικές ασφαλείας δεν αντιστοιχούν σε κάποιο αποδεκτό σημείο ισορροπίας Nash, οι στρατηγικές ασφαλείας θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στην εξέλιξη του παιγνίου, αν για παράδειγμα υπάρχουνε δύο ή και περισσότερα σημεία ισορροπίας Nash με διαφορετικές εκβάσεις και άρα χωρίς να ισχύει η ιδιότητα της συναλλαξιμότητας, ή όταν ο ένας παίκτης δεν είναι σίγουρος για τον ορθολογισμό του άλλου. Πιο συγκεκριμένα οι στρατηγικές ασφαλείας θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σαν ένα είδος απειλής.

6.3 Παίγνια Μικτής Στρατηγικής

6.3.1 Χαρακτηριστικά Παιγνίου

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι υπάρχουν παίγνια καθαρής στρατηγικής με δύο παίκτες και μηδενικό άθροισμα που δεν ικανοποιούν τη συνθήκη σαγματικού σημείου, και επομένως δεν επιδέχονται επίλυση σημείου ισορροπίας. Τέτοια παίγνια είναι γνωστά ως «απροσδιόριστα».

<u>Παράδειγμα</u> :

Δύο παίκτες ταυτόχρονα επιλέγουν να βάλουν στο τραπέζι 1 ή 2 δραχμές. Εάν το άθροισμα των δραχμών στο τραπέζι είναι περιττός αριθμός, κερδίζει ο παίκτης I μία δραχμή από τον παίκτη II . Εάν το άθροισμα των δραχμών στο τραπέζι είναι άρτιος αριθμός, κερδίζει ο παίκτης II μία δραχμή από τον παίκτη I. Επομένως η μήτρα αμοιβής είναι :

		II	
		1	2
I	1	-1	+1
	2	+1	-1

Όπου η στρατηγικές 1 και 2 κάθε παίκτη αντιστοιχούν στο να βάλει ο παίκτης 1 ή 2 δραχμές στο τραπέζι.

Εάν αναζητήσουμε σημείο ισορροπίας σε καθαρές στρατηγικές με την προηγούμενη στρατηγική θα έχουμε:

	1	2	min στοίχου	
1	-1	+1	-1	
2	+1	-1	-1	Maxmin τιμή= -1
max στήλης	+1	+1		

Minmax τιμή= +1

Βλέπουμε ότι δεν υπάρχει ισότητα των minmax και maxmin τιμών και άρα ούτε σαγματικό σημείο ή σημείο ισορροπίας. Το μόνο που μπορούμε να πούμε είναι ότι ο παίκτης Ι μπορεί να είναι βέβαιος για μια αμοιβή τουλάχιστον -1 δραχμή ενώ ο παίκτης ΙΙ μπορεί να κρατήσει τον παίκτη Ι σε μια αμοιβή το πολύ +1 δραχμή .

Εάν θεωρήσουμε ότι το παίγνιο επαναλαμβάνεται, και εάν ο παίκτης Ι παίζει με συνέπεια την στρατηγική 1, τότε ο παίκτης ΙΙ μπορεί να το αντιληφθεί αυτό και να παίζει τη στρατηγική 2, οπότε θα κερδίζει κάθε φορά μια δραχμή. Εάν από την άλλη πλευρά ο παίκτης Ι παίζει με συνέπεια τη στρατηγική 2, ο ΙΙ θα αντιταχθεί με τη στρατηγική 1 και θα κερδίζει πάλι 1 δραχμή κάθε φορά που το παίγνιο παίζεται. Παρόμοιο αποτέλεσμα θα υπήρχε ακόμα κι αν ο Ι αποφάσιζε να ποικίλλει τη στρατηγική του με κάποιο προβλέψιμο τρόπο. Έτσι αν αποφάσιζε να παίζει τη στρατηγική 1 σε περιττές ημερομηνίες και τη στρατηγική 2 στις άρτιες, ο παίκτης ΙΙ γρήγορα θα το αντιλαμβανόταν και θα χρησιμοποιούσε τις κατάλληλες στρατηγικές κατά περίπτωση. Ανάλογα θα ήταν τα αποτελέσματα αν ο παίκτης ΙΙ υιοθετούσε μια σταθερή στρατηγική ή μια προβλέψιμη εναλλαγή στρατηγικών. Υπάρχει βέβαια και η περίπτωση να παίξουν και οι δύο παίκτες με κάποια ευκαμψία, όπου ο καθένας αντιδρά στις προηγούμενες κινήσεις του άλλου. Έτσι ο παίκτης Ι ακολουθεί τη στρατηγική 1 έως ότου ο ΙΙ το αντιληφθεί οπότε και αλλάζει στρατηγική. Αυτός ο κύκλος θα μπορούσε να συνεχιστεί επ' άπειρον.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι για κάθε επιλογή στρατηγικής από τους δύο παίκτες, υπάρχει κάποιος που μπορεί να ευεργετηθεί αλλάζοντας μονομερώς τη στρατηγική του. Π.χ. αν και οι δύο βάλουν μια δραχμή στο τραπέζι, συμφέρει τον παίκτη Ι να αυξήσει σε δύο δραχμές αλλάζοντας την αμοιβή του από -1 σε +1 δραχμή. Κάτι το οποίο ο ΙΙ μπορεί να ανατρέψει αυξάνοντας επίσης σε δύο δραχμές. Άρα δεν υπάρχει επιλογή ζεύγους στρατηγικών που να ικανοποιεί και τους δύο παίκτες ταυτόχρονα ώστε να έχουμε ισορροπία.

Σε ένα παίγνιο άνευ σαγματικού σημείου, αν ο αντίπαλος μας γνωρίζει τη στρατηγική μας, το καλύτερο που μπορούμε να ελπίζουμε είναι να επιτύχουμε τη maxmin τιμή, όταν είμαστε παίκτης στοίχου, και τη minmax τιμή όταν είμαστε παίκτης στήλης.

Αν θέλουμε κάποια καλύτερη απόδοση θα πρέπει να αρνηθούμε στον αντίπαλο μας τη γνώση της στρατηγικής μας. Κάτι τέτοιο είναι αδύνατο αν η τακτική που ακολουθούμε στην επιλογή στρατηγικής είναι ορθολογική . Δημιουργείται λοιπόν το ερώτημα αν μπορούμε να καταφύγουμε σε μη ορθολογικές επιλογές στρατηγικής ώστε να προκαλέσουμε σύγχυση στον αντίπαλό μας.

Η απάντηση στο ερώτημα είναι - εν μέρει - να επιλέξουμε τη στρατηγική μας τυχαία (randomly), δηλαδή μη ορθολογικά αλλά να είναι οι πιθανότητες που επεισέρχονται στην τυχαία αυτή επιλογή ορθολογικά κατασκευασμένες. Αυτή είναι η βασική ιδέα στα «παίγνια μικτής στρατηγικής».

<u>Συνέχεια Παραδείγματος</u> :

Διαπιστώσαμε ότι το παράδειγμα δεν επιδέχεται σημείο ισορροπίας σε καθαρές στρατηγικές. Το ερώτημα όμως αν υπάρχει κάποιος τρόπος ώστε να δημιουργηθεί κατάσταση ισορροπίας για τους δύο παίκτες δεν απαντήθηκε ακόμα.

Η ιδέα των παιγνίων μικτής στρατηγικής είναι να επιλέξει κάθε παίκτης τη στρατηγική του τυχαία, αφού πρώτα έχει δώσει σε κάθε στρατηγική που έχει στη διάθεση του μια πιθανότητα επιλογής της.

Υπάρχει δηλαδή κατά κάποιο τρόπο μια «ανάμειξη» στρατηγικών από τη πλευρά του κάθε παίκτη.

Έτσι στο παράδειγμα θα μπορούσε ο κάθε παίκτης να επιλέγει τυχαία κάθε φορά τη στρατηγική 1 ή 2. Τότε κάθε στρατηγική θα είχε πιθανότητα ½ , οπότε η «προσδοκώμενη αμοιβή» του παίκτη Ι είναι:

- Αν ο ΙΙ χρησιμοποιήσει τη στρατηγική 1: $(-1)\,½ + (+1)\,½ = 0$.
- Αν ο ΙΙ χρησιμοποιήσει τη στρατηγική 2 : $(+1)\,½ + (-1)\,½ = 0$.

Δηλαδή ο Ι προσδοκά αμοιβή 0 ό,τι κι αν πράξει ο ΙΙ. Παρομοίως η «προσδοκώμενη απώλεια» του παίκτη ΙΙ είναι:

- Αν ο Ι χρησιμοποιήσει τη στρατηγική 1: (-1) ½ + (+1) ½ = 0.
- Αν ο Ι χρησιμοποιήσει τη στρατηγική 2 : (+1) ½ + (-1) ½ = 0.

Δηλαδή ο ΙΙ προσδοκά απώλεια 0 ό,τι κι αν πράξει ο Ι. Άρα αν και οι δύο αποφασίσουν να παίξουν με αυτόν τον τρόπο και πάλι η έκβαση θα ήταν η ίδια. Ακόμα κι αν ο παίκτης Ι παίξει με αυτόν τον τρόπο ενώ ο ΙΙ επιλέξει μια άλλη κατανομή πιθανοτήτων τότε η «προσδοκώμενη αμοιβή» του συνεχίζει να είναι 0. Φυσικά τα ίδια ισχύουν και για τον ΙΙ.

6.3.2 Μικτές στρατηγικές

Μια «μικτή στρατηγική» (mixed strategy) για έναν παίκτη είναι μια κατανομή πιθανοτήτων (probability distribution) στο σύνολο των καθαρών στρατηγικών του.

<u>Ορισμός </u>: Αν ένας παίκτης έχει m καθαρές στρατηγικές μία μικτή

στρατηγική είναι ένα «m-διάνυσμα» $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix}$

που ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1,\dots, m \end{cases}$$

<u>Συνέχεια παραδείγματος</u> :

Αν θέσουμε

- x_1= πιθανότητα να θέσει ο παίκτης Ι μια δραχμή στο τραπέζι
- x_2= πιθανότητα να θέσει ο παίκτης Ι δύο δραχμές στο τραπέζι

και καλέσουμε y_1, y_2 τις αντίστοιχες πιθανότητες για τον παίκτη ΙΙ τότε κάθε διάνυσμα $x = (x_1, x_2)^\tau$

