Πανεπιστημιο Πατρων
Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Ηλεκτρονικων Υπολογιστων και Πληροφορικης

Ειδικά Θέματα Θεμελιώσεων της Επιστήμης των Υπολογιστών

Καθηγητής:
Λευτερης Κυρουσης

Διάλεξη 4η: 21 Δεκεμβρίου 2011

1 Αριθμοί Catalan – Γενικός τύπος

Στην προηγούμενη διάλεξη αναφερθήκαμε στους αριθμούς Catalan και υπολογίσαμε τον αναδρομικό τύπο της ακολουθίας τους:

$$T_N = \sum_{K=1}^{N} T_{K-1} T_{N-K}$$

$$T_0 = 1, T_1 = 1$$

Επιπλέον, από την αναδρομική σχέση είχαμε υπολογίσει τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας:

$$zT(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$$

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε το τύπο γενικό της ακολουθίας από τη γεννήτρια συνάρτηση.

$$zT(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$$

$$zT(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-4)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} z^k\right)$$

$$zT(z) = \frac{1}{2}\left(1 - 1\sum_{k=1}^{\infty} (-4)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} z^k\right)$$

$$zT(z) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{2} (-4)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} z^k$$

$$T(z)=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{1}{2}\,(-4)^k\binom{\frac{1}{2}}{k}z^{k-1}$$

$$T(z)=\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{1}{2}\,(-4)^{k+1}\binom{\frac{1}{2}}{k+1}z^{k}$$

Επομένως,

$$T_n=-\frac{1}{2}(-4)^{n+1}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}$$

$$T_n=-\frac{1}{2}(-4)^{n+1}\left(\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)\ldots(\frac{1}{2}-n)}{(n+1)!}\right)$$

$$T_n=-\frac{1}{2}(-4)^{n+1}(-1)^n\left(\frac{(\frac{1}{2})(\frac{2-1}{2})\ldots(\frac{2n-1}{2})}{(n+1)!}\right)$$

$$T_n=2(4)^n(\frac{1}{2})^{n+1}\left(\frac{(1)(2-1)(4-1)\ldots(2n-1)}{(n+1)!}\right)$$

$$T_n=2^{2n+1-n-1}\left(\frac{(1)(1)(3)\ldots(2n-1)}{(n+1)!}\right)$$

$$T_n=2^n\left(\frac{(1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}{(n+1)!\cdot 2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\right)$$

$$T_n=\frac{(2n)!}{(n+1)!\cdot 2^n\cdot(1\cdot 2\cdot 3\ldots n)}2^n$$

$$T_n=\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=\binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Τελικά,

Αριθμοί Catalan: $T_N=\frac{1}{N+1}\binom{2N}{N}$

2 Προσεταιριστική και Αντιμεταθετική Ιδιότητα της Πρόσθεσης

Έστω ότι θέλουμε να μετρήσουμε τα κέρματα που είναι μπροστά μας

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n$$

Ένας έξυπνος τρόπος να το κάνουμε είναι να μετράμε το πλήθος των ομοειδών νομισμάτων και να πολλαπλασιάζουμε με την αξία του νομίσματος και να κάνουμε μια πρόσθεση στο τέλος.

Παράδειγμα 2.1 *Με πόσους τρόπους μπορούμε να μετατρέψουμε σε ψιλά το 1 €(χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τα χάλκινα);*

$$\sum_{t \in \Sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\acute{\epsilon}\varsigma\ \nu o\mu\iota\sigma\mu\acute{\alpha}\tau\omega\nu} \left[\vdots\right] z^{|t|} = \sum_{k \in \alpha\xi\acute{\iota}\alpha} a_k z^k$$

Το αριστερό μέλος αναπαριστά το ¨χαζό' τρόπο υπολογισμού της λύσης του προβλήματος (γι΄ αυτό και δεν ασχολούμαστε με τον ακριβή τύπο) και το δεξί μέλος αντιστοιχεί στον ¨έξυπνο' τρόπο υπολογισμού της λύσης του προβλήματος.

