Ψηφιακές Τηλεπικοινωνίες

Βέλτιστος Δέκτης

Σύνδεση με τα Προηγούμενα

- Επειδή το πραγματικό κανάλι είναι αναλογικό,
  - κατά τη διαβίβαση ψηφιακής πληροφορίας,
  - αντιστοιχίζουμε τα σύμβολα σε αναλογικές κυματομορφές
- Τα bits της δυαδικής πληροφορίας ομαδοποιούνται σε σύμβολα των $k=log_2M$ bits
- Απαιτούνται *M* κυματομορφές που βρίσκονται σε έναν *N*-D χώρο (N=1, 2, …)
- Είδαμε κάποιες βασικές επιλογές ως προς τις κυματομορφές

Αντίποδες: PAM, PSK, QAM, Ορθογώνιες: PPM, FSK

Διαστάσεις: 1-D, 2-D, 2-D N-D, N-D (M=N)

- Θα δούμε στη συνέχεια το πώς ο δέκτης διαχειρίζεται τις κυματομορφές του λαμβανόμενου σήματος προκειμένου να εξάγει την αρχική ψηφιακή πληροφορία

Εισαγωγή

- Κατά τη διάρκεια μετάδοσης ενός συμβόλου, ο πομπός στέλνει την κυματομορφή $s_m(t)$, $m = 1, \ldots, M$

- Το κανάλι AWGN εισάγει θόρυβο $n(t)$
  - με φασματική πυκνότητα ισχύος $S_n(f)=N_0/2$ [W/Hz]

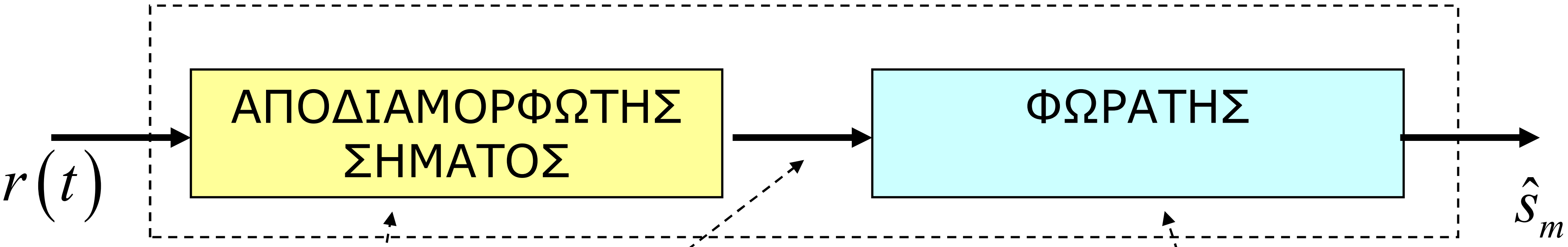
- Ο δέκτης λαμβάνει $$\boxed{r(t)=s_m(t)+n(t),\quad 0\le t\le T}$$

- Παρατηρώντας το $r(t)$ καλείται να πάρει μια απόφαση για το ποιο από τα σύμβολα $\{s_m\}$ στάλθηκε

- Ζητούμενο: ποιος είναι ο βέλτιστος δέκτης;

Βασικά Τμήματα Βέλτιστου Δέκτη

Ελαχιστοποιεί την πιθανότητα
σφάλματος απόφασης



$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 & \cdots & r_N \end{bmatrix}^T$$

Μπορεί να είναι είτε
[Αποδιαμορφωτής Συσχέτισης]
είτε Αποδιαμορφωτής
Προσαρμοσμένων Φίλτρων

Αποφασίζει ποια από τις
M κυματομορφές
μεταδόθηκε βασισμένος
στην παρατήρηση του
διανύσματος **r**

Αποδιαμορφωτής Συσχέτισης

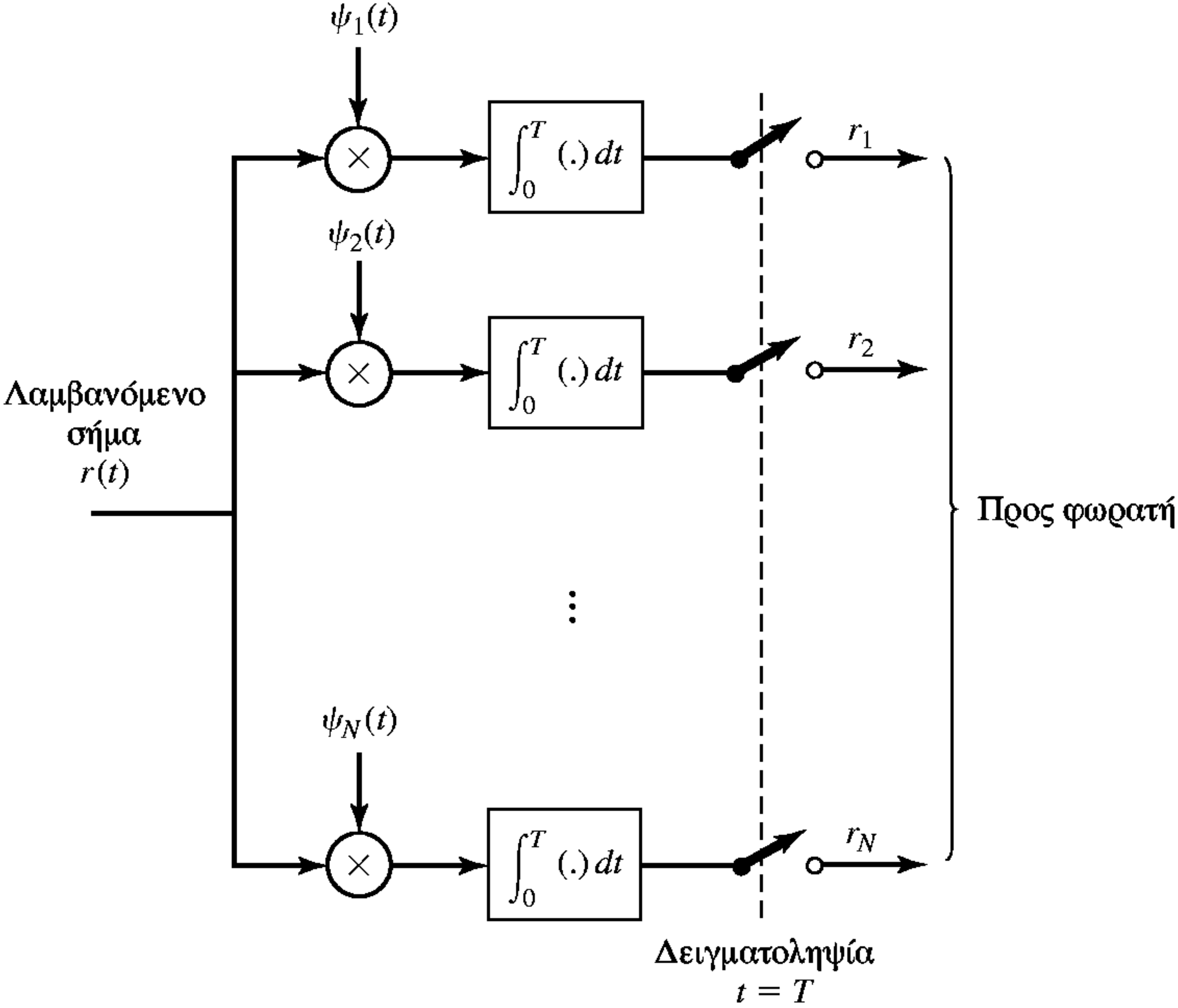
- Λειτουργία:
  - είσοδος: η λαμβανόμενη αναλογική κυματομορφή *r(t)*
  - έξοδος: ένα *N*-διάστατο διάνυσμα

