

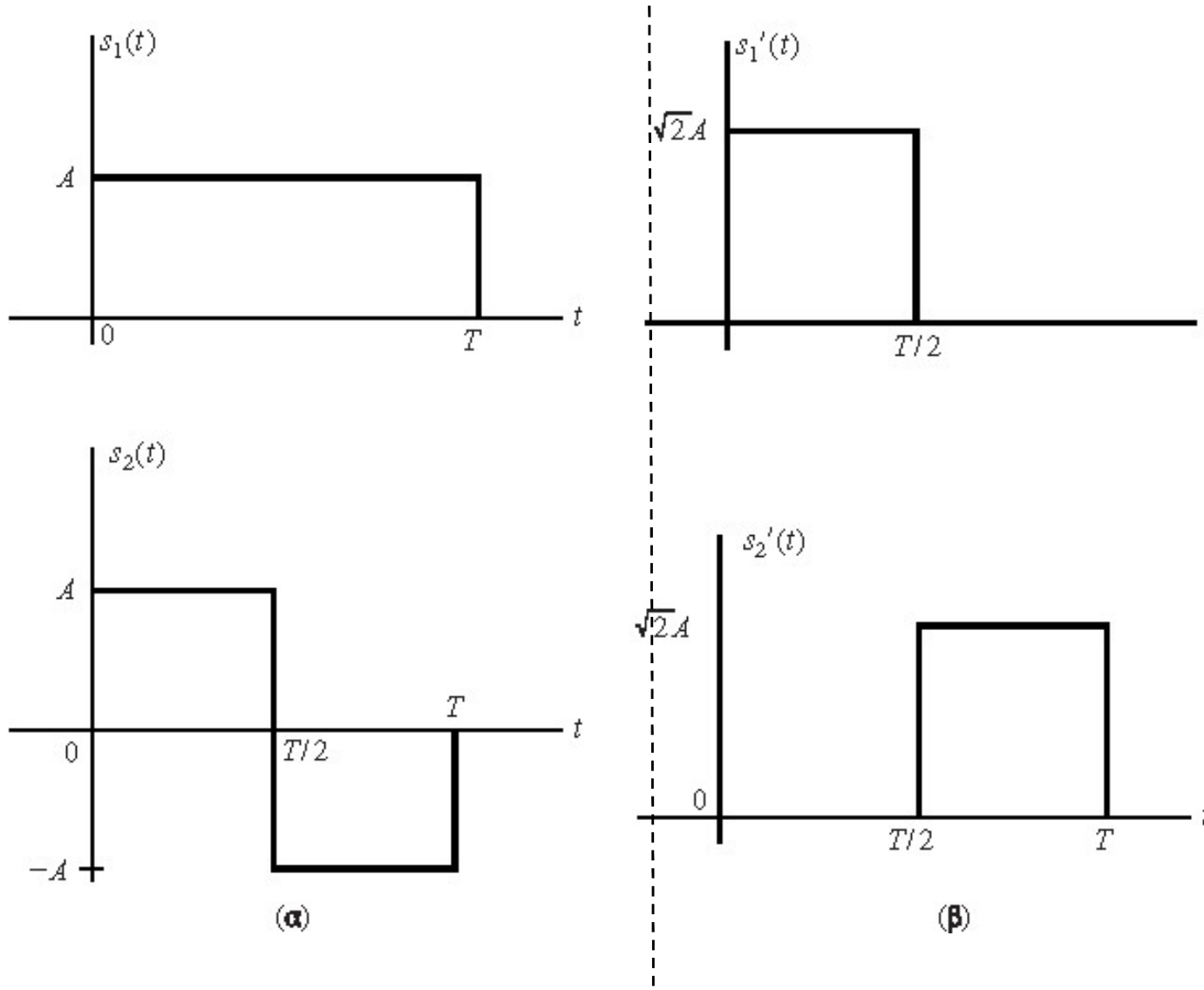
Ψηφιακές Τηλεπικοινωνίες

*Δισδιάστατες Κυματομορφές
Σήματος*

Εισαγωγή

- Στα προηγούμενα μελετήσαμε τη διαμόρφωση PAM
 - δυαδικό και M-αδικό,
 - βασικής ζώνης και ζωνοπερατό
- Σε κάθε περίπτωση προέκυπταν **μονοδιάστατες κυματομορφές σήματος**
- Στο μάθημα αυτό θα μελετήσουμε κυματομορφές σήματος που ορίζονται στο **δισδιάστατο χώρο**
- **Ερώτηση:** Γιατί χρειαζόμαστε μεγαλύτερους χώρους;
- Διακρίνουμε και εδώ δύο περιπτώσεις
 1. σήματα βασικής ζώνης
 2. ζωνοπερατά σήματα

2-D Σήματα Βασικής Ζώνης



Δύο παραδείγματα ζευγαριών όπου δεν αρκεί ο 1-D χώρος για το καθένα από αυτά (Γιατί;)

2-D Σήματα Βασικής Ζώνης (2)