Για να βρούμε την ακολουθία, αρκεί να υπολογίσουμε τη Γεννήτρια Συνάρτησή της καθώς από εκεί μπορούμε να υπολογίσουμε την ακολουθία με τους τρόπους που έχουν περιγραφεί σε προηγούμενες διαλέξεις.

$$\sum_{\delta,\epsilon,\pi,€=0} z^{10\delta+20\epsilon+50\pi+100€} = \sum_{\delta,\epsilon,\pi,€=0} (z^{10})^{\delta}(z^{20})^{\epsilon}(z^{50})^{\pi}(z^{100})^{€} =$$

$$= \frac{1}{1-z^{10}}\frac{1}{1-z^{20}}\frac{1}{1-z^{50}}\frac{1}{1-z^{100}}$$

Παράδειγμα 2.2 *Αποδείξτε ότι η Γεννήτρια Συνάρτηση του αριθμού των τρόπων να εκφράσουμε ένα φυσικό N ως άθροισμα δυνάμεων του 2 είναι*

$$\prod_{k \geq 0} \frac{1}{1-z^{2^k}}$$

Η Γεννήτρια Συνάρτηση για αυτή την ακολυθία είναι

$$\sum_{\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\ldots=0} z^{\lambda_0 2^0+\lambda_1 2^1+\cdots} = \sum_{\lambda_0=0}^{\infty} z^{\lambda_0 2^0} + \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} z^{\lambda_1 2^1} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{1-z^{2^0}}\frac{1}{1-z^{2^1}} \ldots = \prod_{k \geq 0} \frac{1}{1-z^{2^k}}$$

3 Εισαγωγή στη Συμβολική Μέθοδο

Έστω $\mathcal{A}$ είναι μια κλάση (συνδυαστικών) αντικειμένων και έστω $\mathbb{N}$ μια απεικόνιση που θα αναφέρεται ως "μέγεθος" ή "τιμή" ή 'άξία" κτλ, ανάλογα με τη φύση του προβλήματος, και ορίζει την παρακάτω σχέση:

$$|| : \mathcal{A} \to \mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$$

Το ζητούμενό μας είναι ο υπολογισμός της ακολουθίας a_n, που αντιστοιχεί στο πλήθος των αντικειμένων της κλάσης $\mathcal{A}$ με 'άξία"("μέγεθος" κτλ) n. Το ίδιο ζητούμενο μπορεί να εκφραστεί ως εξής: *Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση που εκφράζει το πλήθος των αντικειμένων της κλάσης $\mathcal{A}$ "μεγέθους" n;*

Η συμβολική μέθοδος είναι ένα εργαλείο που δε μας βοηθά να λύνουμε γενικώς προβλήματα τέτοιας φύσης, αλλά, μας δίνει τη δυνατότητα να αναγάγουμε ένα πρόβλημα σε απλούστερά του.

Η γεννήτρια συνάρτηση θα είναι η: $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ [1].

Στη συνέχεια μελετάμε 3 τρόπους που μας βοηθούν να κατανοήσουμε το συνδυασμό κλάσεων συνδυαστικών αντικειμένων (έστω οι κλάσεις $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$) με τη βοήθεια της συμβολικής μεθόδου.

Έστω οι κλάσεις $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ και οι αντίστοιχες γεννήτριες συναρτήσεις τους $A(z)$ και $B(z)$ τις οποίες γνωρίζουμε. Έστω η κλάση $\mathcal{A}\dot{\bigcup}\mathcal{B} = \mathcal{C}$ η οποία εκφράζει τη ξένη ένωση (disjoint union) μεταξύ δύο κλάσεων. Η πράξη της ξένης ένωσης αθροίζει τα στοιχεία των κλάσεων θεωρώντας τα όμοια αντικείμενα ως διαφορετικά.

Αναζητούμε τη γεννήτρια συνάρτηση της νέας κλάσης $\mathcal{C}$. Ισχύει ότι a_n είναι το πλήθος των αντικειμένων ``μεγέθους'' $n$ της κλάσης $\mathcal{A}$ με γεννήτρια συνάρτηση την $A(z)$. Αντίστοιχα, $b_n$ είναι το πλήθος των αντικειμένων ``μεγέθους'' n της κλάσης $\mathcal{B}$ με γεννήτρια συνάρτηση την $B(z)$. Λόγω της πράξης της ξένης ένωσης θα ισχύει ότι $c_n = a_n + b_n$ είναι το πλήθος των αντικειμένων ``μεγέθους''n της κλάσης $\mathcal{C} = \mathcal{A}\dot{\bigcup}\mathcal{B}$ με γεννήτρια συνάρτηση την $C(z)$ την οποία αναζητούμε και είναι ίση με $C(z) = A(z) + B(z)$.