- Το λαμβανόμενο σήμα $\boxed{r(t) = s_m(t) + n(t), \quad 0 \le t \le T}$

  προβάλλεται στις διαστάσεις του χώρου κυματομορφών

- Πώς υπολογίζονται οι προβολές;
  - ολοκλήρωση του λαμβανόμενου σήματος με την αντίστοιχη συνάρτηση βάσης
  - *N* ολοκληρώσεις (συσχετίσεις) → $\boxed{\int_0^T r(t)\psi_k(t)\,dt}$

Αποδιαμορφωτής Συσχέτισης



Αποτέλεσμα Συσχετιστών

- Σε κάθε συσχετιστή, *k=1,...,N,*

$$r_k = \int_0^T r(t)\psi_k(t)\,dt$$
$$= s_{mk} + n_k$$

- όπου s_{mk} είναι η προβολή του σήματος

$$s_{mk} = \int_0^T s_m(t)\psi_k(t)\,dt$$

- και n_k είναι η προβολή του θορύβου στην k-οστή συνιστώσα του χώρου

$$n_k = \int_0^T n(t)\psi_k(t)\,dt$$

Διανυσματική Αναπαράσταση

- Τα αποτελέσματα των συσχετιστών μπορούν να γραφούν σε μορφή διανύσματος ως

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{s}_m + \mathbf{n}}$$

- Τα στοιχεία του $\mathbf{s}_m$ εξαρτώνται από το ποιο σήμα μεταδόθηκε

- Τα στοιχεία του **n** είναι τυχαίες μεταβλητές

- Τι είναι τα στοιχεία του **r** ;

Επάρκεια των Προβολών (1)

- Ποιο είναι το αποτέλεσμα της προβολής → σε ότι αφορά το χρήσιμο σήμα $s_m(t)$;

$$s_{mk} = \int_0^T s_m(t)\psi_k(t)\,dt$$

- Κάθε $s_m(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσης $\psi_k(t)$:

$$s_m(t) = \sum_{n=1}^{N} s_{mn}\psi_n(t), \quad m = 1, \ldots, M$$

- Άρα, προβάλλοντας το λαμβανόμενο σήμα στις N συναρτήσεις βάσης δε χάνουμε ενέργεια της κυματομορφής $s_m(t)$ *του* συμβόλου.

Επάρκεια των Προβολών (2)

- Ποιο είναι το αποτέλεσμα της προβολής σε ότι αφορά τον θόρυβο;
- Ο θόρυβος n(t), στη γενική περίπτωση, δεν είναι περιορισμένος στις N συγκεκριμένες συνιστώσες (όπως, εκ κατασκευής, είναι το χρήσιμο σήμα)
  - *αγνοώντας τυχόν προβολές του θορύβου σε άλλες συνιστώσες, πέρα των N, δε χάνουμε χρήσιμη πληροφορία και επιπλέον μειώνεται η ισχύς του θορύβου*
  - *Ο θόρυβος (συνολικά αλλά και ο εκτός του N-διάστατου χώρου) είναι ανεξάρτητος από το χρήσιμο σήμα* $s_m(t)$
- Τελικό Συμπέρασμα:

  Με τη διαδικασία των προβολών του r(t) στις N συναρτήσεις βάσεις δε χάνουμε χρήσιμη πληροφορία. Οι έξοδοι των συσχετιστών είναι επαρκείς στατιστικές (sufficient statistics) για τη λήψη απόφασης.

Ανάλυση Διανύσματος $\mathbf{r}=\mathbf{s}_m+\mathbf{n}$

- Το $\mathbf{s}_m$, για δεδομένο m, είναι ντετερμινιστικό (αιτιοκρατικό)
- Τα στοιχεία του **n**

$$n_k = \int_0^T n(t)\psi_k(t)\,dt$$

είναι Gaussian τυχαίες μεταβλητές (γιατί;)

- Μέση τιμή συνιστωσών θορύβου

$$E[n_k] = \int_0^T E[n(t)]\psi_k(t)\,dt = 0$$

- Συνδιασπορά (Συμμεταβολή, Covariance)

$$E[n_k n_m] = \int_0^T \int_0^T E[n(t)n(\tau)]\psi_k(t)\psi_m(\tau)\,dt\,d\tau = \begin{cases} \dfrac{N_0}{2}, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases}$$

Ανάλυση Διανύσματος $\mathbf{r}=\mathbf{s}_m+\mathbf{n}$

- Συνιστώσες Θορύβου στο διάνυσμα **r**
  - ασυσχέτιστες τ.μ. Gaussian, άρα και ανεξάρτητες
  - μηδενικής μέσης τιμής και ίδιας διασποράς $\sigma_n^2=N_0/2$
  - η από κοινού pdf είναι:

$$f(\mathbf{n})=\prod_{i=1}^{N} f(n_i)=\frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}}e^{-\sum_{i=1}^{N}\frac{n_i^2}{N_0}}$$

όπου

$$f(n_i)=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}e^{-n_i^2/N_0}$$

- Συνιστώσες Διανύσματος **r**

Λόγω των συνιστωσών του θορύβου, είναι:

  - Gaussian τυχαίες μεταβλητές και ανεξάρτητες
  - μέσης τιμής s_{mk} η κάθε μία, και ίσης διασποράς $\sigma_n^2=N_0/2$

Υπό Συνθήκη PDF

- Λόγω ανεξαρτησίας των στοιχείων του **r** μεταξύ τους, η από κοινού υπό συνθήκη pdf να ληφθεί **r** δεδομένου ότι στάλθηκε $\mathbf{s}_m$ είναι

$$f\left(\mathbf{r}\middle|\mathbf{s}_m\right)=\prod_{i=1}^{N} f\left(r_k\middle|s_{mk}\right)$$

