

## Decision Making Theory

Computer Engineering and Informatics

University of Patras

Likothanassis Spyridon Professor of Informatics CEID | likothan@ceid.upatras.gr

Sampanis Nikolaos PhD Candidate CEID | nsampanis@upatras.gr

### TUTORIAL 2 – December 7, 2023

#### PROBLEM 1 LIVE

Σε μια κλινική οι ασθενείς οι οποίοι πιθανολογείται ότι πάσχουν από Ηπατίτιδα C περνούν από ένα τεστ ανίχνευσης αντισωμάτων στο αίμα τους. Έστω :

H «Ο ασθενής πάσχει από τον ιό της Ηπατίτιδας»

nH «Ο ασθενής δεν πάσχει από τον ιό της Ηπατίτιδας»

Pos «Το τεστ του ασθενή είναι θετικό στον ιό»

Neg «Το τεστ του ασθενή είναι αρνητικό στον ιό»

Εμπειρικά έχουν καταγραφεί οι ακόλουθες πιθανότητες:  $P(H)=0.15$  ,  $P(Pos|H)=0.95$  ,  $P(Pos|nH)=0.02$

Ποια η πιθανότητα ένας ασθενής να πάσχει από τον ιό της Ηπατίτιδας C εάν το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό;

#### PROBLEM 2 HOMEWORK

Σε μια κλινική οι ασθενείς οι οποίοι πιθανολογείται ότι νοσούν από Covid περνούν από ένα τεστ ανίχνευσης αντισωμάτων στο αίμα τους. Έστω ότι :

C « Ο ασθενής πάσχει από Covid»

nC « Ο ασθενής δεν πάσχει από Covid»

Pos «Το τεστ του ασθενή είναι θετικό στον ιό»

Neg «Το τεστ του ασθενή είναι αρνητικό στον ιό»

Εμπειρικά έχουν καταγραφεί οι ακόλουθες πιθανότητες :  $P(C)=0.25$  ,  $P(Pos|C)=0.95$  ,  $P(Pos|nC)=0.01$

Ποια η πιθανότητα ένας ασθενής να πάσχει από τον ιό της Ηπατίτιδας C εάν το αποτέλεσμα του τεστ είναι θετικό;

#### PROBLEM 3 LIVE

Προσπαθούμε να αποφασίσουμε εάν θα πρέπει να ξεκινήσουμε τις διαδικασίες εύρεσης πετρελαίου σε μία συγκεκριμένη περιοχή των Εμιράτων την οποία κατέχουμε ή όχι. Υπάρχουν δύο πιθανές καταστάσεις της φύσης :

$\omega_1$  : « Η περιοχή έχει πετρέλαιο» με πιθανότητα 0.2

$\omega_2$  : « Η περιοχή δεν έχει πετρέλαιο»

Θεωρούμε τις παρακάτω ενέργειες :

$\alpha_1$  : «σκάβουμε για πετρέλαιο»  $\alpha_2$  : «πουλάμε την περιοχή»  $\alpha_3$  : «πουλάμε τα μισά δικαιώματα που κατέχουμε στην περιοχή».

Η συνάρτηση κόστους καθορίζεται ως εξής :

	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
$\omega_1$	0	10	5
$\omega_2$	12	1	6

Η διεξαγωγή πειράματος για να αποκτήσουμε πληροφορίες σχετικά με την κατάσταση της φύσης μας δίνει τις παρακάτω πληροφορίες σχετικά με την πιθανοφάνεια της τυχαίας μεταβλητής  $x$  με πιθανές τιμές 0 και 1 :

	Σχήμα βράχων ( $x$ )	Σχήμα βράχων( $x$ )
	0	1
$\omega_1$	0.3	0.7
$\omega_2$	0.6	0.4

#### PROBLEM 4 LIVE

Έστω ένα πρόβλημα ταξινόμησης με τις παρακάτω συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας :

$$p(x|\omega_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(x-4)^2}, \quad p(x|\omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(x-10)^2}.$$

Εάν ισχύει  $P(\omega_1) = P(\omega_2)$  να βρείτε τον κανόνα απόφασης βάσει του maximum Likelihood.

#### PROBLEM 5 HOMEWORK (LIVE TIP)

Έστω ένα πρόβλημα ταξινόμησης με 2 classes  $\omega_1$  και  $\omega_2$  που έχουν τις παρακάτω συναρτήσεις πιθανοφάνειας :

$$p(x|\omega_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}} e^{-x^2/23}, \quad p(x|\omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(x-2)^2}.$$

Αν ισχύει  $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{1}{2}$ , ποιος είναι ο κανόνας απόφασης που ελαχιστοποιεί το  $P[\text{error}]$ , δηλαδή την πιθανότητα για ταξινόμηση σε λάθος class ?

#### PROBLEM 6 LIVE

Υποθέστε ότι έχουμε έναν τρισδιάστατο χώρο χαρακτηριστικών  $X = (x, y, z)$  και δύο κλάσεις  $\omega_1$  και  $\omega_2$ .

Για τις δύο κλάσεις ισχύουν τα εξής :  $\mu_1 = [0 \ 0 \ 0]^T$  και  $\mu_2 = [1 \ 1 \ 1]^T$  και  $\Sigma_1 = \Sigma_2 =$  με

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$P(\omega_1) = 2P(\omega_2)$$

α) Αν χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του Bayes ποιες είναι οι συναρτήσεις διαχωρισμού  $g_1(x)$  και  $g_2(x)$  ;

β) Υπολογίστε το όριο απόφασης του Bayes .

γ) Ταξινομήστε το διάνυσμα  $x_u = [0.1 \ 0.7 \ 0.8]^T$

#### PROBLEM 7 LIVE practice

Υποθέστε ότι αντιμετωπίζετε το πρόβλημα ταξινόμησης των ψαριών του σολομού και της πέρκας. Γνωρίζετε μετά από έρευνα στην βιβλιογραφία, ότι οι σολομοί έχουν κατά μέσο όρο μεγαλύτερο μήκος από τις πέρκες καθώς και πιο ανοικτό χρώμα στα λέπια που τις περιβάλλουν . Αποφασίζετε λοιπόν να χρησιμοποιήσετε σαν χαρακτηριστικό διαχωρισμού των ψαριών το μήκος και την φωτεινότητα του δέρματός τους. Μελετώντας ένα μεγάλο σύνολο δεδομένων έχετε καταλήξει στις εξής τιμές για τον μέσο όρο των χαρακτηριστικών, τους πίνακες διασπορών και τις εκ των προτέρων πιθανότητες, όσον αφορά τις δύο κλάσεις του σολομού και της πέρκας:

$$\mu_1 = [6 \ 3]^T, \quad \mu_2 = [3 \ 5]^T \quad \text{και} \quad \Sigma_1 = [1 \ 0; 0 \ 1]^T, \quad \Sigma_2 = [9 \ 0; 0 \ 9]^T \quad P(\omega_1) = 2P(\omega_2) \quad (\text{εκ των προτέρων πιθανότητες})$$

α) Υπολογίστε το όριο απόφασης του Bayes

β) Έχετε στα χέρια σας ένα ψάρι το οποίο έχει τις εξής τιμές για τα δύο χαρακτηριστικά  $x_u = [2 \ 2]$ . Ταξινομήστε το συγκεκριμένο ψάρι σαν σολομό ή πέρκα με βάση το όριο απόφασης που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.