- Παρατηρούμε ότι και στα δύο παραδείγματα ζευγαριών σημάτων, οι κυματομορφές είναι ορθογώνιες μεταξύ τους

$$\int_0^T s_1(t) s_2(t) dt = 0$$

- Έχουν την ίδια ενέργεια $E = A^2 T$
- Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αποστολή δυαδικής πληροφορίας $\{0, 1\}$
- Αν επιλέξουμε τις συναρτήσεις

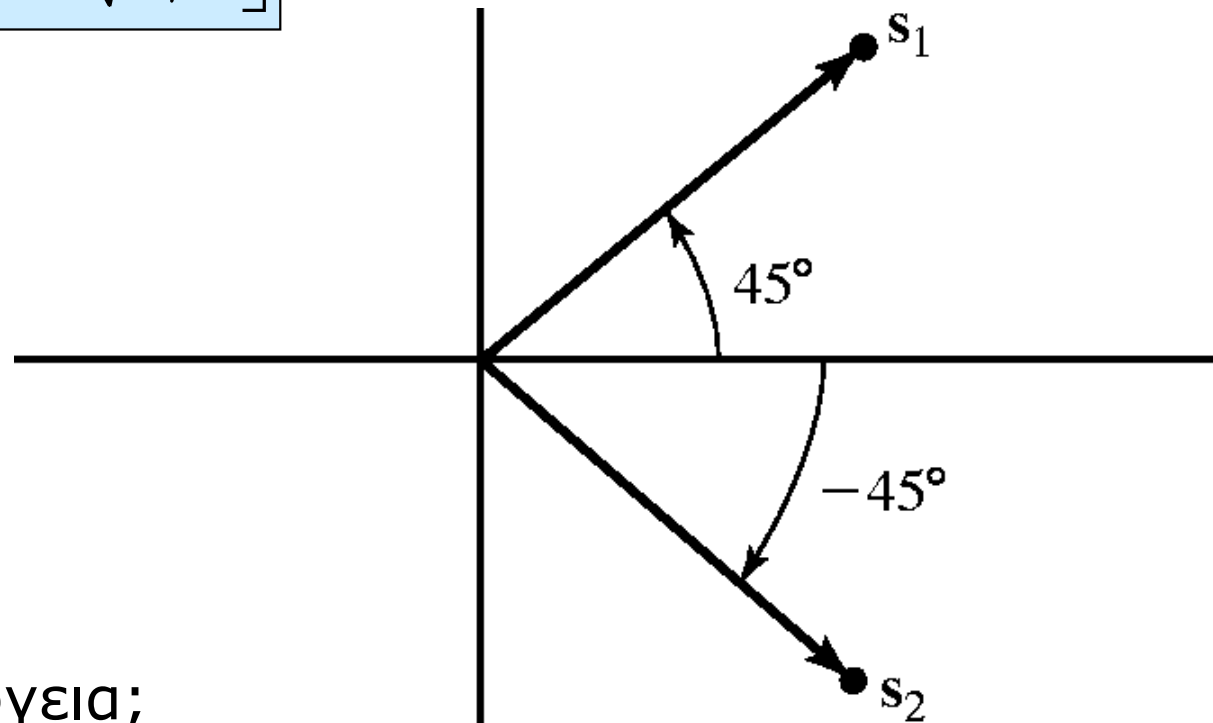
$$\psi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2/T}, & 0 \leq t \leq T/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\psi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{2/T}, & T/2 \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Τότε έχουμε ορίσει έναν 2-D χώρο για τα παραδείγματα μας