με $x_1 + x_2 = 1$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

είναι μια στρατηγική του παίκτη Ι και κάθε διάνυσμα $y = (y_1, y_2)^\tau$ με

$y_1 + y_2 = 1$

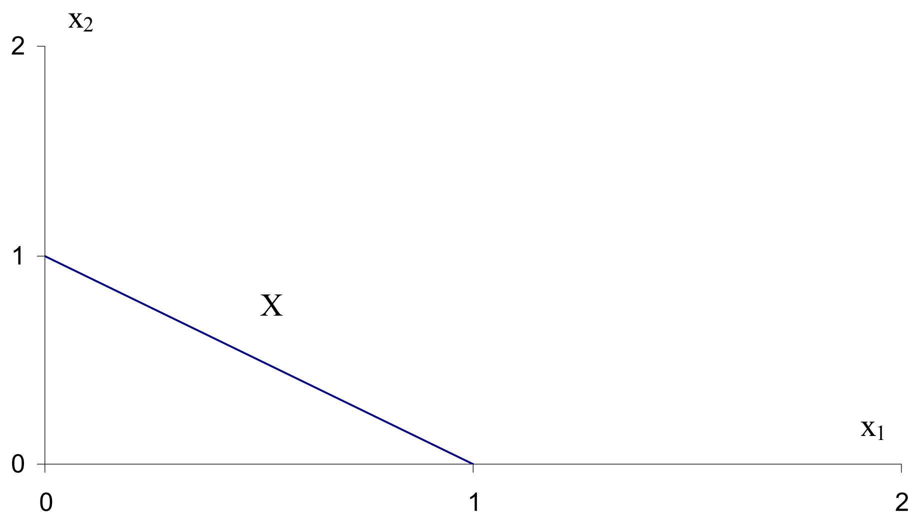
$$y_1 \geq 0$$
$$y_2 \geq 0$$

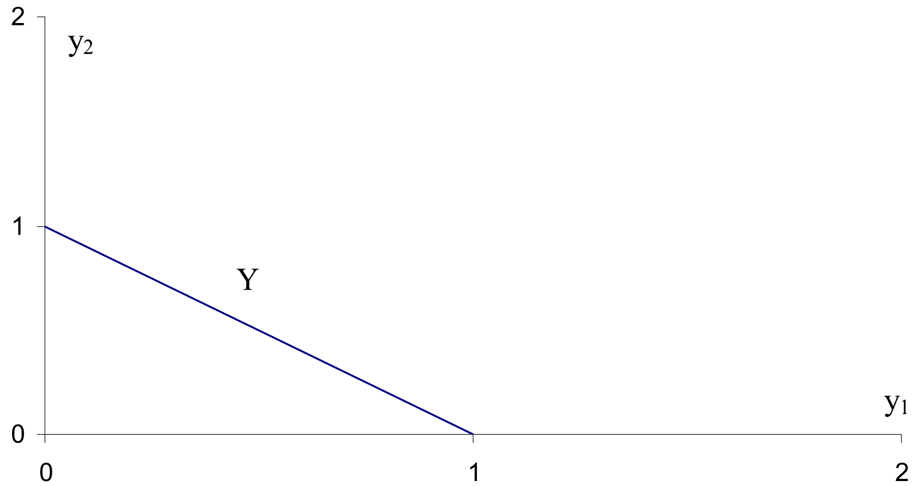
είναι μια μικτή στρατηγική του παίκτη ΙΙ.

Τα σύνολα που απεικονίζονται στο Σχήμα 1:

$$X = \{ x = (x_1, x_2)^{\tau} \ \varepsilon \ R^2 / x_1 + x_2 = 1, x \geq 0 \}$$
$$Y = \{ y = (y_1, y_2)^{\tau} \ \varepsilon \ R^2 / y_1 + y_2 = 1, y \geq 0 \}$$

είναι τα σύνολα μικτών στρατηγικών του παίκτη Ι και ΙΙ αντίστοιχα.





Σχήμα 6.4

<u>Ορισμός</u> : Τα σύνολα μικτών στρατηγικών:

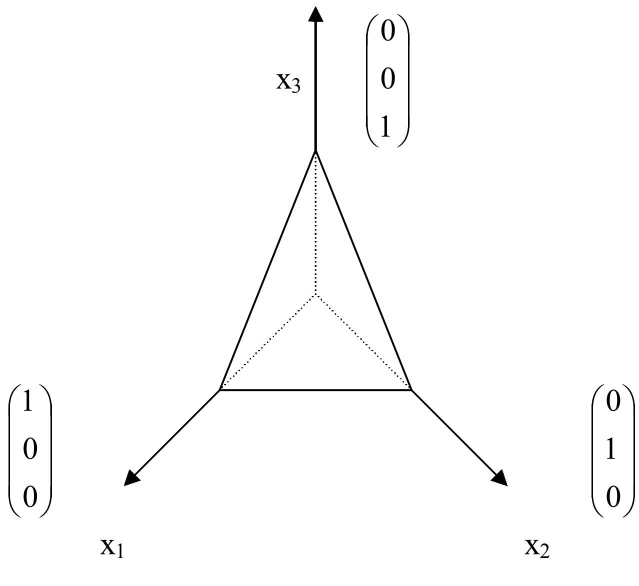
$$X = \{\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^{\tau} \ \varepsilon\ R^m / \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \qquad x_i \geq 0 \qquad i = 1,\ldots,m \qquad x \geq 0 \,\right\}$$

και

$$Y = \{\, y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\tau} \ \varepsilon\ R^n / \left\{ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \qquad y_j \geq 0 \qquad j = 1,\ldots,n \quad y \geq 0 \,\right\}$$

ονομάζονται «simplex πιθανοτήτων» στον χώρο R^m και R^n αντίστοιχα.

Το simplex πιθανοτήτων είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα στον R^2 (Σχήμα 6.4), ένα τρίγωνο στον R^3 (Σχήμα 6.5), και υπερτρίγωνο στον R^k, για $k \geq 4$.
Παρατηρούμε ότι simplex πιθανοτήτων είναι ένα κυρτό πολύτοπο (convex polytope) με κορυφές (vertices) που αντιστοιχούν στις καθαρές στρατηγικές. Άρα οι καθαρές στρατηγικές του κάθε παίκτη αποτελούν υποσύνολα των αντίστοιχων μικτών στρατηγικών.



Σχήμα 6.5 Τριγωνικό simplex πιθανοτήτων

Χαρακτηριστική ιδιότητα των κυρτών πολυτόπων $X \subset R^m$ είναι ότι κάθε σημείο x ε X μπορεί να εκφραστεί ως κυρτός συνδυασμός των κορυφών του X. Δηλαδή αν $\overline{X} = \{$

$e_1, e_2, \ldots e_m\}$ το σύνολο των κορυφών του simplex τότε μπορούμε να βρούμε $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0, \ldots, \lambda m \geq 0$ με $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, για τα οποία $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i$

$$x = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι μικτές στρατηγικές αποτελούν «μίξη» των καθαρών.

6.3.3 Το minmax Θεώρημα

Έστω παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με δύο παίκτες I και II και με μήτρα αμοιβής A διαστάσεων $m \times n$. Οι πιθανότητες των δύο παικτών θεωρούνται ανεξάρτητες έτσι ώστε το γινόμενο $x_i\, y_j$ είναι η κοινή πιθανότητα να επιλέξει ο παίκτης I τη στρατηγική i και ο παίκτης II τη στρατηγική j.Βέβαια το άθροισμα των πιθανοτήτων $x_i\, y_j$ είναι 1.Οι πιθανότητες αυτές χρησιμοποιούνται ως «σταθμά» στο μέσο όρο των αντιστοίχων αμοιβών α_{ij} για να υπολογιστεί η προσδοκώμενη αμοιβή.

<u>Ορισμός</u>: Αν ο παίκτης I επιλέξει τη μικτή στρατηγική x, και ο II τη μικτή στρατηγική y τότε η προσδοκώμενη έκβαση είναι:

$$\upsilon(x,y) = x^T A\, y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i\, \alpha_{ij}\, y_j \qquad (1)$$

Ο ορισμός αυτός βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με την ερμηνεία ότι αν ένα παίγνιο παιχτεί επανειλημμένως, τότε η συχνότητα με την οποία εμφανίζεται η αμοιβή α_{ij} πλησιάζει το $x_i\, y_j$,οπότε η προσδοκώμενη αμοιβή ανά επανάληψη είναι αυτή του τύπου (1).

Αν ο παίκτης I επιλέξει τη μικτή στρατηγική x, και ο II την καθαρή στρατηγική j τότε η προσδοκώμενη αμοιβή του παίκτη I είναι:

$$υ(x, e_j) = x^{τ} A [:, j] = \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \quad (2)$$

όπου A [:, j] είναι η στήλη j της μήτρας A.

Ομοίως η προσδοκώμενη απώλεια του παίκτη II ,όταν αυτός επιλέξει τη μικτή στρατηγική y, και ο I την καθαρή στρατηγική i είναι :

$$υ(e_i , y) = A [i, :]^{τ} y = \sum_{j=1}^{n} α_{ij} y_j \quad (3)$$

Στα παίγνια μικτής στρατηγικής συνεχίζουμε να θεωρούμε τη βασική υπόθεση των von Neumann και Morgenstern ως ισχύουσα. Δηλαδή ο παίκτης στοίχου (I) επιλέγει τη μικτή στρατηγική του, x ,ούτως ώστε να μεγιστοποιήσει την προσδοκώμενη αμοιβή του, ενώ ο παίκτης στήλης (II) γνωρίζει τις τιμές του διανύσματος x. Ωστόσο δεν είναι σε θέση να γνωρίζει την ακριβή επιλογή του παίκτη στοίχου ως τη στιγμή που το παίγνιο παίζεται.

Αν ο παίκτης στήλης κατόρθωνε να ανακαλύψει την επιλογή στρατηγικής του παίκτη στοίχου, τότε θα επέλεγε τη δική του έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει το προσδοκώμενο αποτέλεσμα.

Άρα αν ο I παίξει τη στρατηγική $\bar{x}$,ο II θα έπαιζε τη στρατηγική $\bar{y}$ που θα λάμβανε ως λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης :

$$υ_{II}(\bar{x}) = \bar{x}^{τ} A \bar{y} = \min_{y∈ Y} υ(\bar{x} , y) = \min_{y∈ Y} \bar{x}^{τ} Ay \quad (2.4)$$

περιορίζοντας έτσι την αμοιβή του I σε $α = υ_{II}(\bar{x})$.

Αποτέλεσμα αυτού θα είναι ο I να επιλέξει τη στρατηγική x* έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει τη προσδοκώμενη αμοιβή του, $υ_{II}(x)$. Πρέπει επομένως να επιλύσει το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης.:

$$α^* = \max_{x∈ X} υ_{II}(x)$$

Το τελευταίο, λόγω της σχέσης (4), ισοδυναμεί με το ακόλουθο πρόβλημα:

$$\alpha^* = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^{\tau} A y \qquad (5)$$

<u>Συνέχεια παραδείγματος</u> :

Αν ο παίκτης I επιλέξει $\bar{x} = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})^T$ και $\bar{x}^T A = (\frac{1}{4} \ \ \frac{3}{4}) \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix} = (\frac{1}{2} \ \ -\frac{1}{2})$

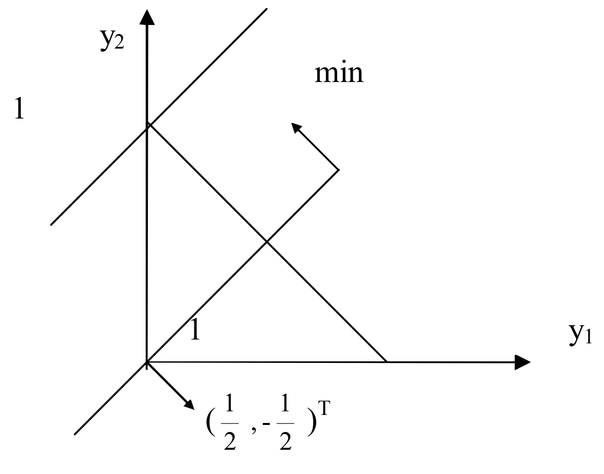
Ο παίκτης II πρέπει να αντιταχθεί με μια στρατηγική $\bar{y}$ που βρίσκει επιλύνοντας το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\upsilon_{II}(\bar{x}) = \min \left(\frac{1}{2} y1 - \frac{1}{2} y2 \right) \quad \text{υπό τις συνθήκες}$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

$$y_1 , y_2 \geq 0$$

Η λύση που επιδέχεται αυτό το πρόβλημα, όπως φαίνεται από τον Σχήμα 3 όπου έγινε γεωμετρική επίλυση, είναι $\bar{y} = (0,1)^T$.Δηλαδή ο II αντιδρά με μια καθαρή στρατηγική στην μικτή στρατηγική του I. Η προσδοκώμενη αμοιβή του I σε αυτή την περίπτωση θα είναι $-\frac{1}{2}$.