Ορίζουμε τώρα την πράξη του καρτεσιανού γινομένου η οποία μας δίνει ζεύγη αντικειμένων από τις κλάσεις στις οποίες εφαρμόζεται. Έστω πάλι ότι a_n είναι το πλήθος των αντικειμένων ``μεγέθους'' $n$ της κλάσης $\mathcal{A}$ με γεννήτρια συνάρτηση την $A(z)$ και $b_n$ το πλήθος των αντικειμένων ``μεγέθους'' n της κλάσης $\mathcal{B}$ με γεννήτρια συνάρτηση την $B(z)$.

Ορίζουμε την κλάση $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ με $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + ... + a_n b_0$ το πλήθος των αντικειμένων της ``μεγέθους'' n και με γεννήτρια συνάρτηση την $C(z) = A(z) \cdot B(z)$.

Έστω η κλάση $\mathcal{A}$ με a_n το πλήθος των αντικειμένων της ``μεγέθους'' n και με γεννήτρια συνάρτηση την $A(z)$. Ορίζεται η κλάση της πράξης kleene star η $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^0\dot{\bigcup}\mathcal{A}^1\dot{\bigcup}\mathcal{A}^2\dot{\bigcup}\mathcal{A}^0$......... Η κλάση $\mathcal{A}^*$ περιέχει τα αντικείμενα που αποτελούνται από πεπερασμένες ακολουθίες της κλάσης $\mathcal{A}$.

Ισχύουν τα εξής:

- $\mathcal{A}^0$ είναι η κενή ακολουθία: μια ακολουθία ``μεγέθους'' 0 (μηδέν), οπότε η γεννήτρια συνάρτησή της θα είναι η $A(z) = 1$.

[1] Ισχύει ότι στην έκφραση $a_k z^k$ το k στον εκθέτη αφορά στο ``μέγεθος'' και το $a_k$ εκφράζει το πλήθος των αντικειμένων ``μεγέθους'' k

- $\mathcal{A}^1$ είναι ακολουθία με "μέγεθος" 1 (ένα) και με γεννήτρια συνάρτηση την $A(z$.

Έπομένως, για τη γεννήτρια συνάρτηση της κλάσης $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^0 \dot{\bigcup} \mathcal{A}^1 \dot{\bigcup} \mathcal{A}^2 \dot{\bigcup} \mathcal{A}^0 ....$ θα ισχύει, βάσει των παραπάνω, $1 + A(z) + A^2(z) + A^3(z) + ... = \frac{1}{1-A(z)}$.

Παράδειγμα 3.1 *Έστω πως διαθέτουμε ακολουθίες από bits 0,1 ως συνδυαστικά αντικείμενα και έστω ότι θεωρούμε ως "μέγεθος" το μήκος της ακολουθίας. Αναζητούμε το πλήθος των ακολουθιών μήκους n.*

Από τη συνδυαστική γνωρίζουμε πως αυτό το πλήθος ισούται με 2^n. Θα πρέπει να το αποδείξουμε με χρήση της συμβολικής μεθόδου. Αυτό που πραγματοποιούμε είναι μια αυτοαναγωγή (bootstraping).

Έστω $\mathcal{B}$ η κλάση πεπερασμένων ακολουθιών από bits. Κάθε τέτοια ακολουθία μπορεί να είναι είτε η κενή ακολουθία είτε συνδυασμοί από 0 και 1. Τυπικά αυτό εκφράζεται ως εξής:

$$\mathcal{B} = \{\epsilon\} \dot{\bigcup} \{0,1\} \times \mathcal{B} \text{ (1)}$$

Από την έκφραση αυτή θα αναζητήσω τη γεννήτρια συνάρτηση $B(z)$ με αυτοαναγωγή. Η γεννήτρια συνάρτηση τη κενής ακολουθίας είναι η τιμή 1, η γεννήτρια συνάρτηση (άγνωστη) της κλάσης $\mathcal{B}$ είναι η $B(z)$. Έτσι, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$B(z) = 1 + 2zB(z) \text{ (2)}$$

Η ποσότητα $2z$ προκύπτει επειδή στην κλάση 0,1 υπάρχουν δύο αντικείμενα. Από τη σχέση (2) μπορώ να βρω τη γεννήτρια συνάρτηση $B(z)$ ως εξής:

$$B(z) = 1 + 2zB(z) \implies B(z) - 2zB(z) = 1 \implies B(z) = \frac{1}{1-2z} =$$
$$(1-2z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k \binom{-1}{k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^k,$$

από όπου προκύπτει η απάντηση 2^k που ήδη γνωρίζαμε.