  - όπου

$$f\left(r_k\middle|s_{mk}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}e^{-\left(r_k-s_{mk}\right)^2/N_0}$$

- Τελικά η από κοινού pdf για κάθε *m* είναι

$$f\left(\mathbf{r}\middle|\mathbf{s}_m\right)=\frac{1}{\left(\pi N_0\right)^{N_0/2}}\exp\left(-\left\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_m\right\|^2/N_0\right)$$

- Καλείται και συνάρτηση πιθανοφάνειας (likelihood) του $\mathbf{s}_m$

Αποδιαμορφωτής Προσαρμοσμένου Φίλτρου (ΟΧΙ)

- Εναλλακτικός τρόπος υλοποίησης της συσχέτισης στον Α/Δ σήματος
- Συσχέτιση *r(t)* με συνάρτηση βάσης $r_k = \int_0^T r(t)\psi_k(t)\,dt$
- Συνέλιξη *r(t)* με φίλτρο $h_k(t)$ $y_k(t) = \int_0^t r(\tau)h_k(t-\tau)\,d\tau$
- Αν επιλέξω ως φίλτρο το $h_k(\tau) = \begin{cases} \psi_k(T-\tau), 0 \le \tau \le T \\ 0, \qquad \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$
  - και δειγματοληπτήσω την έξοδο του φίλτρου για *t=T*

τότε οι δύο διατάξεις είναι ισοδύναμες.

Προσαρμοσμένο Φίλτρο (ΟΧΙ)

- Γενικά ένα φίλτρο με κρουστική απόκριση

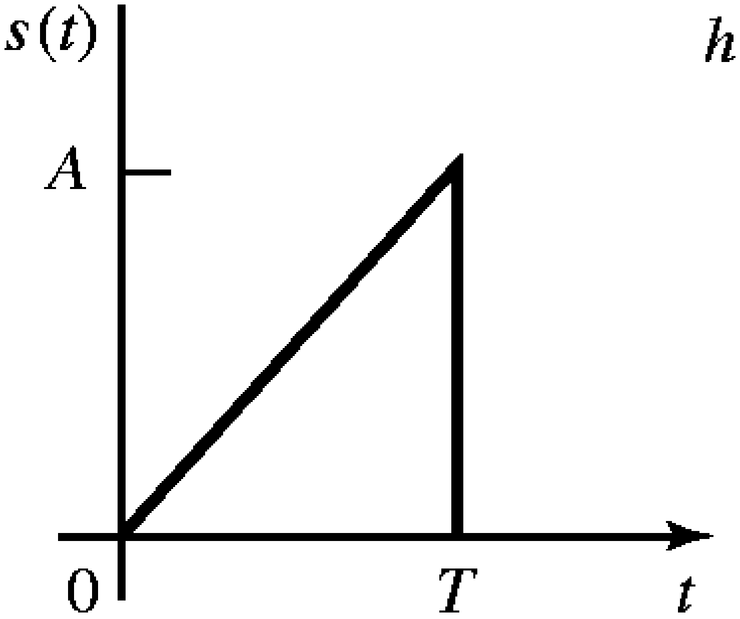
$$\boxed{h(t) = s(T-t)}$$

όπου το σήμα *s(t)* είναι μηδέν εκτός του *[0,T]*, λέγεται προσαρμοσμένο φίλτρο (matched filter) στο σήμα *s(t)*

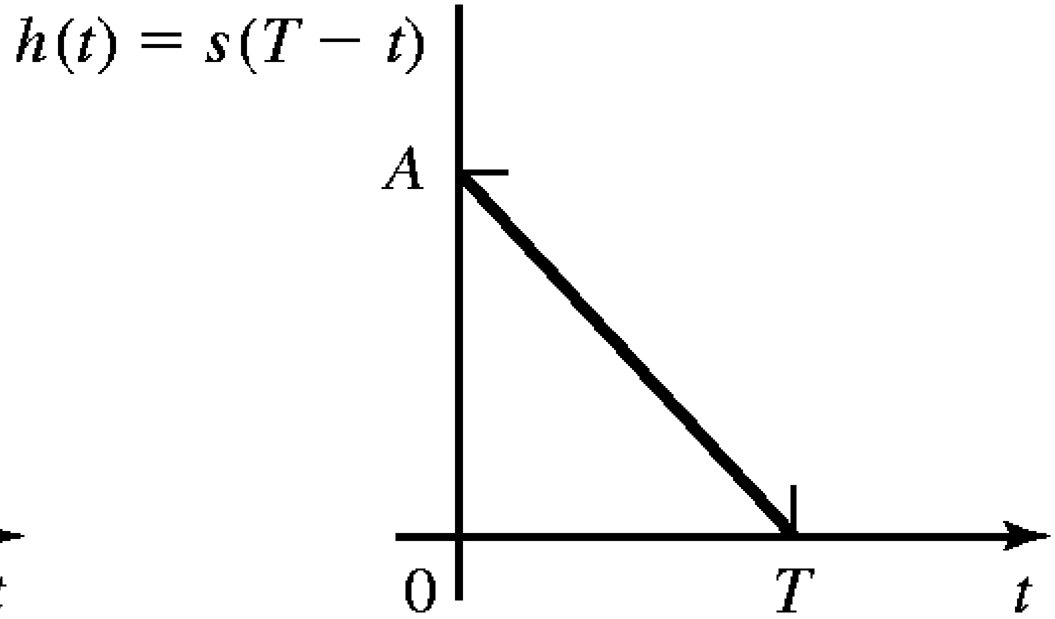
- Παρατήρηση:
  - –αν στο προσαρμοσμένο φίλτρο χρησιμοποιηθεί ως είσοδος το σήμα *s(t)*,
  - –τότε η έξοδος του φίλτρου είναι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του *s(t)*

$$\boxed{y(t) = \int_0^t s(\tau) s(T-t+\tau) d\tau}$$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο (2) (ΟΧΙ)