Σχήμα 6.6

Αφού το πρόβλημα είναι γραμμικό η βέλτιστη λύση του είναι πάντοτε μια κορυφή του simplex πιθανοτήτων και επομένως είναι μια καθαρή στρατηγική του στήλης. Άρα έχουμε πάντα :

$$\upsilon_{II}(\bar{x}) = \min_{y \in Y} \bar{x}^T A\, y = \min_{j=1,2,\ldots,n} \{ \bar{x}^T A\,[:,j] \} \qquad (6)$$

όπου το A[:,j] είναι η στήλη j της μήτρας A και αντιστοιχεί στη στρατηγική j του παίκτη στήλης.

Άρα το πρόβλημα επιλογής στρατηγικής (5) του παίκτη I γίνεται:

$$\alpha^* = \max_{x \in X} \{ \min_{j=1,2,\ldots,n} \{ \bar{x}^T A\,[:,j] \} \qquad (7)$$

<u>Ορισμός</u> : Η βέλτιστη τιμή α* του προβλήματος επιλογής στρατηγικής (7) για τον παίκτη I είναι η «προσδοκώμενη maxmin τιμή», ενώ η λύση x* του προβλήματος είναι η μικτή στρατηγική που ο παίκτης I πρέπει να ακολουθήσει για να επιτύχει αυτή την αμοιβή, και ονομάζεται «maxmin μικτή στρατηγική» του παίκτη.

Το α* είναι το πόσό με το οποίο ο παίκτης I εγγυημένα αμείβεται κατά μέσο όρο εφόσον βέβαια παίζει «ευφυώς». Φυσικά είναι δυνατόν να έχει μεγαλύτερη αμοιβή αν ο αντίπαλος του πέσει σε σφάλματα. Δεν μπορεί όμως να βασιστεί σε κάτι τέτοιο. Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι υπάρχει μικτή στρατηγική x* του παίκτη I για την οποία η τιμή α* στην σχέση (7) επιτυγχάνεται και μάλιστα :

$$\alpha^* = \min_{y \in Y} \upsilon(x^*, y) = \min_{j=1,2,\ldots,n} \{ x^{*T} A[:,j] \} \qquad (8)$$

Μια τέτοια στρατηγική x* είναι «βέλτιστη μικτή στρατηγική» για τον παίκτη I.

Με ανάλογη ανάλυση για τον παίκτη II καταλήγουμε σε παρόμοια αποτελέσματα. Έτσι έχουμε ότι σε κάθε μικτή στρατηγική $\bar{y}$ του παίκτη II, ο παίκτης I επιλέγει μια καθαρή δια της οποίας επιτυγχάνει τη μέγιστη δυνατή αμοιβή $\beta = \upsilon_I(\bar{y})$, όπου

$$\upsilon_I(\bar{y}) = \max_{x \in X} x^{\tau} A\, \bar{y} = \max_{i=1,2,\ldots,m} \{ A[i,:]^T\ \bar{y} \} \qquad (9)$$

Εδώ το $A[i,:]^{\tau}$ συμβολίζει το στοίχο i της μήτρας A και αντιστοιχεί στη στρατηγική i του παίκτη στοίχου.

Άρα το πρόβλημα επιλογής στρατηγικής του παίκτη ΙΙ ορίζεται από την προσπάθεια του να επιλέξει τη στρατηγική του y έτσι ώστε να μειώσει όσο το δυνατόν περισσότερο τη τιμή του $\upsilon_I(y)$. Άρα :

$$\beta^* = \min_{y \in Y} \{ \max_{i=1,2,\ldots,m} \{ A[i,:]^T \ \bar{y} \}\} \qquad (10)$$

<u>Ορισμός</u> : Η βέλτιστη τιμή β* του προβλήματος επιλογής στρατηγικής (10) γαι τον παίκτη ΙΙ είναι η «προσδοκώμενη minmax τιμή», ενώ η λύση y* του προβλήματος είναι η μικτή στρατηγική που ο παίκτης ΙΙ πρέπει να ακολουθήσει για να εξασφαλίσει αυτή την απώλεια και ονομάζεται «minmax μικτή στρατηγική» του παίκτη.

Όπως για τον παίκτη Ι έτσι και για τον ΙΙ υπάρχει μια (τουλάχιστον) βέλτιστη μικτή στρατηγική y* για την οποία επιτυγχάνεται η τιμή β* του παραπάνω ορισμού.

$$\beta^* = \max_{x \in X} \upsilon(x, y^*) = \max_{i=1,2,\ldots,m} \{ A[i,:]^T y^* \} \qquad (11)$$

<u>Θεώρημα - Βασική Ανισότητα</u> :

Για οποιεσδήποτε μικτές στρατηγικές $\bar{x}$ ε X και $\bar{y}$ ε Y του παίκτη στοίχου και στήλης αντίστοιχα ισχύει πάντα η ανισότητα

$$\upsilon_{II}(\bar{x}) \leq \upsilon_I(\bar{y})$$

Επακόλουθο του θεωρήματος είναι φυσικά η ανισότητα $\alpha^* \leq \beta^*$ που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η maxmin τιμή δεν υπερβαίνει την minmax τιμή.

<u>Πόρισμα</u> : Αν οι x* και y* είναι βέλτιστες μικτές στρατηγικές για τους παίκτες Ι και ΙΙ αντίστοιχα τότε

$$\alpha^* \le \upsilon^* \le \beta^*, \text{ όπου } \upsilon^* = \upsilon(x^*, y^*)$$

Το πόρισμα παρουσιάζει μια ασθενή εκδοχή του Minmax Θεωρήματος. Στα παίγνια μικτής στρατηγικής έχουμε όμως ισχυρότερα αποτελέσματα από ότι στα παίγνια καθαρής στρατηγικής. Αυτά συνοψίζονται στο ακόλουθα κλασσικό θεώρημα.

Θεώρημα - Minmax Θεώρημα:
Όλα τα παίγνια μικτής στρατηγικής με δύο παίκτες και μηδενικό άθροισμα επιδέχονται σαγματικό σημείο ισορροπίας όπου η ισότητα ισχύει:

$$\alpha^* = \upsilon^* = \beta^*$$

Ορισμός : Η κοινή τιμή $\alpha^* = \upsilon^* = \beta^*$ του θεωρήματος ονομάζεται τιμή του παιγνίου ενώ το ζεύγος στρατηγικών (x^* , y^*),για το οποίο η ισότητα αυτή επιτυγχάνεται, ονομάζεται «σαγματικό σημείο» ή «σημείο ισορροπίας» του παιγνίου.

Παρατηρούμε ότι για τυχαίες μικτές στρατηγικές $\bar{x}$, $\bar{y}$, των δύο παικτών έχουμε:

$$\alpha^* = \upsilon^* = \beta^* = \upsilon(x^*, y^*) = \max_{x \in X} \upsilon(x, y^*) \ge \upsilon(\bar{x}, y^*) \quad (12)$$

$$\alpha^* = \upsilon^* = \beta^* = \upsilon(x^*, y^*) = \min_{y \in Y} \upsilon(x^*, y) \le \upsilon(x^*, \bar{y}) \quad (13)$$

Πράγματι λοιπόν ο παίκτης I έχει το α* ως εγγυημένη αμοιβή αφού δεν πρόκειται να πάρει χειρότερη αμοιβή από το α* αν παίξει τη στρατηγική x*. Αν όμως παίξει κάποια άλλη τυχαία μικτή στρατηγική x η αμοιβή του μπορεί να είναι χειρότερη από α*. Επειδή οι καθαρές στρατηγικές του παίκτη αποτελούν υποσύνολο των μικτών του, επόμενο είναι να προσδοκά μια αμοιβή α* που είναι ανώτερη ή ίση του επιπέδου ασφαλείας που του παρέχουν οι καθαρές στρατηγικές του, εφόσον βέβαια παίξει τη βέλτιστη μικτή στρατηγική του, x^*. Επομένως πρέπει ο παίκτης Ι να παίξει μια βέλτιστη μικτή στρατηγική. Όλα αυτά ισχύουν φυσικά και για τον παίκτη ΙΙ.

<u>Ορισμός</u>: Για ένα παίγνιο με $\alpha^* = \beta^*$, η λύση σε μικτές στρατηγικές αποτελείται από τρία στοιχεία :

i. μια βέλτιστη μικτή στρατηγική του παίκτη στοίχου
ii. μια βέλτιστη μικτή στρατηγική του παίκτη στήλης
iii. την τιμή του παιγνίου $\alpha^* = \upsilon^* = \beta^*$

Από τις ανισότητες (12) και (13) έχουμε τις «συνθήκες σαγματικού σημείου» σε μικτές στρατηγικές :

$$\upsilon(x^*, y) \geq \upsilon(x^*, y^*) \quad \forall\, y \in Y \qquad (14)$$

$$\upsilon(x^*, y^*) \geq \upsilon(x, y^*) \quad \forall\, x \in X \qquad (15)$$

οι οποίες υπενθυμίζουν τις ανισότητες που διέπουν τα σαγματικά σημεία σε μήτρες.

Θα μπορούσαμε να φανταστούμε μία μήτρα με άπειρους στοίχους και άπειρες στήλες σε 1-1 αντιστοιχία με τις μικτές στρατηγικές του παίκτη στοίχου και του παίκτη στήλης αντίστοιχα και της οποίας τα στοιχεία είναι οι προσδοκώμενες τιμές $\upsilon(x, y)$. Τότε πράγματι το $\upsilon(x^*, y^*)$είναι ελάχιστο στο στοίχο του και μέγιστο στη στήλη του.

<u>Παράδειγμα</u>: Σαγματικό σημείο σε μικτές στρατηγικές

Έστω παίγνιο με μήτρα αμοιβής την

$$A = \begin{matrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \end{matrix}$$

Από το Σχήμα 4 βεβαιωνόμαστε γραφικά ότι η συνάρτηση

$\upsilon(x, y) = x^{\tau} Ay$ με πεδίο ορισμού το $X \times Y$ είναι όντως σαγματική

Επειδή $x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - x_1$ και

$$y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1 - y_1$$

η συνάρτηση $\upsilon(x, y)$ μπορεί να εκφραστεί σαν συνάρτηση μόνο των x_1, y_1.
Έχουμε :

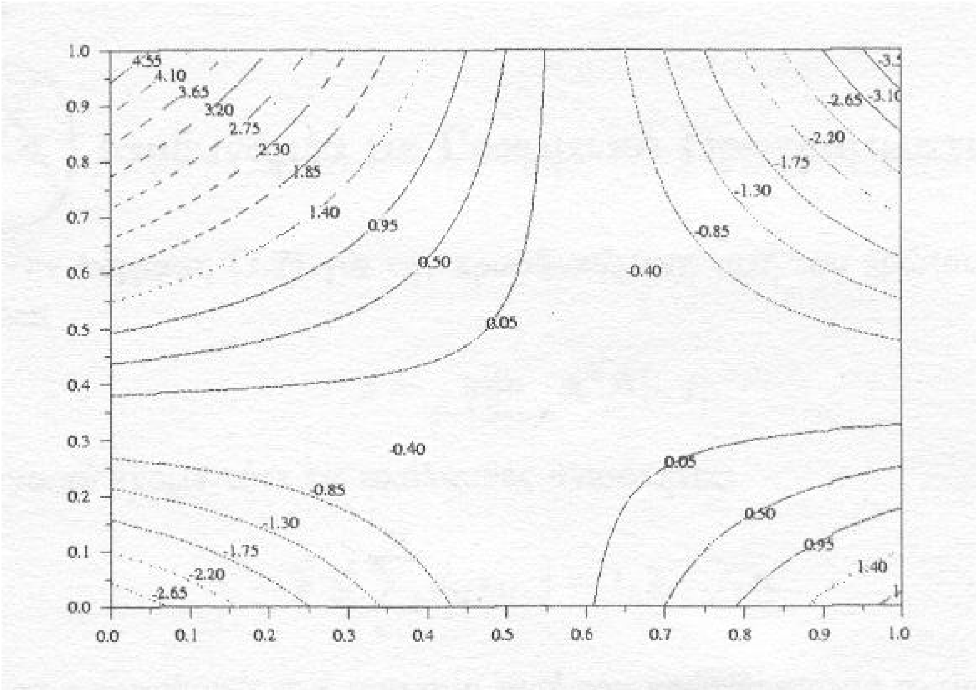
$$\upsilon(x, y) = \upsilon(x_1, y_1) = x_1 (-4 y_1 + 2 (1- y_1)) + (1- x_1)(5 y_1 -3(1- y_1))$$

Το Σχήμα 4 παράχθηκε για τη συνάρτηση $\upsilon(x_1, y_1)$ με το λογισμικό σύστημα Scilab με τις εξής εντολές :

```
--> // Initialize
--> k=1;
--> for i=0:0.06:1,
--> x1(k)=i,
--> y1(k)=i,
--> k=k+1,
--> end;
--> // Define
--> deff( "[z]= υ(x1, y1)", "z = x1*(-4 *y1+ 2 *( 1- y1)) + (1- x1)*(5* y1-3*( 1-
y1))");
--> // Draw
--> fcontour (x1,y1,υ,20);
```

Απαιτήθηκαν δηλαδή τρία βήματα :
Στο Initialize παράγουμε μια σειρά εφικτών τιμών για το x_1 και y_1 .
Στο Define ορίζουμε τη συνάρτηση.
Στο Draw δίνουμε την εντολή δημιουργίας γραφήματος με 20 περίπου σταθμικές καμπύλες.