Πρώτο Ζευγάρι Σημάτων

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} A\sqrt{T/2} \\ A\sqrt{T/2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} A\sqrt{T/2} \\ -A\sqrt{T/2} \end{bmatrix}$$



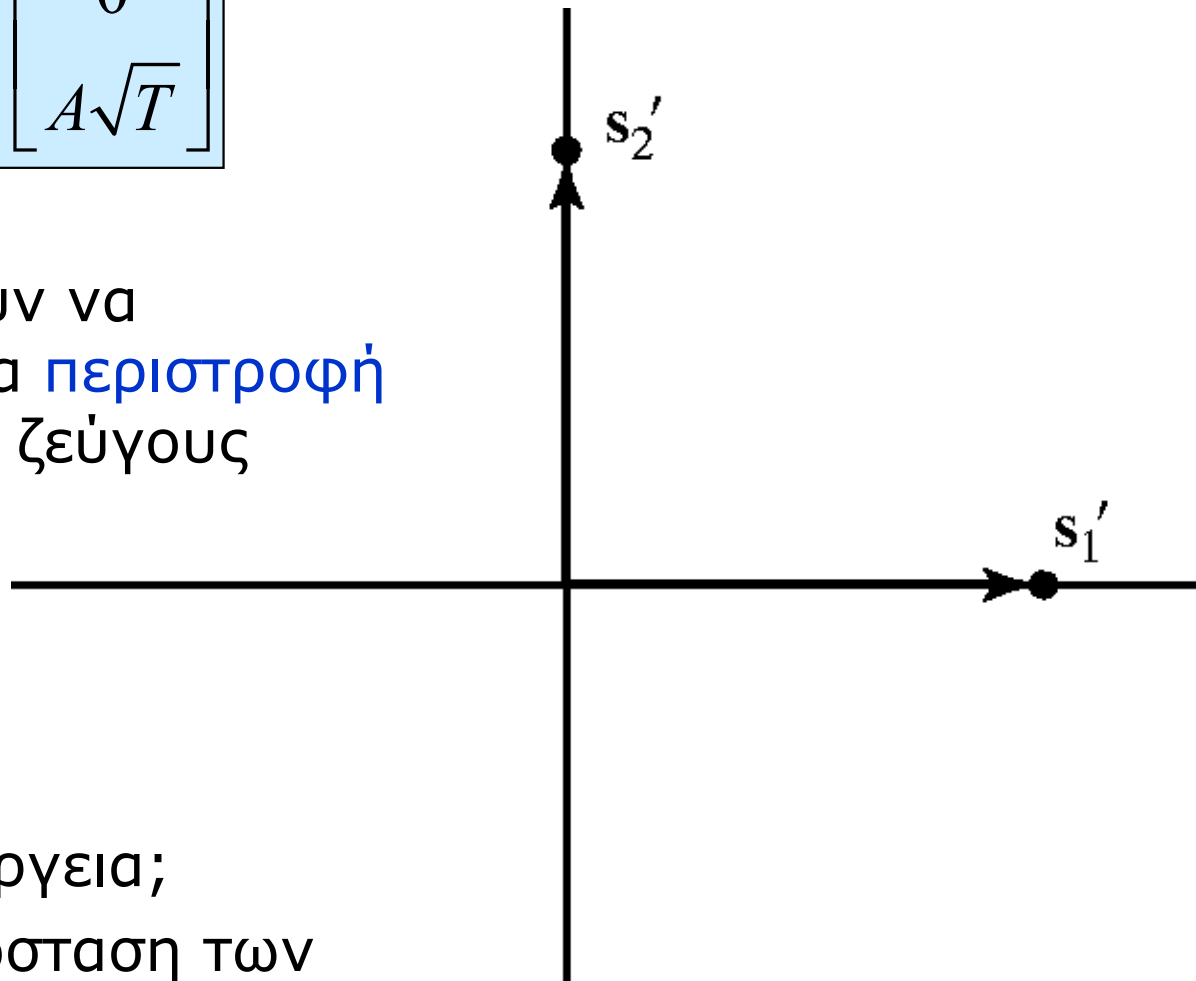
■ Ερωτήσεις:

