Πανεπιστημιο Πατρων
Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Ηλεκτρονικων Υπολογιστων και Πληροφορικης

Ειδικά Θέματα Θεμελιώσεων της Επιστήμης των Υπολογιστών

Καθηγητής:
Λευτερης Κυρουσης

Διάλεξη 9η: 8 Φεβρουαρίου 2012

1 Προτασιακοί Τύποι σε Συζευκτική Κανονική Μορφή - CNF

Για τη συνέχεια του μαθήματος θεωρούμε προτασιακούς τύπους σε συζευκτική κανονική μορφή όπου η κάθε φράση περιέχει k λεξιγράμματα.

1.1 Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας

Ένας τύπος είναι ικανοποιήσιμος αν μπορούμε να βρούμε μια ανάθεση τιμών αλήθειας στις μεταβλητές του, έτσι ώστε ο τύπος να είναι αληθής.

Ένας τρόπος για να δούμε εάν ένας τύπος είναι ικανοποιήσιμος, είναι να υπολογίσουμε την τιμή του για όλες τις δυνατές αναθέσεις τιμών στις μεταβλητές του. Κάτι τέτοιο θα απαιτούσε αρκετό χρόνο, καθώς όλες οι δυνατές αναθέσεις τιμών αλήθειας για n μεταβλητές είναι 2^n.

Αν όμως μας δοθεί μια ανάθεση τιμών αλήθειας, μπορούμε γρήγορα να υπολογίσουμε την τιμήτ ου προτασιακού τύπου και να ελέγξουμε αν ικανοποιείται. Συνεπώς, για το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας, έχουμε τα εξής:

- Είναι αλγοριθμικά επιλύσιμο. Δηλαδή, γνωρίζουμε αλγόριθμο επίλυσής του, ο οποίος όμως πρέπει να εξετάσει εκθετικά πολλές περιπτώσεις, άρα από πρακτική σκοπιά είναι ουσιαστικά άχρηστος.
- Δε *φαίνεται* να υπάρχει πρακτικός αλγόριθμος. (Ανοιχτό πρόβλημα)
- Αν μας δοθεί ανάθεση τιμών αληθείας (input από bit στις μεταβλητές του network), μπορούμε να ελέγξουμε γρήγορα αν η απονομή δίνει την τιμή αλήθειας «*Αληθές*» .

Αυτό το πρόβλημα είναι πλήρες στην κλάση πολυπλοκότητας NP

1.2 Παραγωγή τυχαίου τύπου

Στο κομμάτι αυτό, θα περιγραφεί η διαδικασία παραγωγής ενός τυχαίου τύπου σαν αποτέλεσμα ενός τυχαίου πειράματος.

Θα ασχοληθούμε με 3-CNF τύπους, δηλαδή με τύπους με n μεταβλητές και m φράσεις (το m δεν είναι σταθερός αριθμός) όπου σε κάθε φράση υπάρχουν 3 ακριβώς λεξιγράμματα. Το πείραμα που θα παράγει έναν τυχαίο τύπο είναι το παρακάτω:

Για κάθε τριάδα μεταβλητών x_i, x_j, x_k, ανεξάρτητα και με πιθανότητα επιτυχίας $8p$ εκτελούμε πείραμα Bernoulli. Στη συνέχεια, αν το πείραμα Bernoulli είναι θετικό, για κάθε μια από τις x_i, x_j, x_k, με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ αποφασίζουμε για το λογικό πρόσημό της.

Επομένως, μια τυχαία φράση, έστω $(x_i \vee x_j \vee \overline{x}_k)$, προκύπτει με πιθανότητα

$$8p \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = p$$

Είπαμε νωρίτερα ότι

- n : πλήθος μεταβλητών (σταθερός αριθμός)
- 3 : αριθμός λεξιγραμμάων σε κάθε φράση (σταθερός αριθμός)
- m : αριθμός φράσεων (*τυχαία μεταβλητή*)

Αφού το m είναι τυχαία μεταβλητή, θα έχει μια αναμενόμενη τιμή. Για να την υπολογίσουμε, αρχικά υπολογίζουμε τον αριθμό όλων των δυνατών φράσεων που μπορούνα να προκύψουν. Αυτές είναι:

$$8\binom{n}{3}$$

Με $\binom{n}{3}$ τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε κάθε τριάδα μεταβλητών, ενώ υπάρχουν 8 παραλλαγές για κάθε τριάδα (οι παραλλαγές προκύπτουν από τις διάφορες περιπτώσεις των λογικών προσήμων για κάθε μια μεταβλητή).

Επομένως, η αναμενόμενη τιμή για το m δίνεται από τη σχέση

$$E(m) = 8\binom{n}{3}p = \frac{4}{3}pn(n-1)(n-2)$$

Συνήθως παίρνουμε

$$p = \frac{c}{(n-1)(n-2)}\frac{3}{4}$$

Επομένως,

$$E(m) = cn$$

Συνοψίζοντας, προηγουμένως περιγράφηκε το πείραμα τύχης το οποίο, για n μεταβλητές δημιουργεί έναν 3-CNF τύπο, αποτελούμενο από n μεταβλητές και αναμενομένως cn φράσεις.

Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας που περιγράφηκε νωρίτερα, στην περίπτωση που ο προτασιακός τύπος είναι 3-CNF είναι γνωστό με το όνομα 3-SAT.

Πρόβλημα 3-SAT Έχουμε σα δεδομένο έναν τύπος 3-CNF και η ερώτηση είναι αν είναι ικανοποιήσιμος ή όχι.

Ικανοποιήσιμος είναι ένας τύπος 3-CNF ανν[1] υπάρχει απονομή αλήθειας που κάνει αληθές τουλάχιστον ένα λεξίγραμμα σε κάθε φράση.

Αφού έχουμε σύζευξη φράσεων, για να είναι αληθής ο τύπος θα πρέπει όλες οι φράσεις να γίνονται αληθείς. Κάθε φράση αποτελείται από διάζευξη λεξιγραμμάτων. Επομένως, για να είναι αληθής η φράση, θα πρέπει τουλάχιστον ένα λεξίγραμμα από κάθε φράση να γίνεται αληθές.

2 Ανισότητα Markov

Έστω $\mathbb{X}$ μια τυχαία μεταβλητή που παίρνει τιμές $\in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$

Η ανισότητα Markov λέει

$$P(\mathbb{X} > 0) \leq E(\mathbb{X})$$

Θα αποδείξουμε την ανισότητα Markov χρησιμοποιώντας πιθανοτικές γεννήτριες συναρτήσεις.

Έστω $p_0, p_1, ...$ οι συντελεστές της πιθανοτικής γεννήτριας συνάρτησης,

$$P(\mathbb{X} > 0) = 1 - p_0 = \sum_{k>0} p_k$$

$$E(\mathbb{X}) = \sum_{k \geq 0} k p_k = \sum_{k>0} k p_k$$

Για $k \geq 1$,

$$p_k \leq k p_k$$

και επομένως, είναι φανερό ότι

$$\sum_{k>0} p_k \leq \sum_{k>0} k p_k$$

Άρα, τελικά

$$P(\mathbb{X} > 0) \leq E(\mathbb{X})$$

[1] αν και μόνο αν