Το minmax θεώρημα εγγυάται βασικά ότι για οποιαδήποτε μήτρα αμοιβής Α η αντίστοιχη συνάρτηση $\upsilon(x, y) = x^{\tau} Ay$ με πεδίο ορισμού το $X \times Y$ είναι πάντα σαγματική.



Σχήμα 6.7 Σαγματική συνάρτηση προσδοκώμενης έκβασης σε μικτές στρατηγικές

Όπως τα παίγνια καθαρής στρατηγικής έτσι και τα παίγνια μικτής στρατηγικής μπορούν να έχουν περισσότερες από μια λύσεις.

Θεώρημα : Έστω παίγνιο μικτής στρατηγικής με τιμή $\alpha^* = \upsilon^* = \beta^*$ που επιτυγχάνεται για τις βέλτιστες στρατηγικές x^* και y^* του παίκτη στοίχου και στήλης αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι και οι μικτές στρατηγικές x_1 και y_1 είναι επίσης βέλτιστες για τον παίκτη στοίχου και στήλης αντίστοιχα. Τότε έχουμε:

$$\upsilon(x^*, y^*) = \upsilon(x_1, y_1) = \upsilon(x_1, y^*) = \upsilon(x^*, y_1) = \upsilon^*$$

Ένα βασικό επακόλουθο του θεωρήματος είναι ότι όταν υπάρχουν εναλλακτικές λύσεις, οι παίκτες μπορούν να επιλέξουν οποιεσδήποτε από τις βέλτιστες μικτές στρατηγικές τους και να επιτύχουν ισορροπία. Τα μη μοναδικά σαγματικά σημεία ισορροπίας είναι «συναλλάξιμα» (interchangeable) και «ισοδύναμα» (equivalent).

Τα παίγνια με μήτρα Α που έχουν σαγματικό σημείο α_{pq} για τις καθαρές στρατηγικές p και q του παίκτη στοίχου και στήλης αντίστοιχα, αποτελούν ειδική περίπτωση των παιγνίων μικτής στρατηγικής. Πράγματι οι καθαρές στρατηγικές p και q μαζί με τη τιμή του παιγνίου α_{pq} αποτελούν μια λύση και σε μικτές στρατηγικές.

<u>Θεώρημα</u> : Αν το στοιχείο α_{pq} της μήτρας Α αντιστοιχεί σε σαγματικό σημείο, τότε:

$$\alpha^* = \beta^* = \alpha_{pq}$$

και οι στρατηγικές p και q είναι βέλτιστες μικτές στρατηγικές του παίκτη στοίχου και στήλης αντίστοιχα.

6.3.4 Επίλυση των παιγνίων:

Επίλυση παιγνίων 2 × 2:

Έστω παίγνιο με μήτρα

$$A = \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix}$$

Αν το παίγνιο δεν έχει σημείο ισορροπίας σε καθαρές στρατηγικές τότε οι βέλτιστες λύσεις των δύο παικτών πρέπει να έχουν τα στοιχεία τους θετικά. Έστω υ η τιμή του παιγνίου. Τότε πρέπει να έχουμε:

$$\alpha_{11} x_1 y_1 + \alpha_{12} x_1 y_2 + \alpha_{21} x_2 y_1 + \alpha_{22} x_2 y_2 = \upsilon$$

$$x_1 (\alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2) + x_2 (\alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2) = \upsilon$$

Τα αθροίσματα στις παρενθέσεις είναι ίσα του υ, γιατί $x > 0$ οπότε από τη γραμμική συμπληρωματική απόκλιση έχουμε :

$$\alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 = \upsilon$$

$$\alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 = \upsilon$$

Με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε και τις αντίστοιχες σχέσεις για το x :

$$\alpha_{11} x_1 + \alpha_{21} x_2 = \upsilon$$
$$\alpha_{12} x_1 + \alpha_{22} x_2 = \upsilon$$

Οι τέσσερις αυτές εξισώσεις μαζί με τις

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$y_1 + y_2 = 1$$

μας επιτρέπουν να αναζητήσουμε τα βέλτιστα x , y και υ επιλύνοντας ένα σύστημα εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

6.4 Μικτές Στρατηγικές – Σημείο Ισορροπίας Nash

Εάν έχουμε ένα δι-μητρικό παίγνιο γενικού αθροίσματος, η ύπαρξη σημείου ισορροπίας στην περίπτωση καθαρών στρατηγικών δεν είναι σίγουρη. Αν όμως έχουμε την περίπτωση μικτής στρατηγικής, τότε κάθε δι-μητρικό μη-συνεργατικό παίγνιο επιδέχεται σημείο ισορροπίας. Ακόμη όμως και στην περίπτωση που το παίγνιο έχει σημεία ισορροπίας σε καθαρές στρατηγικές, το παίγνιο επιδέχεται σημεία ισορροπίας και σε μικτές στρατηγικές. Βέβαια τα σημεία αυτά μπορεί να διαφέρουν τόσο ως προς τις στρατηγικές τις οποίες αντιπροσωπεύουν όσο και ως προς την έκβαση.

Ας ορίσουμε την μικτή στρατηγική για έναν παίκτη ως μια κατανομή πιθανοτήτων στο σύνολο των καθαρών στρατηγικών του.

Ορισμός : Έστω ότι έχουμε ένα δι-μητρικό παίγνιο με πίνακες απώλειας A, B, με διάσταση mxn. Για τον I παίκτη που έχει στην διάθεση του m καθαρές στρατηγικές, μία μικτή στρατηγική του είναι ένα διάνυσμα m διάστασης:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_i \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix}$$

για το οποίο ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, i = 1,...,m$$

Αντίστοιχα αν ο παίκτης ΙΙ έχει n καθαρές στρατηγικές, μια μικτή στρατηγική του είναι ένα διάνυσμα n διαστάσεων:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_i \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

για το οποίο ισχύει:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$y_j \geq 0, j = 1,...,n$$

Για τις μικτές στρατηγικές $\chi \in X$ και $y \in Y$, η προσδοκώμενη απώλεια του I παίκτη είναι:

$$\alpha(\chi, y) = \chi^T A\, y \qquad (1)$$

ενώ η προσδοκώμενη απώλεια για τον παίκτη II είναι

$$\beta(\chi, y) = \chi^T B\, y \qquad (2)$$

Ας ορίσουμε τώρα το μη-συνεργατικό σημείο ισορροπίας.

<u>Ορισμός</u> : Έστω ότι έχουμε ένα δι-μητρικό παίγνιο με πίνακες απώλειας A, B, με διάσταση mxn. Τότε λέμε ότι ένα ζεύγος μικτών στρατηγικών (χ^*, y^*) είναι «σημείο ισορροπίας Nash», αν για κάθε άλλο ζευγάρι στρατηγικών (χ,y) επαληθεύονται οι ανισότητες:

$$\chi^T A\, y^* \geq \chi^{*T} A\, y^* \qquad (3)$$
$$\chi^{*T} B\, y \geq \chi^{*T} B\, y^* \qquad (4)$$

Το ζεύγος των τιμών (a_0^*, β_0^*), όπου

$$a_0^* = a(x^*, y^*) = x^{*T} A y^* \qquad (5)$$

και

$$\beta_0^* = \beta(x^*, y^*) = x^{*T} B y^* \qquad (6)$$

είναι η προσδοκώμενη έκβαση Nash του παιγνίου για τις στρατηγικές (χ^*, y^*).

Πώς μπορούμε όμως να επιλύσουμε τις ανισότητες (3) και (4); Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι κάθε μια από αυτές τις ανισότητες μπορεί να αντικατασταθεί από ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης μια συνάρτησης ως προς μια μεταβλητή, οπότε με την βοήθεις του γραμμικού προγραμματισμού μπορούνε να καταλήξουμε στον τρόπο επίλυσης τους. Πιο αναλυτικά η σχέση (3) αντιπροσωπεύει ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης της γραμμικής συνάρτησης f(x)= χ^T A y^* ως προς την μεταβλητή χ, ενώ η σχέση (4) παριστάνει ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης της γραμμικής συνάρτησης g(y)= χ^T A y ως προς την μεταβλητή y.

Δηλαδή αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές x,y ως εξής:

$$X = \{x = (x_1,...,x_m)^T \in \Re^m \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x \geq 0\}$$

και

$$Y = \{y = (y_1,...,y_m)^T \in \Re^n \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y \geq 0\}$$

καλούμε ένα ζεύγος μικτών στρατηγικών (χ^*, y^*) ∈ X $_\chi$ Y «σημείο ισορροπίας Nash», αν το χ^* επιλύει το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού

$$\min_{x \in X} x^T A y^* \quad (7)$$

ενώ το y επιλύει το εξής πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού

$$\min_{y \in Y} x^T B y \quad (8)$$

<u>Παρατήρηση</u>: Στην περίπτωση που οι πίνακες A, B δεν είναι πίνακες απώλειας αλλά πίνακες αμοιβής οι ανισότητες (3) και (4) έχουνε αντίθετη φορά με αποτέλεσμα τα προβλήματα του γραμμικού προγραμματισμού από τα οποία αντιπροσωπεύονται να είναι προβλήματα μεγιστοποίησης μιας συνάρτησης και όχι προβλήματα ελαχιστοποίησης ως προς μια μεταβλητή.

Υπάρχει ένα θεώρημα που εγγυάται την ύπαρξη σημείου ισορροπίας σε μικτές στρατηγικές, χωρίς να προϋποθέτει κάποιους σημαντικούς περιορισμούς.

Θεώρημα : κάθε δι-μητρικό παίγνιο σε μικτές στρατηγικές έχει ένα τουλάχιστον σημείο ισορροπίας.

Σχόλια:

1. Μια γενικευμένη απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος δόθηκε το 1950 από τον Nash, ο οποίος χρησιμοποίησε την θεωρία αμετάβλητου σημείου.

2. Τα θεωρήματα αμετάβλητου σημείου (τα πιο γνωστά από αυτά είναι το θεώρημα του Brouwer και το θεώρημα του Kakutani), είναι πολύ χρήσιμα σε κλάδους της εφαρμοσμένης ανάλυσης, όπως στον γραμμικό προγραμματισμό για την απόδειξη σύγκλισης αλγορίθμων και στα οικονομικά μαθηματικά για την απόδειξη ύπαρξης σημείων ισορροπίας.

Ορισμός : Το σύνολο

$$N[A, B] = \{a(x, y) : x \in X, y \in Y\} \quad (9)$$

ονομάζεται « μη-συνεργατικός χώρος προσδοκίας».