- ποια είναι η ενέργεια;
- ποια είναι η απόσταση των δύο σημάτων;

Δεύτερο Ζευγάρι Σημάτων

$$\mathbf{s}_1' = \begin{bmatrix} A\sqrt{T} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ A\sqrt{T} \end{bmatrix}$$

- Ουσιαστικά μπορούν να προκύψουν από μια **περιστροφή** του προηγούμενου ζεύγους



- **Ερωτήσεις:**
 - ποια είναι η ενέργεια;
 - ποια είναι η απόσταση των δύο σημάτων;

4-αδικά 2-D Σήματα

- Αν το αλφάβητο που θέλω να μεταδώσω είναι **τετραδικό**,
 - δηλαδή στέλνονται 2 bits ανά περίοδο σηματοδοσίας,
 - επιλέγονται και τα **αντίθετα σήματα** των αρχικών σημάτων (του 1^{ου} σετ)

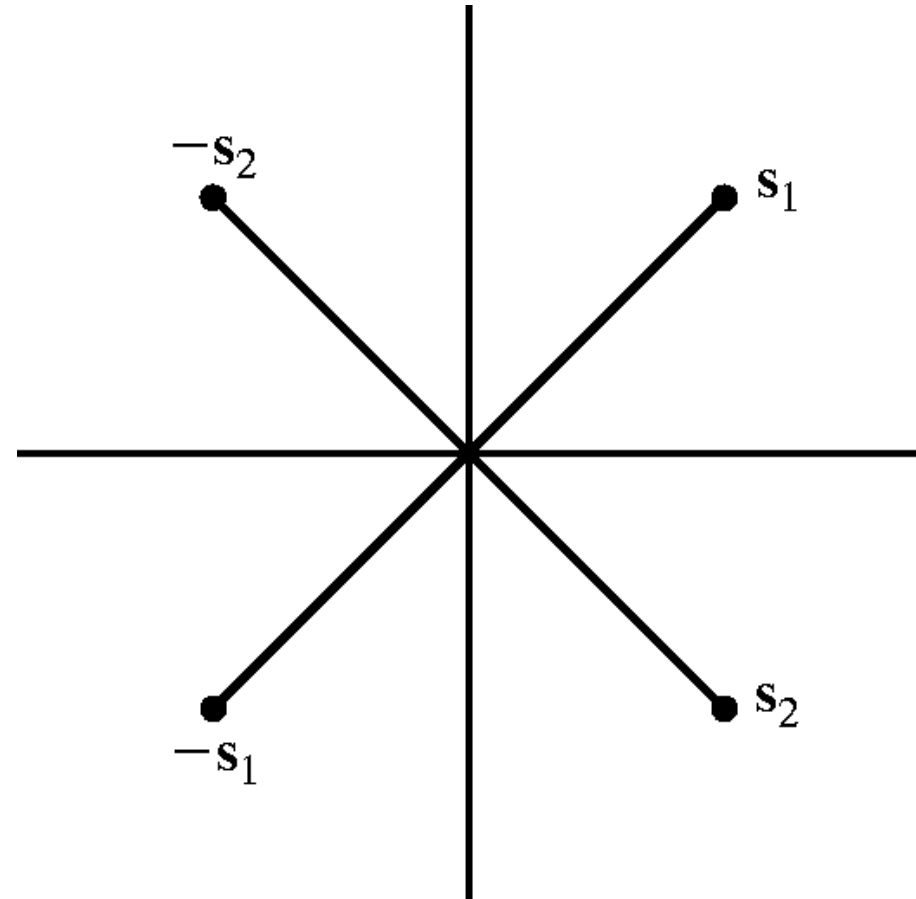
- Διανύσματα

$$\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, -\mathbf{s}_1, -\mathbf{s}_2$$

- Κυματομορφές

$$s_1(t), s_2(t), -s_1(t), -s_2(t)$$

- Αποτελούν ένα σύνολο **διορθογώνιων σημάτων** (biorthogonal signals)

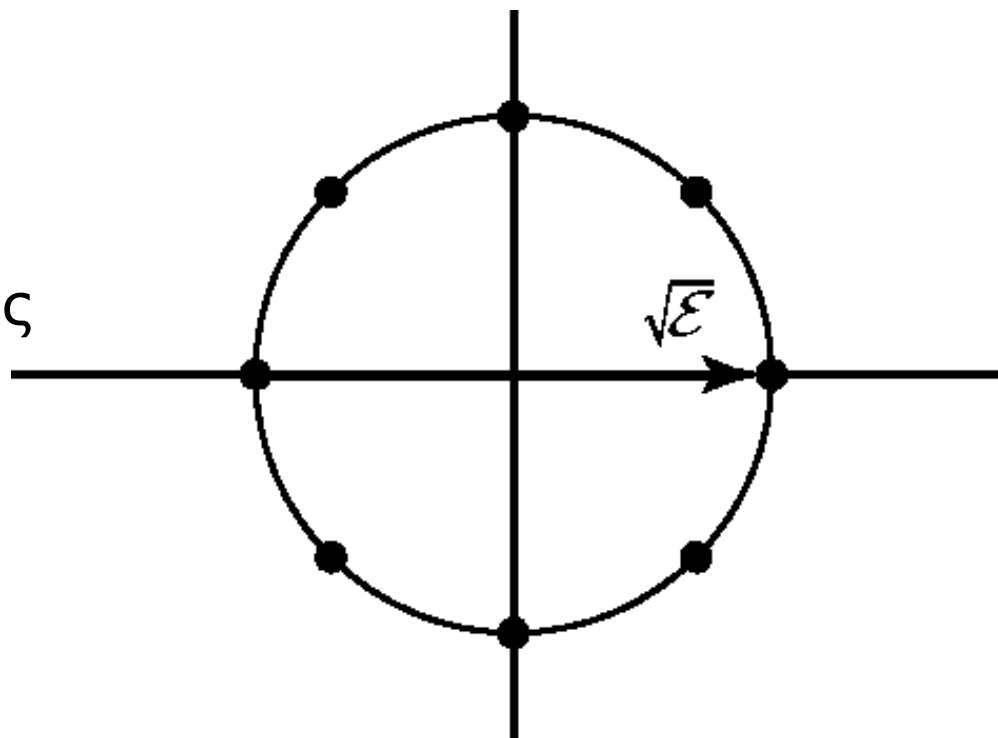


8-αδικά 2-D Σήματα Ίσης Ενέργειας

- Για την κατασκευή περισσότερων 2-D σημάτων μπορούμε να ακολουθήσουμε την ίδια μεθοδολογία
- **Αν υπάρχει ο περιορισμός:**
 - όλα τα σήματα να είναι ίδιας ενέργειας
(δηλαδή τα διανύσματα να είναι πάνω στον ίδιο κύκλο)

