ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Ειδικά Θέματα Θεμελιώσεων της Επιστήμης των Υπολογιστών

Καθηγητής:
Λευτέρης Κυρούσης

Διάλεξη 3η: 14 Δεκεμβρίου 2011

1 Αριθμοί Stirling $1^{ου}$ Είδους

Οι αριθμοί Stirling $1^{ου}$ είδους συμβολίζονται ως

$$s(k,n) = \left[\begin{array}{c} k \\ n \end{array} \right]$$

και εκφράζουν τον αριθμό των τρόπων να κατασκευάσουμε n περιδέραια χρησιμοποιώντας k διακεκριμμένες χάντρες. Κάθε περιδέραιο αποτελείται από τουλάχιστον μια χάντρα.

Διαφορετικά, μπορούμε να το σκεφτούμε ως εξής: ο αριθμός $n!\left[\begin{array}{c} k \\ n \end{array} \right]$ είναι ο αριθμός των τοποθετήσεων k προσκελημένων σε n διακεκριμμένες ροτόντες.

Αναγωγικός Τύπος Ένας αναγωγικός τύπος υπολογισμού των αριθμών Stirling $1^{ου}$ είδους είναι ο παρακάτω:

$$\left[\begin{array}{c} k+1 \\ n+1 \end{array} \right] = k \left[\begin{array}{c} k \\ n+1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} k \\ n \end{array} \right]$$

Συνδυαστική Απόδειξη Μπορώ να φτιάξω $n+1$ περιδέραια από $k+1$ χάντρες είτε κατασκευάζοντας n περιδέραια από k χάντρες και το τελευταίο περιδέραιο από τη χάντρα που έμεινε είτε κατασκευάζοντας $n+1$ περιδέραια με k χάντρες και προσθέτοντας τη χάντρα που έμεινε σε ένα από τα περιδέραια .

Το πρώτο μπορεί να γίνει με $\left[\begin{array}{c} k \\ n \end{array} \right]$ τρόπους, ενώ το δεύτερο με $k \left[\begin{array}{c} k \\ n+1 \end{array} \right]$ τρόπους: $\left[\begin{array}{c} k \\ n+1 \end{array} \right]$ τρόποι να κατασκευαστούν τα περιδέραια και k τρόποι να τοποθετήσουμε τη χάντρα που περισσεύει επιλέγοντας δίπλα σε ποια από k τις τοποθετημένες χάντρες θα τοποθετηθεί. Αθροίζοντάς τα, προκύπτει η επιθυμητή σχέση.

2 Αναδρομικές σχέσεις

Οι αναδρομικές σχέσεις είναι ένας τρόπος να οριστούν οι όροι κάποιας ακολουθίας χρησιμοποιώντας προηγούμενους όρους.

2.1 Γραμμικές αναδρομικές σχέσεις

Ένας τύπος αναδρομικών σχέσεων είναι οι γραμμικές αναδρομικές σχέσεις, οι οποίες έχουν την παρακάτω μορφή

$$a_k = x_1 a_{k-1} + x_2 a_{k-2} + ... + x_t a_{k-t}$$

Οι όροι x_i λέγονται συντελεστές ενώ οι όροι a_i είναι οι όροι της ακολουθίας. Όταν δίνεται μια τέτοια διατύπωση μιας ακολουθίας, δίνονται επίσης και οι t πρώτοι όροι της ακολουθίας.

Ένα παράδειγμα ακολυθίας αυτής της μορφής είναι η ακουλουθία Fibonacci, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$
$$a_0 = a_1 = 1$$

2.2 Υπολογισμός Γενικού Τύπου Αναδρομικής Σχέσης

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού του γενικού τύπου μιας αναδρομικής σχέσης χρησιμοποιώντας Γεννήτριες Συναρτήσεις.

Αρχικά, προσπαθούμε να υπολογίσουμε τον κλειστό τύπο της γεννήτριας συνάρτησης της ακολουθίας, χρησιμοποιώντας την αναδρομκή σχέση, και στη συνέχεια από τη γεννήτρια συνάρτηση υπολογίζουμε τους όρους a_n της ακολουθίας, με τις μεθόδους που αναφέρθηκανν σε προηγούμενες διαλέξεις.