Το σύνολο N[A, B] μπορούμε να το παραστήσουμε γεωμετρικά στο καρτεσιανό επίπεδο με άξονες τους α,β. Για παράδειγμα αν έχουμε πίνακες διάστασης 2χ2 μπορούμε να μην λάβουμε υπόψη μια μεταβλητή για κάθε παίκτη αφού $\chi_2=1-\chi_1$ και $y_2= 1-y_1$ και να χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω αλγόριθμο για να παραστήσουμε γραφικά το σύνολο N[A, B]. (Ο αλγόριθμος αυτός είναι γραμμένος στην γλώσσα προγραμματισμού SciLab).

Αλγόριθμος:

```
κ=0;
for x1=0:0.05:1,
    for y1=0:0.05:1,
        α= α(x1, y1),
        β= β((x1, y1),
```

```
        κ=κ+1
        A(κ)=α,
        B(κ)=β,
    end;
end;
plot2d(A, B)
```

<u>Παράδειγμα</u> : (Συνέχεια του παραδείγματος Μάχη των φύλων)

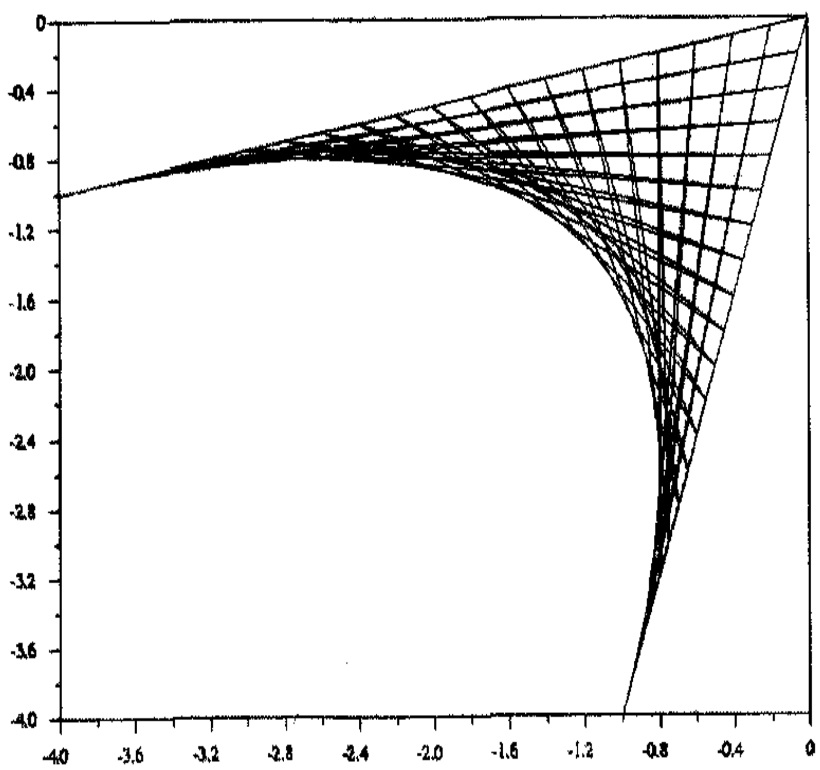
Για το παίγνιο αυτό, έχουμε:

$$a(x, y) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -4x_1 y_1 - x_2 y_2 = -4x_1 y_1 - (1-x_1)(1-y_1)$$

και

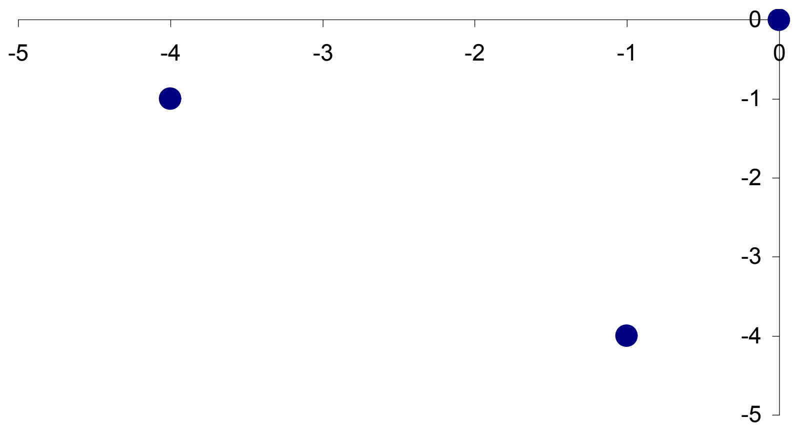
$$\beta(x, y) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -x_1 y_1 - 4x_2 y_2 = -x_1 y_1 - 4(1-x_1)(1-y_1)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τις εκφράσεις αυτές στον παραπάνω αλγόριθμο, παίρνουμε το Σχήμα 1, όπου η γραμμοσκιασμένη περιοχή είναι η γεωμετρική παράσταση του συνόλου N[A, B]. Η περιοχή αυτή φράσσεται από τις δύο ευθύγραμμες ακμές με αρχή το σημείο (0,0) και τέλος τα σημεία (-1,-4) και (-4,-1), καθώς και από την παραβολική ακμή που ενώνει τα σημεία αυτά.



Σχήμα 6.8

Παρατήρηση: Αν συγκρίνουμε το παραπάνω σχήμα με το σχήμα 6.9



Σχήμα 6.9

που παριστάνει τον συνεργατικό χώρο προσδοκίας που είχαμε κατασκευάσει κατά την αρχική μελέτη του προβλήματος, μπορούνε να διαπιστώσουμε ότι ο χώρος του σχήματος 2 είναι μεγαλύτερος. Πιο αναλυτικά διαπιστώνουμε ότι οι δύο παίκτες αν συνεργαστούν μπορούν να επιτύχουν μεγαλύτερη διακύμανση των απωλειών τους από αυτές που θα επιτύχουν αν δεν συνεργαστούν.

Για να βρούμε τις προσδοκώμενες απώλειες Nash (a_0^*, β_0^*), ψάχνουμε μεταξύ των σημείων του συνόλου N[A, B]. Από το θεώρημα Nash, ξέρουμε ότι το σύνολο αυτό δεν είναι κενό και ότι υπάρχουν οι στρατηγικές και οι απώλειες Nash (αλλά δεν γνωρίζουμε αν οι στρατηγικές και οι απώλειες αυτές είναι μοναδικές). Βάσει αυτού συμπεραίνουμε ότι στο σύνολο N[A, B] μπορεί να περιέχονται περισσότερα από ένα σημεία που να αντιστοιχούν σε διαφορετικά προσδοκώμενα αποτελέσματα Nash για το παίγνιο που έχει πίνακα τον [A, B].

<u>Ορισμός</u> : Έστω ότι τα σημεία (χ΄, y΄) και (χ΄΄, y΄΄) είναι δύο σημεία ισορροπίας Nash. Λέμε ότι τα σημεία αυτά είναι:

I. « συναλλάξιμα», αν τα σημεία (χ΄, y΄΄) και (χ΄΄, y΄) είναι και αυτά σημεία ισορροπίας Nash.

II. «ισοδύναμα», αν α(χ΄, y΄)=α(χ΄΄, y΄΄) και β(χ΄, y΄)=β(χ΄΄, y΄΄).

<u>Σχόλιο</u>:

Όπως και στις καθαρές στρατηγικές έτσι και σε αυτή την περίπτωση (μικτές στρατηγικές) τα σημεία μη-συνεργατικού σημείου ισορροπίας δεν είναι εν γένει συναλλάξιμα.

<u>Ορισμός</u> : Αν σε ένα παίγνιο όλα τα σημεία ισορροπίας είναι συναλλάξιμα και ισοδύναμα τότε λέμε ότι το παίγνιο αυτό είναι «επιλύσιμο κατά Nash»

Παράδειγμα : (Συνέχεια του παραδείγματος Μάχη των φύλων).

Όταν μελετήσαμε αυτό το πρόβλημα είδαμε ότι τα σημεία χ=(0,1), y=(1,0), χ΄=(0,1) και y΄=(1,0) είναι σημεία ισορροπίας Nash. Μπορούμε όμως να παρατηρήσουμε ότι το ζεύγος μικτών στρατηγικών $\chi'' = (4/5,1/5)^T$ και $y''=(1/5,4/5)^T$, είναι ακόμη ένα σημείο ισορροπίας για το παίγνιο με αποτέλεσμα

$$\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix} (4,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,4) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \left(-\frac{4}{5},-\frac{4}{5}\right)$$

Το σημείο (-4/5,-4/5) είναι εσωτερικό του μη συνεργατικού χώρου προσδοκίας που φαίνεται στο Σχήμα 2 και κυριαρχείται από τα ζεύγη απώλειας σε καθαρές στρατηγικές.
Η « λογική» συνεργατική έκβαση (-5/2,-5/2) που είχαμε προτείνει στην αρχική εξέταση του προβλήματος, δεν ανήκει καν στον μη-συνεργατικό χώρο προσδοκίας και έτσι δεν μπορούμε να την αποδεχτούμε σαν ένα πιθανό αποτέλεσμα του μη-συνεργατικού παιγνίου.

Παρατήρηση: Αν δούμε ξανά το πρόβλημα Μάχη των φύλων, το οποίο έχουμε εξετάσει τρεις φορές παραπάνω, μπορούμε να δούμε μερικές από τις δυσκολίες που συναντά κανείς κατά την εξέταση ενός δι-μητρικού παιγνίου γενικού αθροίσματος. Αν δούμε την πρώτη αναφορά που έγινε σε αυτό το πρόβλημα, διαπιστώνουμε ότι ακόμη και στην περίπτωση που υπάρχει ένα και μοναδικό σημείο ισορροπίας, αυτό δεν ανταποκρίνεται πολλές φορές στο σημείο ισορροπίας που θα επιθυμούσαμε σαν ουδέτεροι παρατηρητές. Στην τρίτη αναφορά του προβλήματος, διαπιστώνουμε ότι αν υπάρχουν παραπάνω από ένα σημεία ισορροπίας, τότε δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι για το ποια ακριβώς θα είναι η έκβαση του παιγνίου. Οι παράξενες αυτές παρατηρήσεις δεν είναι συνέπεια κάποιου λάθους στην έννοια σημείο ισορροπίας Nash, αλλά απορρέουν από την φύση των μη-συνεργατικών παιγνίων που εξετάσαμε. Παρόλαυτα τα παράξενα αυτά φαινόμενα δεν εμφανίζονται στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος, που είναι πλήρως ανταγωνιστικά(το κέρδος του ενός παίκτη είναι ίσο με και προέρχεται από την απώλεια του αντιπάλου του), σε αντίθεση με τα δι-μητρικά παίγνια, στα οποία είναι σύμφυτη η δυνατότητα συνεργασίας.

6.4.1 Επίπεδα ασφαλείας σε μικτές στρατηγικές

Τα επίπεδα ασφαλείας σε μικτές στρατηγικές είναι μια απ΄ ευθείας απορία των ορισμών που δώσαμε για τα επίπεδα ασφαλείας σε παίγνια με καθαρές στρατηγικές. Έτσι και στα παίγνια με μικτές στρατηγικές τα επίπεδα ασφαλείας παρέχουν ένα αποδεκτό όριο απώλειας για τους παίκτες.