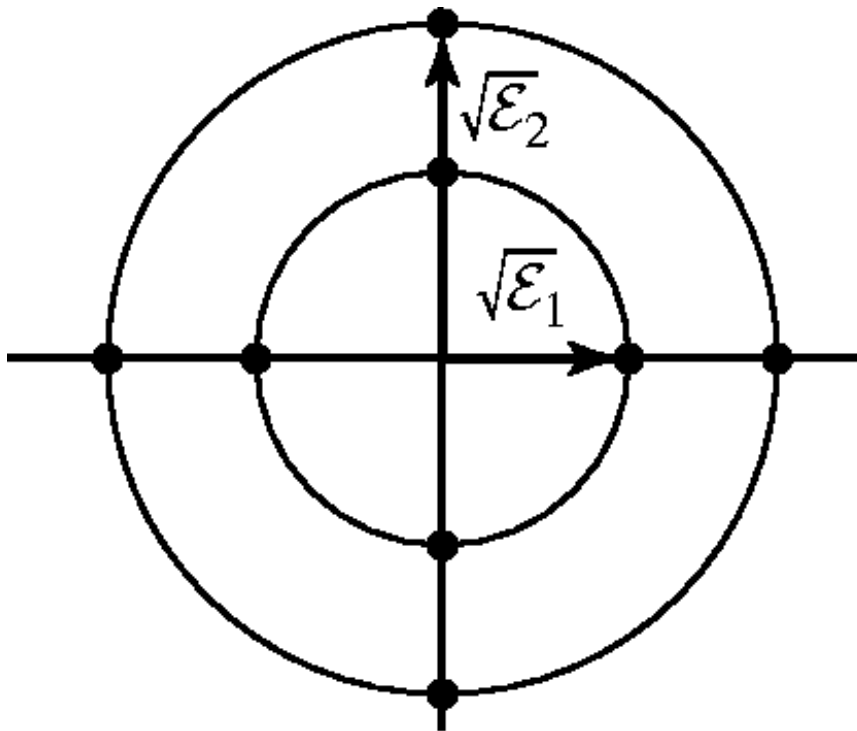
- Μία πιθανή οκτάδα μπορεί να προκύψει συνδυάζοντας τα 2 διορθωγώνια σύνολα από τα 2 αρχικά ζεύγη

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & -\mathbf{s}_1 & -\mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}'_1 & \mathbf{s}'_2 & -\mathbf{s}'_1 & -\mathbf{s}'_2 \end{array}$$