Παράδειγμα 3.2 *Πόσες είναι οι ακολουθίες μήκους n του αλφαβήτου 0,1 που δεν περιέχουν διαδοχικά μηδενικά;*

Έστω η κλάση $\mathcal{B}$ των πεπερασμένων ακολουθιών από bits και ως "μέγεθος" θεωρούμε το μήκος της ακολουθίας. Κάθε τέτοια ακολουθία (που δεν περιέχει διαδοχικά μηδενικά) μπορεί να είναι είτε η κενή ακολουθία, είτε μια ακολουθία μήκους 1 που θα περιλαμβάνει είτε ένα μηδενικό είτε έναν άσσο, είτε ακολουθίες με 2 και περισσότερα στοιχεία, ουσιαστικά ένας συνδυασμός των ακολουθιών 01, 11, 101 ακολουθούμενων από κάποιο μηδενικό ή άσσο. Τυπικά:

$$\mathcal{B} = \{\epsilon\} \dot{\bigcup} \{0,1\} \dot{\bigcup} \{01, 11, 101\} \times \mathcal{B}$$

Η γεννήτρια συνάρτηση θα υπολογιστεί με αυτοαναγωγή από την προκύπτουσα έκφραση:

$$B(z) = 1 + 2z + (2z^2 + z^3) \cdot B(z) \implies B(z) = \frac{1+2z}{1-2z^2-z^3}$$

Η ποσότητα $2z^2$ *προκύπτει από το γεγονός οτι έχουμε 2 ακολουθίες μήκους 2, τις 01, 11, ενώ, αντίστοιχα, η ποσότητα* z^3 *προκύπτει επειδή έχουμε μια ακολουθία μήκους 3, την 101.*

Εναλλακτικός τρόπος

Θα μπορούσαμε, εναλλακτικά, να εκφράσουμε την κλάση $\mathcal{B}$ *ως εξής:*

$$\mathcal{B} = \{\epsilon\} \dot{\bigcup} \{0\} \dot{\bigcup} \{1, 01\} \times \mathcal{B}$$

διασφαλίζοντας με διαφορετικό τρόπο πως δεν θα έχουμε ακολουθίες με διαδοχικά μηδενικά. Η γεννήτρια συνάρτηση που προκύπτει από εδώ θα είναι:

$$B(z) = 1 + z + (z + z^2) \cdot B(z) \implies B(z) = \frac{1+z}{1-z-z^2}$$

Παράδειγμα 3.3 *Πόσα είναι τα πλήρη δυαδικά δένδρα;*
Έστω $\mathcal{T}$ *είναι η κλάση των πλήρων δυαδικών δένδρων και* $|t|$ *είναι το πλήθος των εσωτερικών κόμβων. Η κλάση* $\mathcal{T}$ *ορίζεται ως εξής:*

$$\mathcal{T} = \{\textit{μόνο η ρίζα}\} \dot{\bigcup} \{\textit{ρίζα ως εσωτερικός κόμβος}\} \times \mathcal{T} \times \mathcal{T}$$

Η ποσότητα μόνο η ρίζα αφορά στο δυαδικό δένδρο που έχει μόνο έναν κόμβο, τη ρίζα, και κάνενα φύλλο ή άλλον εσωτερικό κόμβο. Αυτό το δένδρο είναι μόνο 1. Η ποσότητα ρίζα ως εσωτερικός κόμβος αφορά στο δυαδικό δένδρο με ρίζα και δύο παιδιά. Το κάθε ένα καρτεσιανό γινόμενο αφορά σε δεξί και αριστερό υποδένδρο στην περίπτωση που η ρίζα είναι εσωτερικός κόμβος.
Η γεννήτρια συνάρτηση προκύπτει, με αυτοαναγωγή, από την έκφραση:

$$T(z) = 1 + z \times T^2(z) \implies T(z) - 1 - zT^2(z) = 0 \implies T(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}$$

Λόγω των συνθηκών $T(0) = T(1) = 1$ *προκύπτει ότι* $T(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$.