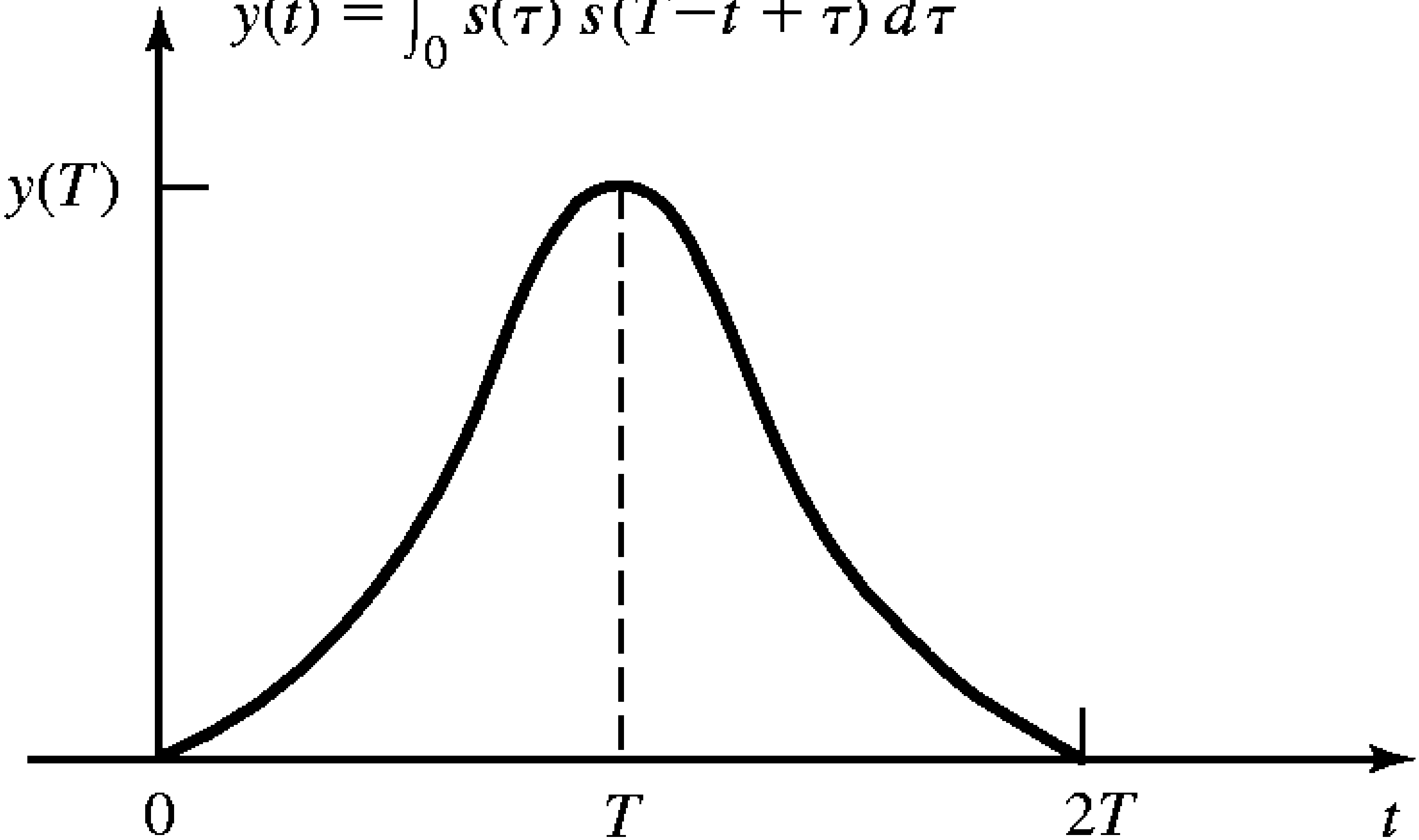
(α) Σήμα $s(t)$



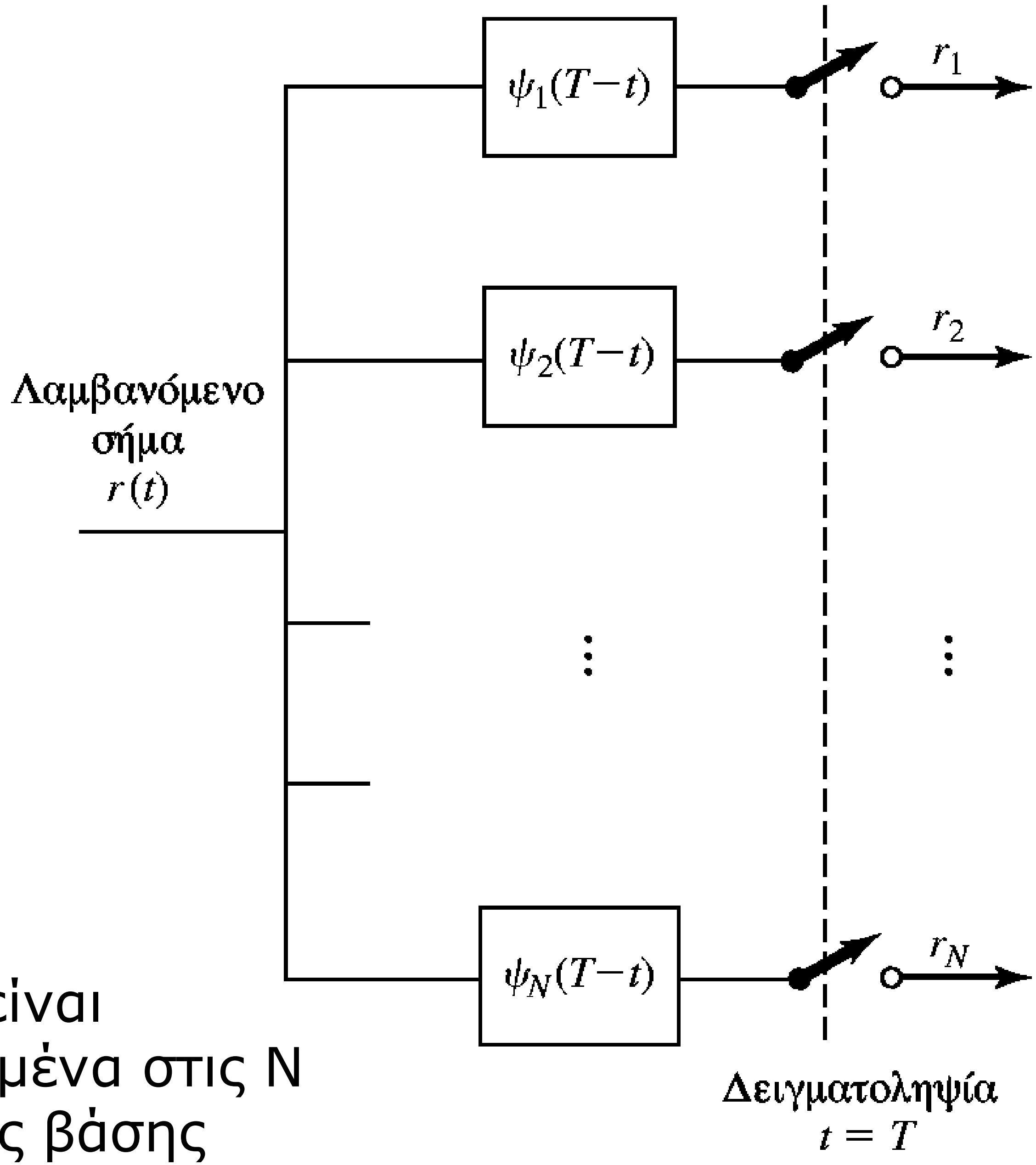
(β) Κρουστική απόκριση φίλτρου προσαρμοσμένου στο $s(t)$

Προσαρμοσμένο Φίλτρο (3) (ΟΧΙ)

$$y(t) = \int_0^t s(\tau)\, s(T-t+\tau)\, d\tau$$



Διάγραμμα (ΟΧΙ)



- Τα φίλτρα είναι προσαρμοσμένα στις N συναρτήσεις βάσης

Ιδιοτητα Προσαρμοσμενου Φιλτρου (ΟΧΙ)

- Ιδιότητα: Μεγιστοποίηση SNR Εξόδου.