<u>Ορισμός</u> : Έστω ότι έχουμε ένα παίγνιο με πίνακα απώλειας [A, B], ορίζουμε το «προσδοκώμενο επίπεδο ασφαλείας» ή «ανώτατη απώλεια» ή «minmax απώλεια» για τον παίκτη I να είναι:

$$\overline{a}^* = \min_{x \in X} \{\max_{y \in Y} \alpha(x, y)\} \quad (1)$$

και το «προσδοκώμενο επίπεδο ασφαλείας» για τον παίκτη II να είναι:

$$\overline{\beta}^* = \min_{y \in Y} \{\max_{x \in X} \beta(x, y)\} \quad (2)$$

οι στρατηγικές $\overline{x}, \overline{y}$ για τις οποίες

$$\overline{a}^* = \{\max_{y \in Y} \alpha(\overline{x}, y)\} \quad (3)$$

και

$$\overline{\beta}^{*} = \{\max_{x \in X} \beta(x, \overline{y}\} \qquad (4)$$

για τις οποίες δηλαδή επιτυγχάνονται τα επίπεδα αυτά, ονομάζονται «στρατηγικές ασφαλείας» ή « στρατηγικές minmax» των παικτών.

<u>Παράδειγμα</u> : (Συνέχεια του παραδείγματος Μάχη των φύλων).

Ψάχνουμε μα βρούμε το επίπεδο ασφαλείας του Πέτρου σε μικτές στρατηγικές, δηλαδή ψάχνουμε να βρούμε την τιμή:

$$\min_{x \in X} \{ \max_{y \in Y} \alpha(x, y)\}$$

από το παράδειγμα 2 της παραπάνω θεματικής ενότητας έχουμε:

$\alpha(\chi,y)= (-5\chi_1+1)\, y_1 + x_1 -1$,

που είναι γραμμικό ως προς y_1. Έτσι το εσωτερικό πρόβλημα μεγιστοποίησης, με δεδομένο το χ_1 γίνεται:

$$x_1 - 1 + \max_{0 \le y_1 \le 1} (-5x_1 + 1)\, y_1 \ ,$$

όπου διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- $(-5\chi_1+1)\geq 0$, ή $\chi_1 \leq 1/5$, και

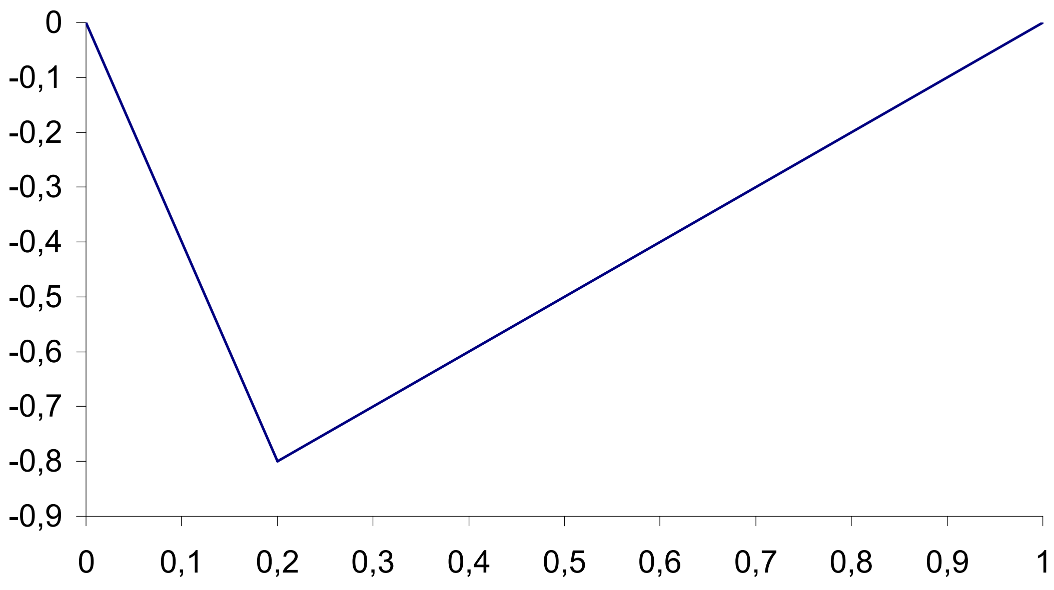
- $(-5\chi_1+1)\leq 0$, ή $\chi_1 \geq 1/5$.

Στην πρώτη περίπτωση, έχουμε μέγιστο για τιμή y_1=1, ενώ στην δεύτερη για την τιμή y_1=0 για το y_1. Αν χρησιμοποιήσουμε αυτές τις τιμές το εσωτερικό πρόβλημα μεγιστοποίησης απαλείφεται και έχουμε μόνο το εξωτερικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης που παίρνει την μορφή ελαχιστοποίησης μιας τμηματικώς γραμμική συνάρτηση.

Δηλαδή:

$$\min \begin{cases} -4x_1, \alpha\nu \ \ 0 \le x_1 \le \frac{1}{5} \\ x_1 - 1, \alpha\nu \ \ \frac{1}{5} \le x_1 \le 1 \end{cases}$$

Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα η συνάρτηση ελαχιστοποιείται στο σημείο χ_1=1/5 και τα επίπεδα ασφαλείας για τον Πέτρο είναι χ_2= -4/5 και χ_2=4/5.



ΣΣχήμα 6.10

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε και το επίπεδο ασφαλείας της Αριάδνης. Τότε θα έχουμε ότι οι μικτές στρατηγικές της Αριάδνης είναι οι $y_1 = 4/5$ και $y_2 = 1/5$ και το επίπεδο ασφαλείας της είναι –4/5.

<u>Σχόλιο</u>: Παρατηρούμε ότι τα επίπεδα ασφαλείας (-4/5 , -4/5) είναι μια έκβαση ισοδύναμη με την έκβαση του Nash σε μικτές στρατηγικές και ότι αν χρησιμοποιήσουμε τις στρατηγικές Nash θα έχουμε τελικά απώλειες ίσες με τα επίπεδα ασφαλείας που υπολογίσαμε παραπάνω. Το γεγονός ότι τα επίπεδα ασφαλείας μας δίνουν την ίδια απώλεια για τους παίκτες με αυτή που απορρέει αν χρησιμοποιήσουμε τις μικτές στρατηγικές Nash, δεν ισχύει πάντα.

<u>Παρατήρηση</u>: Τα επίπεδα ασφαλείας των παικτών είναι τόσο απαισιόδοξα σε παίγνια με πίνακες απώλειας (αμοιβής), έτσι ώστε αν οι παίκτες χρησιμοποιήσουν τις στρατηγικές ασφαλείας τότε μπορεί να οδηγηθούν σε απώλειες (αμοιβές) που είναι κατώτερες (ανώτερες) από άποψη κυριαρχίας από τα επίπεδα ασφαλείας για κάθε παίκτη. Δηλαδή αν οι στρατηγικές $\bar{x}, \bar{y}$ είναι οι στρατηγικές ασφαλείας και $\overline{a}^*$, $\overline{\beta}^*$ είναι τα επίπεδα ασφαλείας είναι πιθανόν να ισχύει:

$\alpha(\bar{x}, \bar{y}) \leq \overline{a}^*$

και

$\beta(\bar{x}, \bar{y}) \leq \overline{\beta}^*$

σε παίγνια με πίνακες απώλειας. Η παρουσία αυτού του παράδοξου φαινομένου οφείλεται στην φύση των δι-μητρικών παιγνίων. Ουσιαστικά σε ένα τέτοιο παίγνιο ο παίκτης Ι υπολογίζει το επίπεδο ασφαλείας του, σκεπτόμενος ότι ο παίκτης ΙΙ προσπαθεί να του μεγιστοποιήσει την απώλεια, κάτι το οποίο ισχύει στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος, αλλά δεν ισχύει στα δι-μητρικά παίγνια, στα οποία ο παίκτης ΙΙ δεν ενδιαφέρεται τόσο για την απώλεια του παίκτη Ι, αλλά προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει την δική του απώλεια.

6.5 Παίγνια ενάντια στην Φύση

Όπως και αν ταξινομήσει κανείς τις κατηγορίες παιγνίων, σε όλες τις περιπτώσεις, δύο νοήμονες αντίπαλοι καλούνται να λάβουν μέρος σε ένα παίγνιο επιθυμώντας ο καθένας, το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα για εκείνον. Ακόμη λοιπόν και στην κατηγορία των παιγνίων που ο κάθε παίκτης δεν γνωρίζει την στρατηγική του αντιπάλου του και οι δύο παίκτες στηρίζονται στο γεγονός ότι ο αντίπαλος του σκέφτεται ορθολογικά και παίρνουν κάποιες αποφάσεις για το ποια στρατηγική θα ακολουθήσουν με σκοπό την μεγιστοποίηση του κέρδους τους ή την ελαχιστοποίηση της πιθανής απώλειας τους.

Στην περίπτωση όμως, που ο ένας από τους παίκτες έστω ο I, αντιπροσωπεύει την τύχη ή κάποιο φυσικό, κοινωνικό ή άλλο περιβάλλον, που είναι μάλλον άγνωστο, τότε η παραπάνω υπόθεση δεν ισχύει. Πιο συγκεκριμένα τα κίνητρα των παικτών δεν είναι πια ούτε ξεκάθαρα ούτε γνωστά, διότι ότι αντιπροσωπεύει ο παίκτης I, που συχνά αναφέρεται ως φύση ή σύστημα, είναι άγνωστο και ως προς την ύπαρξη αλλά και ως προς τις προθέσεις του για τον παίκτη II. Πολλές φορές και ο παίκτης I (φύση) αγνοεί την ύπαρξη του παίκτη II. Έτσι λοιπόν στο παίγνιο αυτό δεν είναι δυνατό να εντοπίσει κανείς ούτε στοιχεία συνεργασίας αλλά ούτε και ανταγωνισμού μεταξύ των παικτών. Παίγνια αυτού του τύπου ονομάζονται «παίγνια ενάντια στην φύση». Οι καθαρές στρατηγικές του παίκτη I ονομάζονται καταστάσεις της φύσης ή του συστήματος, ενώ οι στρατηγικές του νοήμονος παίκτη II αντιπροσωπεύουν διάφορες ενέργειες τις οποίες μπορεί να κάνει, ή κάποιες δράσεις που μπορεί να αναλάβει.

Επειδή ο νοήμων παίκτης λαμβάνει τις αποφάσεις του βασιζόμενος στις αβέβαιες ή και μηδενικές γνώσεις του για την φύση, τα προβλήματα αυτά είναι γνωστά και ως « προβλήματα αποφάσεων υπό αβεβαιότητα». Οι γνώσεις που ο νοήμων παίκτης μπορεί να αποκτήσει για την φύση είναι κυρίως σε μορφή πιθανοτήτων που προκύπτουν από ιστορικά δεδομένα, από παρατηρήσεις ή και από προσεκτικά στατιστικά πειράματα που ίσως μπορεί να πραγματοποιήσει.

Τα δεδομένα ενός τέτοιου παιγνίου με την φύση ως παίκτη I και τον νοήμονα παίκτη II, οργανώνονται συνήθως σε μορφή πίνακα A, όπου οι γραμμές παριστάνουν τις καταστάσεις της φύσης και οι στήλες τις ενέργειες που μπορεί να κάνει ο παίκτης II. Με κάθε ζεύγος κατάστασης i και ενέργειας j συνδέεται η έκβαση α_{ij} που αντιστοιχεί στην απώλεια του παίκτη II, όταν αυτός προβεί στην ενέργεια I, ενώ η φύση έχει περιέλθει στην κατάσταση j. Ο σκοπός του παίκτη ΙΙ είναι να επιλέξει μία απόφαση, η οποία θα ελαχιστοποιήσει όσο είναι δυνατόν την πιθανή απώλεια του.