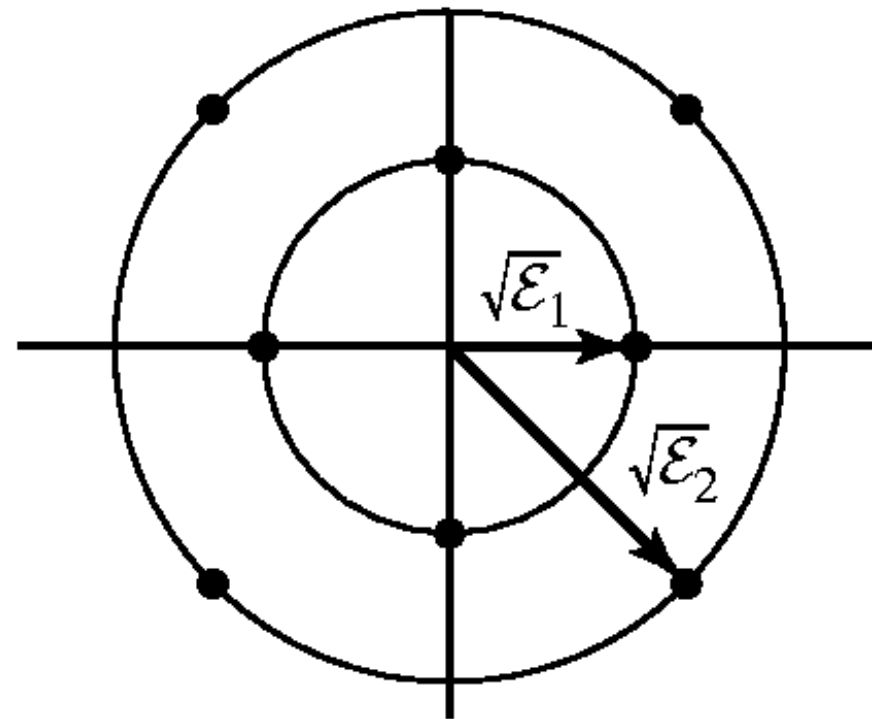


8-αδικά 2-D Σήματα Διαφορετικής Ενέργειας

- Άρση του Περιορισμού:
 - τα σήματα δεν είναι απαραίτητο να είναι ίσης ενέργειας



(α)



(β)

2-D Ζωνοπερατά Σήματα

- Θυμίζουμε ότι τα 1-D ζωνοπερατά σήματα (PAM) προέκυψαν διαμορφώνοντας ένα φέρον με τα 1-D σήματα βασικής ζώνης
- Παρόμοια διαδικασία ακολουθείται και στα 2-D Σήματα:
 - επιλέγεται ένα σύνολο σημάτων βασικής ζώνης $s_m(t)$, $m=1, \dots, M$,
 - από αυτά παράγονται τα M ζωνοπερατά σήματα

$$u_m(t) = s_m(t) \cos 2\pi f_c t, \quad m = 1, \dots, M, \quad 0 \leq t \leq T$$

Περιορισμός Ίσης Ενέργειας

- Ας μελετήσουμε τώρα τα M -αδικά 2-D ζωνοπερατά σήματα που έχουν ίση ενέργεια

$$\begin{aligned} E_m &= \int_0^T s_m^2(t) \cos^2 2\pi f_c t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T s_m^2(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T s_m^2(t) \cos 4\pi f_c t dt \end{aligned}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

- Για $f_c \gg W$, το δεύτερο ολοκλήρωμα μηδενίζεται

$$E_m = \frac{1}{2} \int_0^T s_m^2(t) dt = \frac{E_{\text{baseband}}}{2}$$

- Παρατήρηση:
Σταθερή ενέργεια των σημάτων. Δηλαδή όλα τα διανύσματα σήματος βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο εφόσον βέβαια είναι σταθερής ενέργειας και τα σήματα βασικής ζώνης.