  Εάν ένα σήμα διαβρώνεται από AWGN, το φίλτρο με κρουστική απόκριση προσαρμοσμένη στο s(t) μεγιστοποιεί το SNR εξόδου τη χρονική στιγμή t=T

- Η μέγιστη τιμή του SNR είναι

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{2E_s}{N_0}}$$

Ερμηνεία στο Πεδίο Συχνοτήτων (ΟΧΙ)

- Αν το σήμα *s(t)* έχει φάσμα *S(f)*, τότε το προσαρμοσμένο φίλτρο σε αυτό έχει απόκριση συχνότητας

$$s(t) \leftrightarrow S(f)$$
$$h(t) = s(T-t) \leftrightarrow S^*(f)e^{-j2\pi fT}$$

  - ίσο με το συζυγές του *S(f)*
  - επί έναν παράγοντα φάσης λόγω της καθυστέρησης δειγματολήπτησης

- Έξοδος του φίλτρου

$$y(t) = s(t) * h(t) \leftrightarrow Y(f) = \left|S(f)\right|^2 e^{-j2\pi fT}$$

Ερμηνεία στο Πεδίο Συχνοτήτων (2) (ΟΧΙ)

- Η συνιστώσα του σήματος στην έξοδο εκφράζεται ως

$$y_s(t) = \int_0^t s(\tau)\, s(T - t + \tau)\, d\tau$$

- Δειγματοληπτείται τη χρονική στιγμή $t=T$

$$y_s(T) = \int_0^T s^2(\tau)\, d\tau = E_s$$

- Η ισχύς του σήματος είναι

$$P_s = y_s^2(T) = E_s^2$$

Ερμηνεία στο Πεδίο Συχνοτήτων (3) (ΟΧΙ)

- Η συνιστώσα του θορύβου στην έξοδο εκφράζεται ως

$$y_n(t) = n(t) * h(t)$$

- Με πυκνότητα φάσματος ισχύος

$$S_n(f) = |H(f)|^2 N_0/2$$

- Η συνολική (σε όλο το εύρος των συχνοτήτων) ισχύς του θορύβου είναι

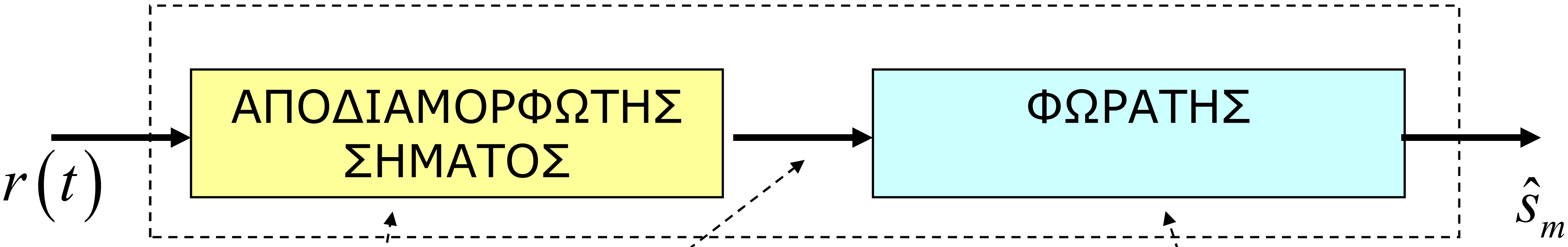
$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)\,df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2\,df = \frac{E_s N_0}{2}$$

- Άρα το SNR είναι

$$SNR = \frac{P_s}{P_n} = \frac{2E_s}{N_0}$$

Βασικά Τμήματα Βέλτιστου Δέκτη

Ελαχιστοποιεί την πιθανότητα
σφάλματος απόφασης



$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 & \cdots & r_N \end{bmatrix}^T$$

Μπορεί να είναι είτε
<u>Αποδιαμορφωτής Συσχέτισης</u>
είτε Αποδιαμορφωτής Προσαρμοσμένων Φίλτρων

Αποφασίζει ποια από τις Μ κυματομορφές μεταδόθηκε βασισμένος στην παρατήρηση του διανύσματος **r**

Βέλτιστος Φωρατής

- Λειτουργία:
  - είσοδος: το N-διάστατο διάνυσμα των προβολών
  - έξοδος: η απόφαση για το σύμβολο που στάλθηκε
- Ερώτηση: δεδομένου του διανύσματος $\boldsymbol{r}$, ποιος είναι ο βέλτιστος τρόπος να αποφασίσει ο φωρατής ποιο σύμβολο στάλθηκε;
- Υπόθεση: το σύστημα δεν έχει μνήμη μεταξύ διαδοχικών περιόδων συμβόλου T
- Απάντηση: δοθείσης της παρατήρησης $\boldsymbol{r}$, θέλουμε να μεγιστοποιείται η πιθανότητα σωστής απόφασης