Υπολογισμός Γεννήτριας Συνάρτησης Έστω ότι μας δίνεται η παρακάτω αναδρομική σχέση:

$$a_n = x_1 a_{n-1} + x_2 a_{n-2} + ... + x_t a_{n-t}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον κλειστό τύπο της Γεννήτριας Συνάρτησης της ακολουθίας, δηλαδή την

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Ξεκινάμε από την αναδρομική σχέση και προσπαθούμε να κατασκευάσουμε τη Γεννήτρια Συνάρτηση:

$$a_n = x_1 a_{n-1} + x_2 a_{n-2} + \ldots + x_t a_{n-t} \Rightarrow$$

$$a_n z^n = x_1 a_{n-1} z^n + x_2 a_{n-2} z^n + \ldots + x_t a_{n-t} z^n \Rightarrow$$

$$\sum_{n=t}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=t}^{\infty} x_1 a_{n-1} z^n + \sum_{n=t}^{\infty} x_2 a_{n-2} z^n + \ldots + \sum_{n=t}^{\infty} x_t a_{n-t} z^n \Rightarrow$$

$$F(z) - \left(\sum_{i=0}^{t-1} a_i z^i\right) = x_1 z \left(\sum_{n=t}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1}\right) + x_2 z^2 \left(\sum_{n=t}^{\infty} a_{n-2} z^{n-2}\right) + \cdots + x_t z^t \left(\sum_{n=t}^{\infty} a_{n-t} z^{n-t}\right) \Rightarrow$$

$$F(z) - \left(\sum_{i=0}^{t-1} a_i z^i\right) = x_1 z \left(F(z) - \sum_{i=0}^{t-2} a_i z^i\right) + x_2 z^2 \left(F(z) - \sum_{i=0}^{t-3} a_i z^i\right) + \ldots + x_t z^t \left(F(z)\right)$$

Στην παραπάνω σχέση, ο μόνος άγνωστος είναι το $F(z)$, επομένως μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό του $F(z)$, δηλαδή του κλειστού τύπου της Γεννήτριας Συνάρτησης της ακολουθίας. Ακολουθούν παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.1 *Να υπολογιστεί η Γεννήτρια Συνάρτηση για την ακολουθία Fibonacci.*

Η ακολουθία Fibonacci δίνεται από την αναδρομική σχέση $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$*, με αρχικές συνθήκες* $a_0 = a_1 = 1$*. Επομένως, με βάση τα παραπάνω:*

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \Rightarrow$$

$$a_n z^n = a_{n-1} z^n + a_{n-2} z^n \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^n \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = z \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} + z^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^{n-2} \Rightarrow$$

$$F(z) - (a_0 + a_1 z) = z\left(F(z) - a_0\right) + z^2 F(z)$$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές τιμές για τα a_0, a_1 *παίρνουμε:*

$$F(z) - 1 - z = z(F(z) - 1) + z^2 F(z) \Rightarrow$$

$$F(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

Παράδειγμα 2.2 *Να υπολογιστεί η Γεννήτρια Συνάρτηση (κλειστός τύπος), της ακολουθίας* $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ *με* $a_0 = 0, a_1 = a_2 = 1$

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3} \Rightarrow$$
$$a_n z^n = 2a_{n-1}z^n + a_{n-2}z^n - 2a_{n-3}z^n \Rightarrow$$
$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=3}^{\infty} 2a_{n-1}z^n + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2}z^n - \sum_{n=3}^{\infty} 2a_{n-3}z^n \Rightarrow$$

$$F(z) - \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2\right) = 2z \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1}z^{n-1} + z^2 \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2}z^{n-2} - 2z^3 \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}z^{n-3} \Rightarrow$$

$$F(z) - \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2\right) = 2z\left(F(z) - a_0 - a_1 z\right) + z^2\left(F(z) - a_0\right) - 2z^3 F(z)$$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές τιμές για τα a_0, a_1, a_2 *παίρνουμε:*

$$F(z) - z - z^2 = 2z\left(F(z) - z\right) + z^2\left(F(z)\right) - 2z^3 F(z) \Rightarrow$$

$$F(z) = \frac{z - z^2}{1 - 2z - z^2 + 2z^3}$$

Υπολογισμός Όρων Ακολουθίας Σε προηγούμενες διαλέξεις έχουν παρουσιαστεί διάφοροι τρόποι για τον υπολογισμό των όρων μιας ακολουθίας από τον κλειστό τύπο της Γεννήτριας Συνάρτησής της. Στο κομμάτι αυτό θα παρουσιαστεί μόνο ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.3 *Να υπολογιστεί ο γενικός τύπος της ακολουθίας Fibonacci.*