Ένας πίνακας Α θα έχει την μορφή:

		II: Νοήμων παίκτης Στρατηγικές ή Ενέργειες					
		1	2	.	.	.	n
I: Φύση Στρατηγικές ή καταστάσεις	1	α_{11}	α_{12}	.	.	.	α_{1n}
	2	α_{21}	α_{22}	.	.	.	α_{2n}
		.	.	.			.
	.	.					
	.	.					
	m	α_{m1}	α_{m2}	.	.	.	α_{mn}

Παράδειγμα:

Η απόφαση αν θα πρέπει κανείς να έχει ή όχι ασφάλεια στο αυτοκίνητο του μπορεί να περιγραφεί από ένα παίγνιο ενάντια στην φύση. Μια απλή μορφή του μπορεί να είναι:

		II: Κάτοχος Αυτοκινήτου	
		Ασφαλισμένος	Ανασφάλιστος
I: Φύση	Όχι ατύχημα	30000	0
	Ατύχημα	120000	3000000

Παρατηρούμε λοιπόν ότι εάν ο κάτοχος του αυτοκινήτου έχει ασφαλίσει το αυτοκίνητο του και δεν του συμβεί κάποιο ατύχημα, τότε θα έχει μια απώλεια 30000 δρχ, αν όμως του συμβεί κάποιο ατύχημα τότε θα έχει απώλεια 120000, ενώ εάν δεν έχει ασφαλίσει το αυτοκίνητο του και δεν του συμβεί κάποιο ατύχημα δεν θα έχει καθόλου απώλειές ενώ αν του συμβεί κάποιο ατύχημα θα έχει μια μεγάλη απώλεια 3000000δρχ. Αν και ο κίνδυνος ενός ατυχήματος είναι σχετικά μικρός (υπό φυσιολογικές συνθήκες), σχεδόν κανένας ιδιοκτήτης αυτοκινήτου δεν θα ήθελε να δώσει 3000000 δρχ, αν του συμβεί κάποιο ατύχημα, μόνο και μόνο για να μην πληρώσει 30000 δρχ σε ασφάλιστρα. Σε αυτή την περίπτωση ο ιδιοκτήτης του αυτοκινήτου (που θα σκεφτεί όπως περιγράψαμε παραπάνω), αντιλαμβάνεται την φύση «εχθρική « αν και δεν γνωρίζει τις προθέσεις της. Παρατηρούμε λοιπόν ότι σκεφτόμενοι συντηρητικά προετοιμαζόμαστε για το χειρότερο. Αυτή είναι μια ενέργεια στην οποία μπορεί να προβεί ένας κάτοχος αυτοκινήτου, αλλά υπάρχουνε και άλλες πιο ριψοκίνδυνες.

Βασική Υπόθεση: Οι πιθανότητες με τις οποίες η φύση μπορεί να περιέλθει στις καταστάσεις 1,2,…,m είναι άγνωστες. Ούτε υπάρχει αρκετή πληροφόρηση για να συμπεράνουμε ότι οι πιθανότητες αυτές είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Παρατηρούμε ότι χωρίς αυτή την υπόθεση, θα μπορούσαμε εύκολα μνα υπολογίσουμε τις πιθανότητες , όποτε δεν θα είχαμε πλέον πρόβλημα λήψης απόφασης, υπό αβεβαιότητα. Διάφορα κριτήρια έχουνε προταθεί για την λήψη αποφάσεων υπό αβέβαιες συνθήκες. Η βασική διαφορά μεταξύ των κριτηρίων αυτών έγκειται στο πόσο συντηρητικός ή όχι εμφανίζεται ο νοήμων παίκτης ΙΙ κάτω από τις συνθήκες αβεβαιότητας που επικρατούν. Η επιλογή βέβαια του κριτηρίου εξαρτάται και από διάφορα άλλα χαρακτηριστικά που πιθανόν να έχει το συγκεκριμένο παίγνιο κάθε φορά. Για παράδειγμα ο παίκτης ΙΙ θα είναι πιο συντηρητικός στις αποφάσεις του, αν τα ποσά που θα μπορούσε να χάσει είναι πολύ μεγάλα για εκείνον, αν η επιβίωση του κρίνεται από την έκβαση του παιγνίου, ενώ θα μπορούσε να είναι πιο ριψοκίνδυνος αν είχε μεγάλη οικονομική δυνατότητα, ή αν τα ποσά που πιθανόν να χάσει δεν επιβαρύνουν πολύ την ομαλή πορεία της ζωής του. Κάποια γνωστά κριτήρια λήψης μια απόφασης είναι τα:

- Κριτήριο Bayes και Laplace
- Κριτήριο Minmax
- Minmax κριτήριο Savage
- Σύνθετα κριτήρια Bayes κ.α.

6.6 Ένα χαρακτηριστικό Πρόβλημα

PRISONER'S DILEMMA

Είναι ένα από τα πιο αντιπροσωπευτικά παραδείγματα στη ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ, στην περίπτωση των κυρίαρχων στρατηγικών, με 2 ή περισσότερους παίκτες.

- Οι στρατηγικές πρέπει να υιοθετηθούν από τους παίκτες χωρίς να γνωρίζουν πλήρως τι θα κάνουν οι άλλοι παίκτες .
- Οι παίκτες ακολουθούν dominant strategies οι οποίες δεν οδηγούν πάντα στο βέλτιστο αποτέλεσμα.

Αναφέρεται στην εξής κατάσταση:

Ένα ζευγάρι κακοποιών συλλαμβάνεται από τις Αρχές και κρατούνται σε διαφορετικά κελιά. Πρέπει να αποφασίσουν τη στάση που θα κρατήσουν (θα ομολογήσουν ή όχι) χωρίς να γνωρίζει ο ένας την στρατηγική του άλλου. Ο εισαγγελέας κάνει με τον κάθε κρατούμενο μια συμφωνία για την ποινή που θα του επιβληθεί ανάλογα με τη στάση που θα κρατήσει ο κρατούμενος αλλά και σε συνδυασμό με τη στάση του συγκατηγορούμενού του. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα κλασσικό ζευγάρι κακοποιών, την Bonnie και τον Clyde. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι ποινές που θα τους επιβληθούν για κάθε συνδυασμό στρατηγικών που μπορούν να ακολουθήσουν.

		Clyde	
		Ομολογεί	Δεν ομολογεί
Bonnie	Ομολογεί	4 χρόνια φυλάκιση	1 χρόνο φυλάκιση για τη Bonnie και 8 για τον Clyde
	Δεν ομολογεί	8 χρόνια φυλάκιση για τη Bonnie και 1 για τον Clyde	3 χρόνια φυλάκιση

Το ακόλουθο δέντρο αποφάσεων περιγράφει τις στρατηγικές και τις αποφάσεις που πρέπει υιοθετηθούν από τους παίκτες ώστε το αποτέλεσμα να είναι βέλτιστο σε κάθε περίπτωση :

Αν ο Clyde ομολογήσει

Bonnie

Ομολογεί → 4 χρόνια φυλάκιση

Δεν ομολογεί → 8 χρόνια φυλάκιση

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα του Prisoner's Dilemma η απόφαση θα ληφθεί μόνο μια φορά. Σε τέτοιου είδους παίγνια ο κάθε παίκτης ακολουθεί μια στρατηγική η οποία είναι βέλτιστη κατά τη γνώμη του χωρίς να τον ενδιαφέρουν οι επιπτώσεις που θα έχει στον τρόπο σκέψης του άλλου παίκτη.

Αν οι δύο παίκτες βρίσκονταν σε μια κατάσταση όπου θα χρειάζονταν να πάρουν πολλές αποφάσεις, οι οποίες θα επηρεάζουν και τους δύο, τότε θα τους ενδιέφερε πάρα πολύ η επίδραση απόφασής τους στις μελλοντικές αποφάσεις του άλλου παίκτη. Ίσως τότε η κατάληξη του παιγνίου να ήταν τελείως διαφορετική. Σε αυτή την περίπτωση τον κάθε παίκτη δεν τον ενδιαφέρει μόνο η «απόδοση» του παιγνίου στο συγκεκριμένο
«γύρο» αλλά η «ολική απόδοση» που θα λάβει όταν το παίγνιο τελειώσει. Ο παίκτης Ι δεν θα ακολουθούσε μια στρατηγική που σε αυτό το «γύρο» θα του δώσει μια ικανοποιητική αμοιβή αλλά είναι τέτοια που στον επόμενο «γύρο» η αντίδραση του παίκτη ΙΙ θα προκαλέσει στον Ι μια μεγαλύτερη απώλεια. Θα πρέπει λοιπόν να ακολουθηθεί μια αλληλουχία στρατηγικών που θα διδάξουν στον αντίπαλο ότι το βέλτιστο αποτέλεσμα είναι αυτό που είναι καλύτερο και για τους δύο.

Η επίλυση του Prisoner's Dilemma και των προβλημάτων τέτοιου τύπου έχει απασχολήσει αρκετά τους ερευνητές αν και η εύρεση βέλτιστου αλγόριθμου είναι πολύ δύσκολη, λόγω του πλήθους των διαφορετικών συνθηκών αλλά και της διαφορετικής ιδιοσυγκρασίας των παικτών.
Παρόλο που δεν υπάρχει μια στρατηγική που να είναι βέλτιστη υπό κάθε συνθήκη, υπάρχει μια που έχει πολύ καλά αποτελέσματα σε μεγάλη ποικιλία καταστάσεων και είναι η στρατηγική Tit For Tat. Η βασική αρχή που διέπει αυτή τη μέθοδο είναι:

1. Η πρώτη κίνηση του παίκτη που ακολουθεί Tit For Tat είναι πάντα η συνεργασία.
2. Στη συνέχεια μιμείται τη στρατηγική που ακολούθησε ο αντίπαλος στον προηγούμενο «γύρο» του παιγνίου.

Ουσιαστικά είναι η μαθηματικοποιημένη μορφή της ιδέας :
«Οφθαλμός αντί οφθαλμού και οδόντας αντί οδόντος»

<u>Παράδειγμα</u> :
Έστω δύο παίκτες ο Π_1 και ο Π_2. Ο Π_1 ακολουθεί κάποια στρατηγική που θεωρεί βέλτιστη ενώ ο Π_2 ακολουθεί τη μέθοδο Tit For Tat. Στον επόμενο πίνακα βλέπουμε τις κινήσεις τους στους πρώτους πέντε «γύρους» του παιγνίου.

	$1^{ος}$	$2^{ος}$	$3^{ος}$	$4^{ος}$	$5^{ος}$

Π_1	Επίθεση	Συνεργασία	Συνεργασία	Επίθεση	Επίθεση
Π_2	Συνεργασία	Επίθεση	Συνεργασία	Συνεργασία	Επίθεση

Παρατηρούμε ότι ο Π_2 αρχικά συνεργάζεται και μετά απλώς αντιγράφει την κίνηση που έκανε ο αντίπαλος στον προηγούμενο «γύρο».

Ένας απλός αλγόριθμος σε ψευδοκώδικα για την Tit For Tat είναι ο ακόλουθος :

```
#define DEFECT 0
#define COOPERATE 0

All_D ( ) {
  return DEFECT
}

Tit_for_Tat (int partner_last_move) {
  if ( partner_last_move == DEFECT )
    return DEFECT
  else
    return COOPERATE
}
```

Μια παραλλαγή της Tit For Tat είναι η Tit For Two Tats. Σε αυτή τη μέθοδο ο παίκτης που την ακολουθεί ξεκινά με συνεργασία και επιτίθεται μόνο μετά από δύο συνεχόμενες επιθέσεις του αντιπάλου ενώ συνεργάζεται αμέσως μόλις συνεργαστεί ο αντίπαλος.

Η πρώτη στήλη του ακόλουθου πίνακα περιέχει τα ζεύγη των δύο προηγούμενων κινήσεων του αντιπάλου ενώ η δεύτερη περιέχει την αντίδραση του παίκτη που παίζει με Tit For Two Tats.