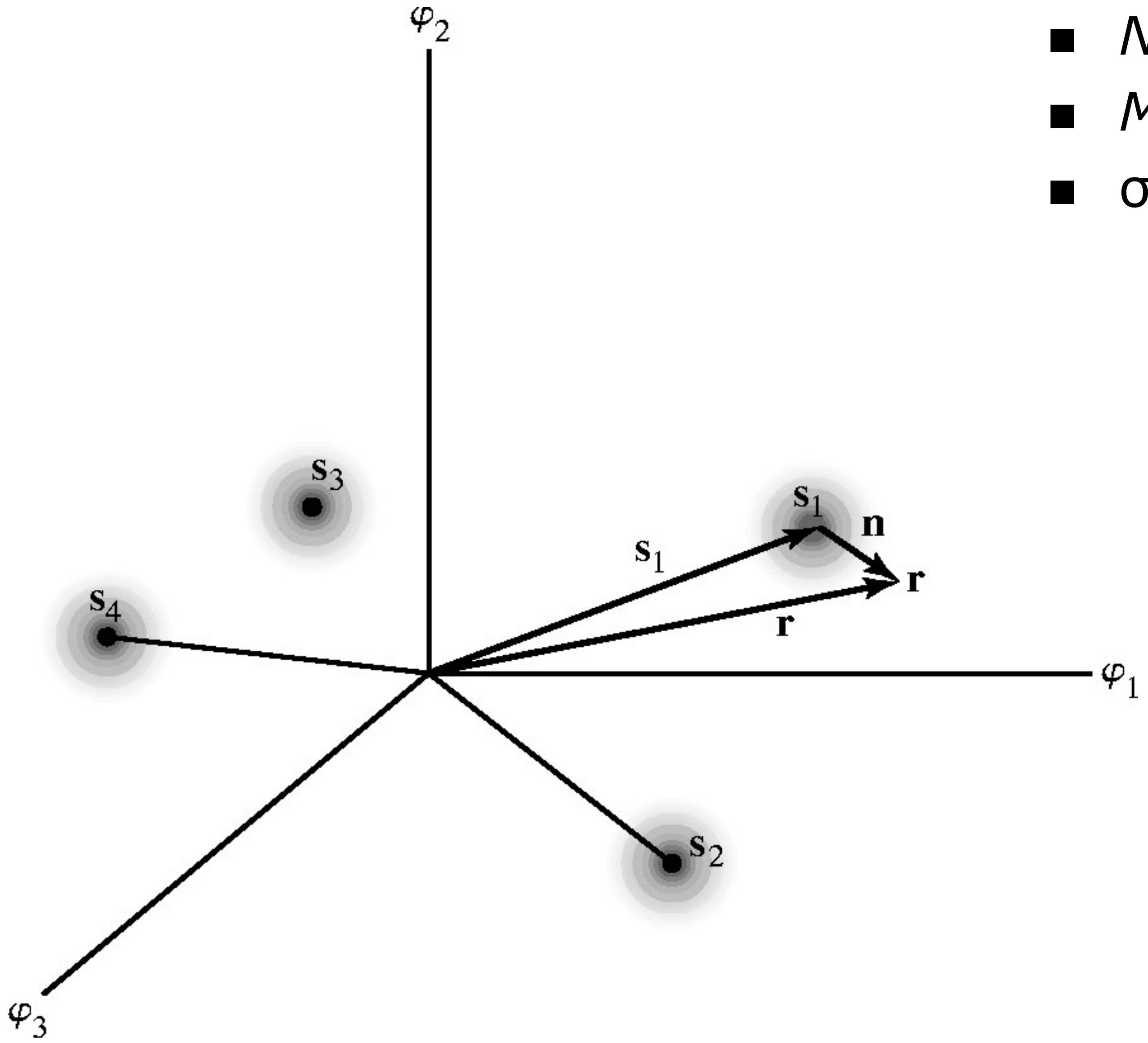
Γεωμετρική Ερμηνεία του *r*

- Το διάνυσμα των προβολών εκφράζεται ως

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{s}_m + \mathbf{n}}$$

- Λόγω των ιδιοτήτων του θορύβου και με βάση την ανάλυση που έγινε
  - το διάνυσμα ***r*** μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα (υπερ-)σφαιρικό νέφος γύρω από το διάνυσμα $\boldsymbol{s}_m$
  - η πυκνότητα του νέφους είναι υψηλότερη στο κέντρο και αποσβενόμενη προς τα έξω
  - τα σημεία που είναι πιο κοντά στο $\boldsymbol{s}_m$ είναι πιθανότερα να εμφανιστούν
  - όσο μικρότερη είναι η διασπορά του θορύβου, $N_0/2$, τόσο πιο συμπαγής είναι η σφαίρα
  - όσο μεγαλύτερη είναι η διασπορά, τόσο πιο απλωμένο είναι το νέφος

Παράδειγμα



- $N=3$
- $M=4$
- στάλθηκε το $\boldsymbol{s}_1$

Maximum A-Posteriori Probability

- Ο βέλτιστος κανόνας απόφασης είναι να επιλέξουμε το σύμβολο s_m με τη μεγαλύτερη πιθανότητα να οφείλεται σε αυτό η παρατήρηση $\boldsymbol{r}$, δηλαδή,
  - υπολογίζουμε την εκ των υστέρων (a-posteriori) πιθανότητα να στάλθηκε κάθε ένα από τα σύμβολα s_m δεδομένου ότι έχουμε λάβει το $\boldsymbol{r}$
  - και επιλέγουμε εκείνο που μεγιστοποιεί αυτήν την πιθανότητα, δηλαδή το κριτήριο μας είναι:

$$\boxed{\max_{\mathbf{s_m}} P\left(\mathbf{s}_m \middle| \mathbf{r}\right)}$$

- Το κριτήριο αυτό λέγεται
  - κριτήριο Μέγιστης εκ των Υστέρων Πιθανότητας (Maximum A-posteriori Probability - MAP)

Κριτήριο MAP

- Το κριτήριο MAP
  - μεγιστοποιεί την πιθανότητα σωστής απόφασης
  - άρα, ελαχιστοποιεί την πιθανότητα σφάλματος

- Αν ο δέκτης δεν είχε καν την παρατήρηση ***r***
  - τότε θα διάλεγε ένα σύμβολο με βάση τις εκ των προτέρων πιθανότητες εμφάνισης $P(s_m)$
  - δηλαδή απλά θα διάλεγε το πιθανότερο σύμβολο

- Δεδομένου όμως ότι ο δέκτης έχει την παρατήρηση ***r***

  \- τότε θα επιλέξει το σύμβολο s_m *που μεγιστοποιεί την* $P(s_m/\mathbf{r})$

Απλοποίηση (MAP → ML) (1/2)

- Κανόνας Bayes

$$P(\mathbf{s}_m|\mathbf{r}) = \frac{f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)P(\mathbf{s}_m)}{f(\mathbf{r})}$$

- $f(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}_m)$: η πιθανότητα να λάβω $\boldsymbol{r}$, αν στάλθηκε το $\boldsymbol{s_m}$
  (*πιθανοφάνεια του* $\boldsymbol{s_m}$ *δοθέντος του* $\boldsymbol{r}$)

- $P(\boldsymbol{s}_m)$: η a-priori πιθανότητα εμφάνισης του συμβόλου

- $f(\boldsymbol{r})$: η πιθανότητα να λάβω το συγκεκριμένο διάνυσμα
  (είναι ανεξάρτητη του συμβόλου)

* Προσέξτε τη διαφορά στο συμβολισμό: $P(\cdot)$, $f(\cdot)$

Απλοποίηση (MAP → ML) (2/2)

- Απλοποίηση:
  - αν τα σύμβολα είναι ισοπίθανα,
  - τότε $P(\boldsymbol{s}_m)=1/M$
  - δηλαδή το $P(\boldsymbol{s}_m)$ γίνεται σταθερά ανεξάρτητη του συμβόλου