Στο παράδειγμα 2.1, υπολογίσαμε τη Γεννήτρια Συνάρτηση της ακολουθίας Fibonacci από την αναδρομική σχέση που την περιγράφει.Τώρα θα επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε τον γενικό τύπο που δίνει τους όρους της ακολουθίας.

$$F(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

Το πολυώνυμο στον παρονομαστή μπορεί να γραφεί ως $(1 - \beta_1 z)(1 - \beta_2 z)$ *όπου* $\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}$ *είναι οι ρίζες του πολυωνύμου. Επομένως:*

$$F(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$
$$F(z) = \frac{1}{(1 - \beta_1 z)(1 - \beta_2 z)}$$
$$F(z) = \frac{A}{(1 - \beta_1 z)} + \frac{B}{(1 - \beta_2 z)}$$
$$F(z) = A(1 + \beta_1 z + \beta_1^2 z^2 + \ldots) + B(1 + \beta_2 z + \beta_2^2 z^2 + \ldots)$$

Από το παραπάνω προκύπτει ότι ο συντελεστής του z^n *είναι* $A\beta_1^n + B\beta_2^n$ *επομένως ο ν-οστός όρος της ακολουθίας Fibonacci είναι*

$$a_n = A\beta_1^n + B\beta_2^n$$

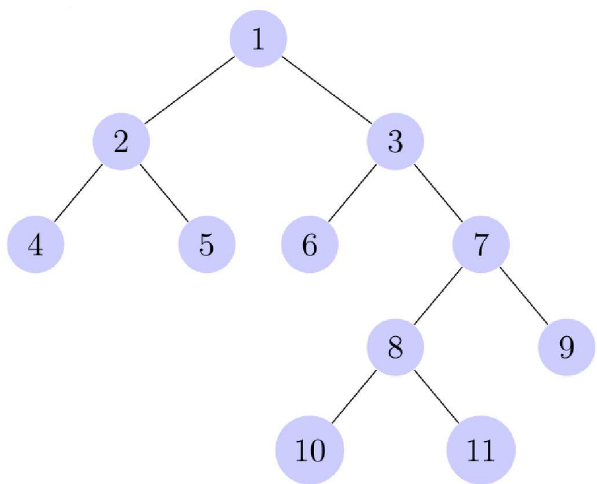
Τα β_1, β_2 *μπορούν να υπολογιστούν από τις ρίζες του* $1 - z - z^2$*, ενώ τα A,B μπορούν να υπολογιστούν λόγω της διάσπασης κλάσματος, από τη σχέση*

$$1 = A(1 - \beta_2 z) + B(1 - \beta_1 z)$$

δίνοντας σαν τιμές του z *τις ρίζες που υπολογίστηκαν νωριτερα.*

3 Δέντρα

Τα δέντρα είναι ακυκλικά γραφήματα, όπως το παρακάτω:



Ο κόμβος 1 λέγεται *ρίζα (root)* του δέντρου. Οι κόμβοι που έχουν παιδιά λέγονται *εσωτερικοί κόμβοι* (όπως οι κόμβοι 2,3,7,8), ενώ οι κομβοι που δεν έχουν παιδιά λέγονται *φύλλα*, όπως οι κόμβοι 4,5,6,10,11,9 .

Ακολουθούν κάποιοι ορισμοί[1].

Δυαδικά Δέντρα (Binary trees) λέγονται τα δέντρα στα οποία κάθε κόμβος έχει το πολύ δυο παιδιά. Ένα γράφημα που αποτελείται από έναν μόνο κόμβο, επίσης θεωρείται δέντρο που αποτελείται μόνο από τη ρίζα. Σε αυτή την περίπτωση μόνο, η ρίζα είναι φύλλο και όχι εσωτερικός κόμβος.

[1] Θα χρησιμοποιηθούν οι ορισμοί και η ορολογία από το βιβλίο των Sedgewick-Flajolet, An Introduction to the Analysis of Algorithms

Full Binary Tree είναι το δυαδικό δέντρο στο οποίο κάθε κόμβος έχει είτε 0 είτε 2 παιδιά,(όπως στο σχήμα πιο πάνω)[2].

Complete Binary Tree είναι το δυαδικό δέντρο στο οποίο τα όλα τα φύλλα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο (βάθος).

Ιδιότητα Σε full binary tree ισχύει η σχέση:

$$\#\text{φύλλων} = \#\text{εσωτερικών κόμβων}+1$$

Η σχέση αυτή μπορεί να αποδειχτεί με επαγωγή.