Ζεύγη Κινήσεων	Αντίδραση
Συνεργασία, Συνεργασία	Συνεργασία
Συνεργασία, Επίθεση	Συνεργασία
Επίθεση,Συνεργασία	Συνεργασία
Επίθεση, Επίθεση	Επίθεση

Η μέθοδος Tit For Tat είναι «καλή» γιατί ξεκινάει πάντα με συνεργασία αλλά κάθε επίθεσή του ο αντίπαλος τη χρεώνεται στον επόμενο «γύρο» δεχόμενος επίθεση από τον παίκτη που ακολουθεί την Tit For Tat.
Τη δύναμη που έχει η Tit For Tat στο να προάγει τη συνεργασία τη μελέτησε ο Robert Axelrod στο βιβλίο του The Evolution of Cooperation (Basic Books, 1984). Αυξάνοντας τους «γύρους» του παιγνίου εξασθενεί η λογική του πραγματικού Prisoner's Dilemma, ενώ αντιθέτως ενδυναμώνεται αυξάνοντας του παίκτες.
Ο Axelrod προτείνει τέσσερις συμβουλές για να κερδίζουμε σε παίγνια σαν το Prisoner's Dilemma :

1. Να μην είσαι κακός με τους άλλους παίκτες
2. Να μην είσαι ο πρώτος που θα επιτεθεί
3. Να μην είσαι πολύ έξυπνος
4. Να απαντάς με επίθεση ή συνεργασία ανάλογα με το τι δέχτηκες.

«Οι άνθρωποι, χρησιμοποιώντας τη λογική διορατικότητα και την ικανότητά τους να διαμορφώνουν το κόσμο γύρω τους, έχουν τη δυνατότητα να προάγουν τη συνεργασία.»
Ο Axelrod προτείνει να εφαρμόζουμε αυτές τις αρχές στην καθημερινή μας ζωή και να αντιμετωπίζουμε τους συνανθρώπους μας εφαρμόζοντας Tit For Tat.
Η επίλυση τέτοιων παιγνίων γίνεται και με τη βοήθεια «γενετικών αλγορίθμων». Οι γενετικοί αλγόριθμοι είναι «unprogrammed programs» τα οποία ξεκινάνε με τυχαίες κινήσεις και έχουν τη δυνατότητα να «αναπαράγονται», χρησιμοποιώντας τους κανόνες της φυσικής εξέλιξης, δίνοντας «απογόνους» που είναι καλύτεροι στην επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος κάθε φορά. Έτσι από «γενιά» σε «γενιά», μαθαίνοντας από τα λάθη του, ο γενετικός αλγόριθμος καταλήγει στο βέλτιστο ή τουλάχιστον στον καλύτερο δυνατό αλγόριθμο, ο οποίος είναι σχεδόν τόσο καλός όσο και η Tit For Tat και δίνει μια ικανοποιητική αλλά όχι μοναδική λύση στο πρόβλημα. Αν και κάποιες φορές οι γενετικοί αλγόριθμοι είναι καλύτεροι στην επίλυση του Prisoner's Dilemma, η Tit For Tat κερδίζει τις περισσότερες φορές. Επίσης η Tit For Tat εξελίσσεται ως η καλύτερη όλων των γενετικά ορισμένων αλγορίθμων, και έτσι αν οι άνθρωποι δεν την είχαν σκεφτεί ποτέ, θα την είχαν σίγουρα «σκεφτεί» οι υπολογιστές για αυτούς.

6.7 Βιβλιογραφία

[1] Fink, E. C., Gates, S.,& Humes B. D.(1998) GAME THEORY TOPICS, Sage University Papers Series on Quantitative Applications in the Social Sciences, 07-122.Thousand Oaks, CA: Sage.

[2] Robert J. Aumann and Sergiu Hart (1992). Handbook of Game Theory. North-Holland.

[3] Arnold, Statistical pattern recognition, (1999), ISBN 0340741643.

[4] Berger, James O, Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis

[5] http:://www.econ.rochester.edu/eco108

[6] http://www course.fas.harvard.edu

[7] http://gamethory.net

[8] http://GameTheory-inGreek.htm

[9] http://verenike.ergasya.tuc.gr/~sakis/GameTheory.html

[10] http://william-king.www.drexel.edu/top/class/histf.html

[11] http://www.dmst.aueb.gr/gr/Courses/4sem/19_math_prog/PPTS/THEORIA_PAIGNION.doc

[12] http://plato.stanford.edu/entries/game-heory/#PD

[13] http://www.pitt.edu/~jduffy/econ1200/Lectures.htm

[14] http://www.bsos.umd.edu/econ/econ414/new_page_2.htm

[15] http://icg.fas.harvard.edu/~ec1052/lecture/index.html

[16] http://web.mit.edu/14.12/www/

[17] http://www.u.arizona.edu/~mwalker/431LecNotes.htm

[18] http://www.courses.fas.harvard.edu/~gov2005/Lectures/

[19] http://research.microsoft.com/users/breese/tutorial /

[20] http://www.cc.gatech.edu/classes/AY2002/cs4640_spring/ Bayes.pdf

[21] http://webcourse.technion.ac.il/236607/Winter2002-2003/ho/WCFiles/Lect1.ppt

[22] http://faculty.cs.tamu.edu/rgutier/courses/cs790_wi02/l4.pdf

[23] http://www.ece.umd.edu/class/enee408g/lecture/408F02_lec7.pdf

[24] http://www.site.uottawa.ca/~nat/Courses/CSI5387/ML_Lecture_6.ppt

[25] http://www.icg.tu-graz.ac.at/~Education/Vorlesung/BVMU_VO/WS2003/vo07_03s.pdf

[26] http://www.ee.columbia.edu/~vittorio/Lecture5.pdf

[27] http://www.cs.tcd.ie/Padraig.Cunningham/nds101/BayesianNetworks.ppt

[28] http://www.ai.mit.edu/courses/6.825/syllabus

[29] http://webcourse.technion.ac.il/236607/Winter2002-2003/ho/WCFiles/Lect1.ppt

[30] http://www.statistics.com/content/bookstore/Bayes/carlin.php3

[31] http://www.cs.berkeley.edu/~daf/bookpages/Slides/Templatematching.ppt

[32] http://www.eee.metu.edu.tr/~alatan/Courses/pr02.pdf

[33] http://www.stats.wits.ac.za/about/stats300.html

[34] http://www.eas.asu.edu/~morrell/598/lecture1.pdf

[35] http://prlab.ee.memphis.edu/frigui/ELEC7901/ BAYES/BayesDecis.html

[36] http://www.statslab.cam.ac.uk/~rrw1/stats/S16.pdf

[37] http://www.eee.metu.edu.tr/~alatan/Courses/pr02.pdf

[38] http://www.oakland.edu/~bouchaff/PatternRecog/pdfslides/CSE616ch2part1.pdf
[39] ALT, J., CALVERT, R. L., arid HUMES, B. D. (1988) "Reputation and hegemonic stability: A game theoretic analysis." American Political Science Review 82: 445-466.
[40] ARROW, K. J. (1951) Social Choice and Individual Values. New York: Wiley.
[41] AXELROD, R. (1980a) "Effective choice in the Prisoners' Dilemma." Journal of Conflict Resolution 24: 3-25.
[42] AXELROD, R. (1980b) "More effective choice in the Prisoners' Dilemma." Journal of Conflict Resolution 24: 379-403.
[43] AXELROD, R. (1981) "The emergence of cooperation among egoists." American Political Science Review 75: 306-318. AXELROD, R. (1984) The Evolution of Cooperation. New York: Basic Books.
[44] BINMORE, K. (1992) Fun and Games: A Text on Game Theory. Lexington, MA: D.C. Heath.
[45] BRAMS, S. J. (1985) Superpower Games: Applying Game Theory to Superpower Conflict. New Haven, CT: Yale University Press.
[46] BRAMS, S. J,, and KILGOUR, M. D. (1988) Theory and National Security. New York: Basil Blackwell.
[47] CALVERT, R. L. (1987) "Reputation and legislative leadership." Public Choice 55: 81-119.
[48] COHEN, R. E. (1995) Washington at Work. Needham Heights, MA: Allyn & Bacon.
[49] FEARON, J. (1994) "Signaling versus the balance of power and interests." Journal of Conflict Resolution 38: 236-269.
[50] FINK, E. C, HUMES, B. D., and SCHWEBACH, V. L. (1997) "The size principle and the strategic basis of an alliance: Formalizing intuitions." International Interactions 22: 279-294.
[51] FUDENBERG, D., and MASKIN, E. (1986) "The Folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information." Econometrica 54: 533-554.
[52] GATES, S., and HILL, J. S. (1997) "Democratic accountability and governmental innovation in the use of non-profit organizations." Policy Studies Review 14: 00CM300.
[53] GATES, S., and HUMES, B. D. (1997) Games, Information, and Politics: Applying Game Theoretic Models to Political Science. Ann Arbor: University of Michigan Press.
[54] GIBBONS, R. (1992) Game Theory for Applied Economists. Princeton: Princeton University Press.
[55] HARGREAVES HEAP, S., and VAROUFAKIS, Y. (1995) Game Theory: A Critical Introduction. London: Routledge.
[56] HARSANYI, J. (1967) "Games Of incomplete information played by Bayesian players." Management Science 14: 159-182, 320-334, 486-502.
[57] KREPS, D. M., and WILSON, R. (1982) "Reputation and incomplete information." Journal of Economic Theory 27: 253-279. LUCE, R. D., and

RAIFFA, H. (1957) Games and Decisions: Introduction and Critical Survey. New York: Wiley & Sons.

[58] MAYNARD SMITH, J. (1982) Evolution and the Theory of Games. Cambridge: Cambridge University Press.

[59] MAYNARD SMITH, J., and PRICE, G. R. (1973) "The logic of animal conflict." Nature 246(2): 15-18.

[60] MILGROM, P., and ROBERTS, J. (1982) "Predation, reputation, and entry deterrence." Journal of Economic Theory 27: 280-312.

[61] MORROW, J. (1989) "Capabilities, uncertainty, and resolve: A limited information mode! of crisis bargaining." American Journal of Political Science 33: 941-972.

[62] MORROW, J, (1994) Game Theory for Political Scientists. Princeton: Princeton University Press.

[63] MYERSON, R. (1991) Game Theory: Analysis of Conflict. Cambridge, MA: Harvard University Press.

[64] NICHOLSON, M. (1989) Formal Theories in International Relations. New York; Cambridge University Press.

[65] ORDESHOOK, P. C, (1986) Game Theory and Political Theory. Cambridge: Cambridge University Press.

[66] ORDESHOOK, P. C. (1992) A Political Theory Primer. London: Routledge.

[67] OYE, K. A. (ed.) (1986) Cooperation Under Anarchy. Princeton: Princeton University Press.

[68] POWELL, R. (1987) "Crisis bargaining, escalation, and MAD." American Political Science Review 81: 717-735.

[69] RASMUSEN, E. (1989) Games and Information. Cambridge: Basil BlackweU.

[70] SCHELLING, T (1966) Arms and Influence. Cambridge, MA: Harvard University Press.

[71] SCHELLING, T. (1978) Micromotives and Macrobehavior. New York: Norton.

[72] SCHWELLER, R. (1993) "Tripolarity and the Second World War." International Studies Quarterly 37: 73-107.

[73] SELTEN, R. (1978) "The chain-store paradox." Theory and Decision 9: 127-159.

[74] SNYDER, G. H. (1971) "'Prisoner's Dilemma' and 'Chicken' models in international politics." International Studies Quarterly 15: 66-103.

[75] SNYDER, G. H., and DIESING, P. (1977) Conflict Among Nations. Princeton: Princeton University Press.

[76] TAYLOR, M. (1976) Anarchy and Cooperation. London: Wiley.

[77] TAYLOR, M. (1987) The Possibility of Cooperation. Cambridge: Cambridge University Press.

[78] TAYLOR, M., and WARD, H. (1982) "Chickens, whales, and lumpy goods: Alternative models of public goods provision." Political Studies 30: 350-370.

[79] TROCKEL, W. (1986) "The chain-store paradox revisited." Theory and Decision 21: 163-179.