- Η μεγιστοποίηση του $P(\boldsymbol{s}_m|\,\boldsymbol{r})$ αντιστοιχεί σε μεγιστοποίηση του $f(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}_m)$

$$\boxed{\max_{\mathbf{s}_m} P\left(\mathbf{s}_m \middle| \mathbf{r}\right) \Rightarrow \max_{\mathbf{s}_m} f\left(\mathbf{r} \middle| \mathbf{s}_m\right)}$$

- Συμπέρασμα:

  Υποθέτοντας ισοπίθανα σύμβολα, το κριτήριο MAP απλοποιείται στο κριτήριο μεγιστοποίησης της συνάρτησης πιθανοφάνειας

Κριτήριο ML

$$\boxed{\max_{\mathbf{s}_m} f\left(\mathbf{r}\middle|\mathbf{s}_m\right)}$$

- Το κριτήριο αυτό καλείται
  - κριτήριο μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood - ML)

- Παρατήρηση:

  Αντί να μεγιστοποιήσουμε την pdf $f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$, μπορούμε να μεγιστοποιήσουμε οποιοδήποτε μονότονη συνάρτησή της

  - συνήθως χρησιμοποιείται η $ln(f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m))$ *(που είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση)*

Κριτήριο ML (2)

- Υπενθύμιση: η συνάρτηση πιθανοφάνειας υπολογίστηκε ως

$$f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N_0/2}} \exp\left(-\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_m\|^2 / N_0\right)$$

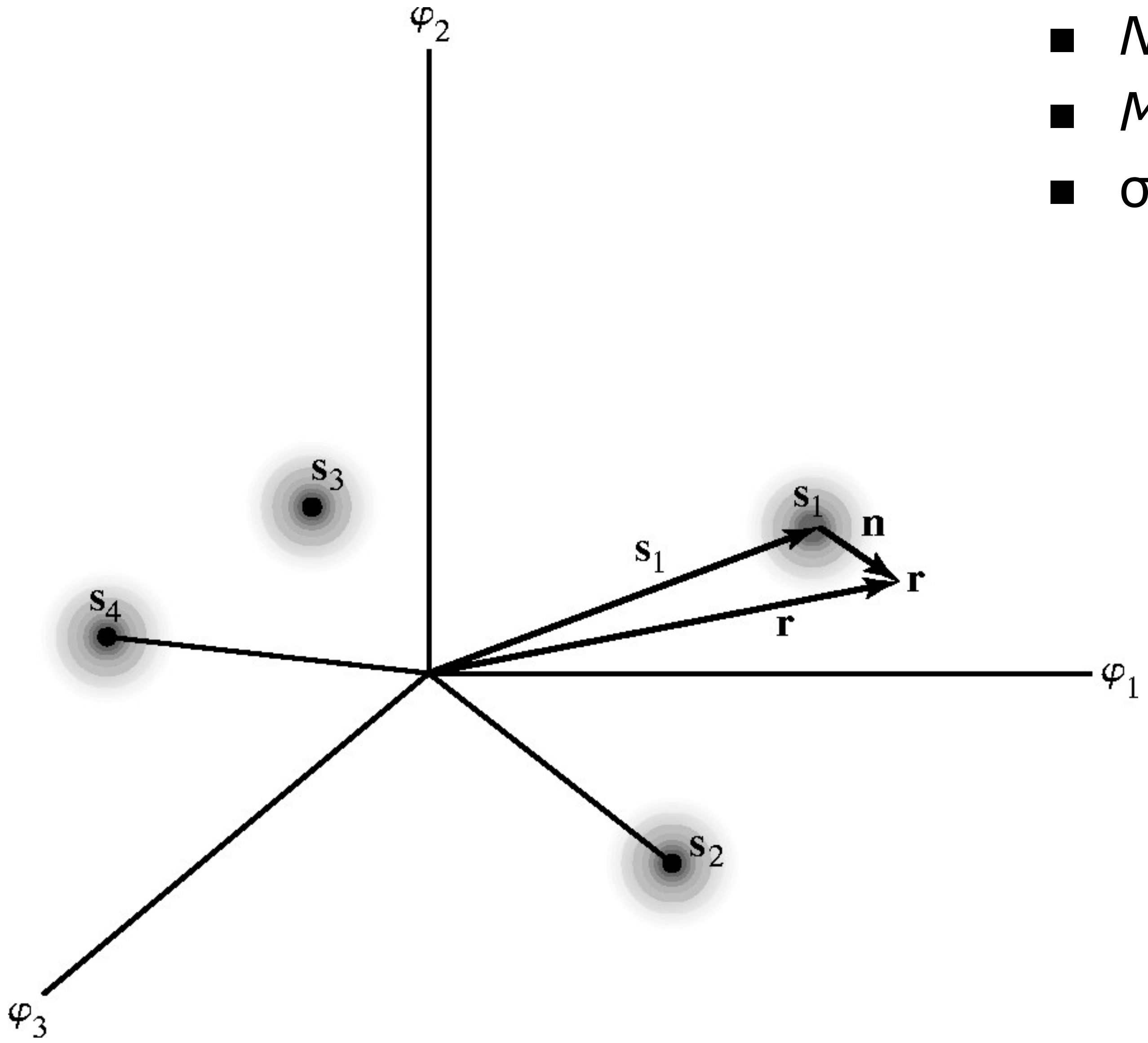
- Το κριτήριο ML εκφράζεται πλέον ως

$$\max_{\mathbf{s}_m} \ln f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m) = \min_{\mathbf{s}_m} \|\mathbf{r}-\mathbf{s}_m\|^2$$

- **Συμπέρασμα:**

"Το βέλτιστο σύμβολο είναι αυτό που έχει την ελάχιστη Ευκλείδια απόσταση από το διάνυσμα του λαμβανόμενου σήματος"

Το προηγούμενο Παράδειγμα



- *N=3*
- *M=4*
- στάλθηκε το $\boldsymbol{s}_1$

Φώραση Ελάχιστης Απόστασης

- Ο φωρατής καλείται να υπολογίσει τις μετρικές απόστασης

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_m\|^2 = \sum_{k=1}^{N} (r_k - s_{mk})^2$$

  – ανάμεσα σε όλα τα σύμβολα και το ληφθέν διάνυσμα

  – και να επιλέξει το σύμβολο με τη μικρότερη απόσταση

- Εναλλακτικά,

$$\min_{\mathbf{s}_m} \left(\|\mathbf{r}\|^2 - 2\mathbf{r}^T \mathbf{s}_m + \|\mathbf{s}_m\|^2 \right) = \max_{\mathbf{s}_m} \left(2\mathbf{r}^T \mathbf{s}_m - \|\mathbf{s}_m\|^2 \right)$$