4 Αριθμοί Catalan

Οι αριθμοί Catalan μπορούν να οριστούν ως εξής:

$$T_N = \#\text{ δυαδικών δέντρων (full) με N εσωτερικούς κόμβους (N+1 φύλλα)}$$

Στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε το γενικό τύπο για τους αριθμούς Catalan ως εξής:

- Εύρεση του αναδρομικού τύπου της παραπάνω ακολουθίας
- Εύρεση της γεννήτριας συνάρτησης της ακολουθίας από τον αναδρομικό της τύπο
- Εύρεση του γενικού τύπου της ακολουθίας από τη γεννήτρια συνάρτηση

4.1 Αναδρομική σχέση για τους αριθμούς Catalan

Στο σημείο αυτό θα επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε την αναδρομική σχέση για τους αριθμούς Catalan.

Έστω ότι για κάποιο K γνωρίζουμε τα T_{K-1} και T_{N-K}. Γνωρίζουμε δηλαδή τους τρόπους να κατασκευάσουμε δέντρα με K-1 εσωτερικούς κόμβους και δέντρα με N-K εσωτερικούς κόμβους. Μπορούμε να κατασκευάσουμε δέντρα με N εσωτερικούς κόμβους χρησιμοποιώντας τα παραπάνω δέντρα, με τον τρόπο που περιγράφεται στη συνέχεια.

Προσθέτουμε έναν κόμβο που θα παίξει το ρόλο της ρίζας και σαν δεξί παιδί θέτουμε το δέντρο με τους N-K εσωτερικούς κόμβους και σαν αριστερό παιδί θέτουμε το δέντρο με τους K-1 εσωτερικούς κόμβους. Το νέο δυαδικό δέντρο που δημιουργείται έχει πλέον N εσωτερικούς κόμβους (N-1 από το αριστερό

[2] Στο εξής, στα πλαίσια των διαλέξεων όποτε θα αναφερόμαστε σε δυαδικά δέντρα θα εννοούμε full binary trees

παιδί + N-K από το δεξί παιδί + η ρίζα = N εσωτερικοί κόμβοι). Το παραπάνω μπορεί γίνεται για όλους τους αριθμούς K από το 1 έως το N. Επομένως,

$$T_N = \sum_{K=1}^{N} T_{K-1} T_{N-K}$$

Σαν αρχικές τιμές χρειαζόμαστε τα T_0 και T_1.

- $T_0 = 1$ καθώς υπάρχει μόνο ένα δέντρο χωρίς εσωτερικό κόμβο, αυτό που αποτελείται μόνο από τη ρίζα
- $T_1 = 1$ καθώς υπάρχει μόνο ένα δέντρο με έναν εσωτερικό κόμβο και είναι αυτό που αποτελείται από τη ρίζα μαζί με τα δύο παιδιά της

Συνεπώς,

$$T_N = \sum_{K=1}^{N} T_{K-1} T_{N-K}$$
$$T_0 = 1, T_1 = 1$$

4.2 Υπολογισμός της Γεννήτριας Συνάρτησης

Στη συνέχεια υπολογίζεται η Γεννήτρια Συνάρτηση $T(z)$ για την ακολουθία T_N από την αναδρομική σχέση που υπολογίστηκε προηγουμένως, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που παρουσιάστηκε νωρίτερα.

$$\sum_{N=1}^{\infty} T_N z^N = \sum_{N=1}^{\infty} \left(\sum_{K=1}^{N} T_{K-1} T_{N-K} \right) z^N$$

$$T(z) - T_0 = \sum_{N=1}^{\infty} \left(\sum_{K=0}^{N-1} T_K T_{N-K-1} \right) z^N$$

$$T(z) - T_0 = z \sum_{N=1}^{\infty} \left(\sum_{K=0}^{N-1} T_K T_{N-K-1} \right) z^{N-1}$$

$$T(z) - T_0 = z \sum_{N=0}^{\infty} \left(\sum_{K=0}^{N-1} T_K T_{N-K} \right) z^N$$

$$T(z) - 1 = zT^2(z) \text{ (ιδιότητα συνέλιξης της ακολουθίας } T_N \text{ με τον εαυτό της)}$$

$$T(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4z}}{2z}$$

Με βάση τις αρχικές συνθήκες, $T_0 = T_1 = 1$, επιλέγω την κατάλληλη ρίζα. Επομένως,

$$T(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$$

Η εύρεση του γενικού τύπου των αριθμών Catalan από τη γεννήτρια συνάρτηση που μόλις υπολογίσαμε, θα παρουσιαστεί στην επόμενη διάλεξη.