Φώραση Μέγιστης Συσχέτισης

- Ορίζεται η ποσότητα

$$\boxed{C\left(\mathbf{r},\mathbf{s}_m\right)=2\mathbf{r}^T\mathbf{s}_m-\left\|\mathbf{s}_m\right\|^2}$$

  - πρώτος όρος: είναι η συσχέτιση μεταξύ του συμβόλου και του λαμβανόμενου σήματος
  - δεύτερος όρος: σταθμίζει την ενέργεια κάθε συμβόλου

- Αν τα σύμβολα είναι ίσης ενέργειας (π.χ. PSK)
  - ο δεύτερος όρος μπορεί να αγνοηθεί

- Η ποσότητα ονομάζεται μετρική συσχέτισης

- Συμπέρασμα:
  ο βέλτιστος φωρατής ML επιλέγει το σύμβολο
  - *με τη μικρότερη μετρική απόστασης*
  - *(ή ισοδύναμα) με τη μεγαλύτερη μετρική συσχέτισης*

MAP για μη Ισοπίθανα Σύμβολα

- Το κριτήριο MAP απλοποιείται στο ML όταν τα σύμβολα είναι ισοπίθανα

- Αν τα σύμβολα δεν είναι ισοπίθανα, ο βέλτιστος φωρατής MAP θα πρέπει να μεγιστοποιήσει κανονικά την

$$\boxed{\max_{\mathbf{s}_m} P\left(\mathbf{s}_m \middle| \mathbf{r}\right) = \max_{\mathbf{s}_m} f\left(\mathbf{r} \middle| \mathbf{s}_m\right) P\left(\mathbf{s}_m\right)}$$

Πιθανότητα Σφάλματος (ΟΧΙ)

Η μέση πιθανότητα σφάλματος για δυαδικές ψηφιακές διαμορφώσεις εξαρτάται μόνον από το λόγο της ενέργειας ανά bit και της ισχύος του θορύβου

- Δυαδικά Αντίποδα
  - 2-PAM, 2-PSK

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

- Δυαδικά Ορθογώνια
  - 2-FSK, 2-PPM

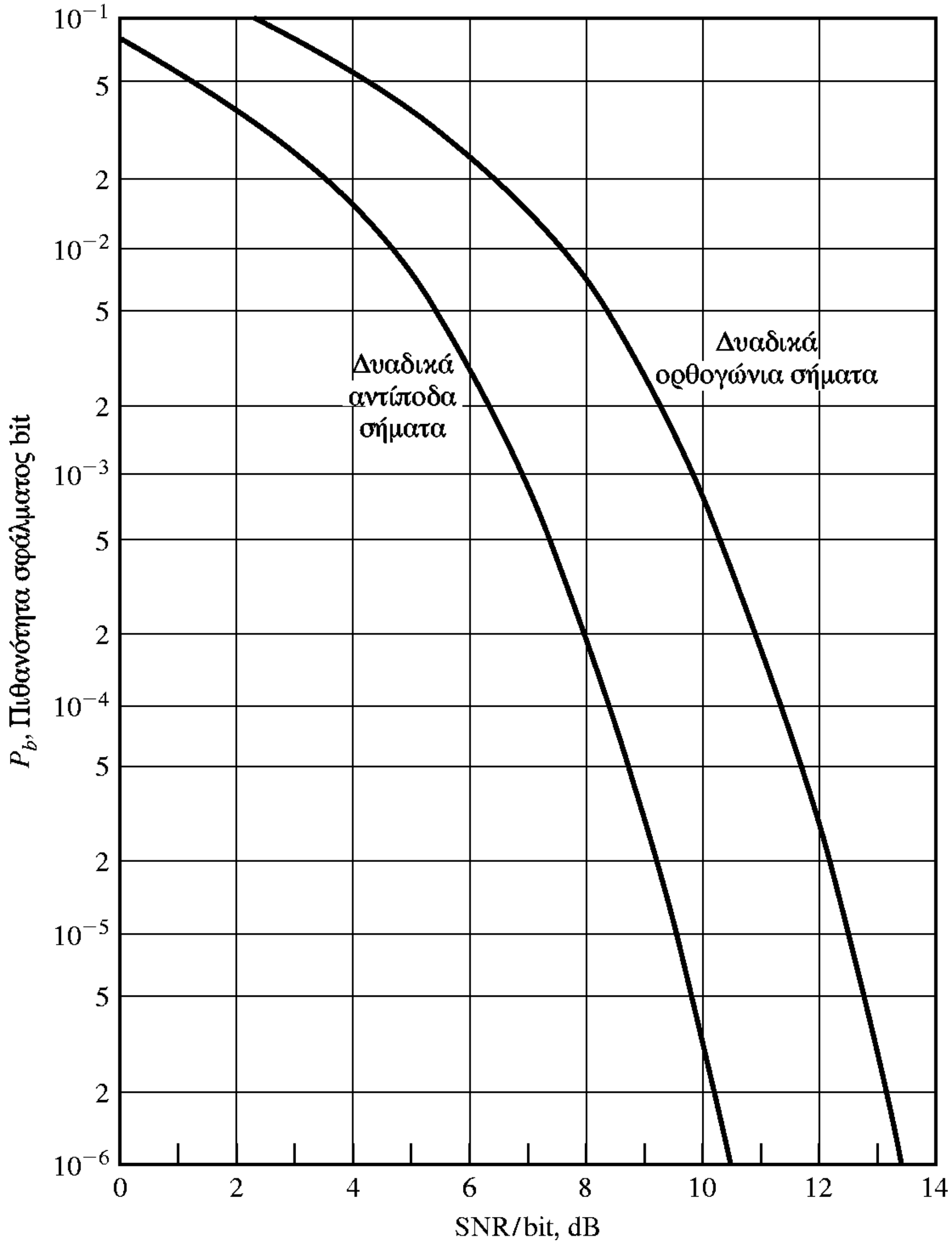
$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Η συνάρτηση Q(x) ορίζεται ως η πιθανότητα «ουράς» μιας τυπικής κανονικής κατανομής N(0,1) (δηλαδή η πιθανότητα η τ.μ. να είναι μεγαλύτερη από το όρισμα *x*)

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2/2} dt$$

$$Q(-\infty) = 1, \quad Q(0) = \frac{1}{2}, \quad Q(\infty) = 0,$$

BER συναρτήσει του SNR (ΟΧΙ)



- Ως προς την πιθανότητα σφάλματος, τα δυαδικά αντίποδα είναι προτιμότερα
- Τα ορθογώνια απαιτούν διπλάσιο SNR για να πετύχουν την ίδια πιθανότητα σφάλματος. Διπλάσιο SNR → Διπλάσια ισχύς εκπομπής
- Επειδή $10log_{10}2=3$, τα δύο SNR εκφρασμένα σε [dB] διαφέρουν κατά 3dB

3dB διαφορά