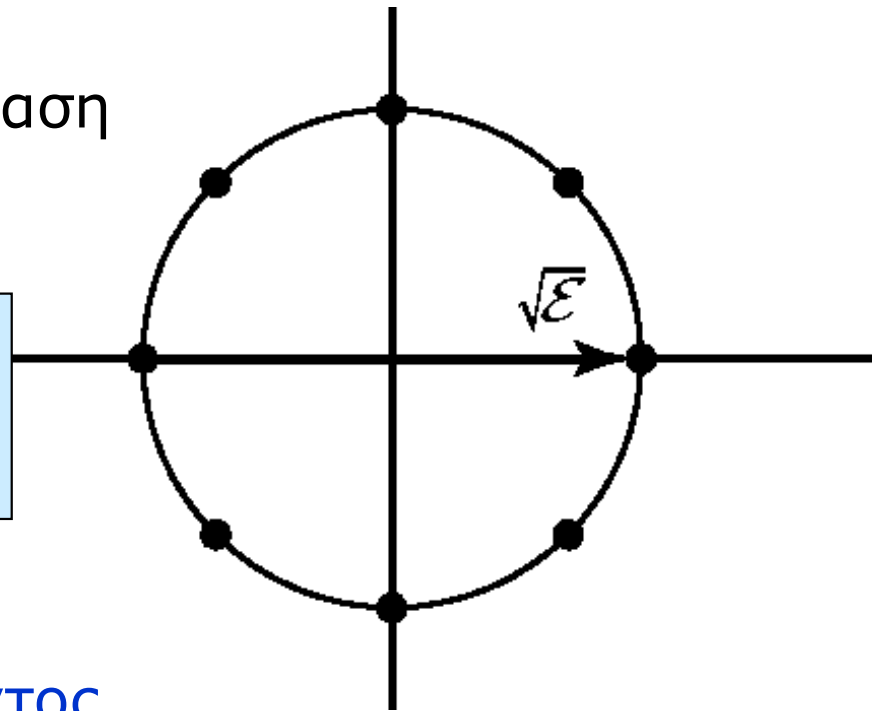
Ολίσθηση στη Φάση Φέροντος

- Εφόσον τα διανύσματα βρίσκονται στον ίδιο κύκλο,
 - μπορούν να προκύψουν από ένα αρχικό σήμα που **περιστρέφεται** κατά ανάλογη γωνία

$$u_m(t) = s_m(t) \cos 2\pi f_c t$$

- Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ίδια γεωμετρική αναπαράσταση έχει και η παρακάτω έκφραση:

$$u_m(t) = s(t) \cos \left(2\pi f_c t + \frac{2\pi m}{M} \right)$$



- Η πληροφορία του συμβόλου αποτυπώνεται στη **φάση του φέροντος**

Ολίσθηση στη Φάση Φέροντος (2)

- Στη θέση του $s(t)$ μπορούμε να βάλουμε τον **παλμό βασικής ζώνης** ώστε να σήμα να έχει και τα επιθυμητά φασματικά χαρακτηριστικά

$$u_m(t) = g_T(t) \cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi m}{M}\right)$$

- Όπως έχει αναφερθεί ήδη
 - και θα μελετήσουμε σε επόμενα κεφάλαια,
 - ο παλμός βασικής ζώνης καθορίζει τα **φασματικά χαρακτηριστικά** του μεταδιδόμενου σήματος

Phase Shift Keying (PSK)

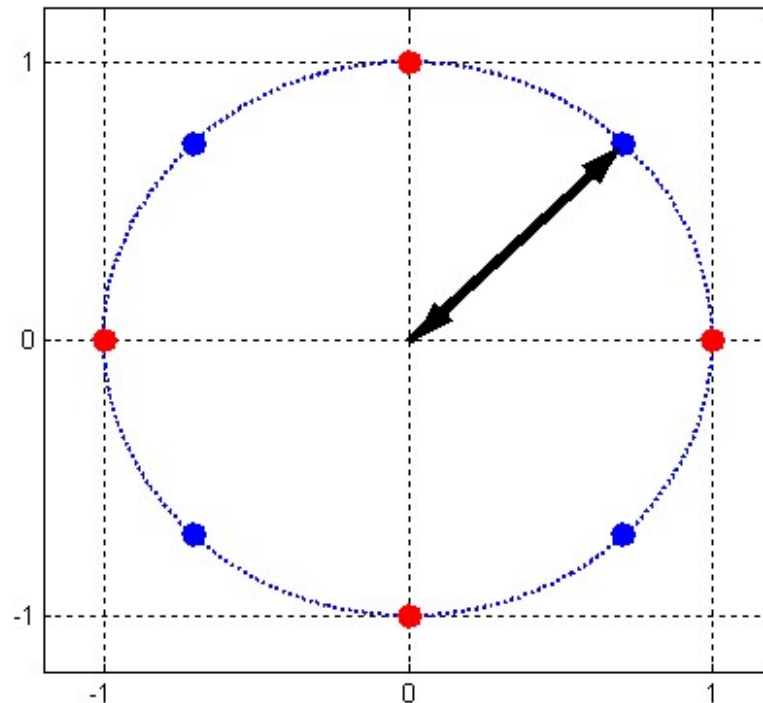
- Αν χρησιμοποιηθεί ορθογώνιος παλμός,

$$u_m(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi m}{M}\right)$$

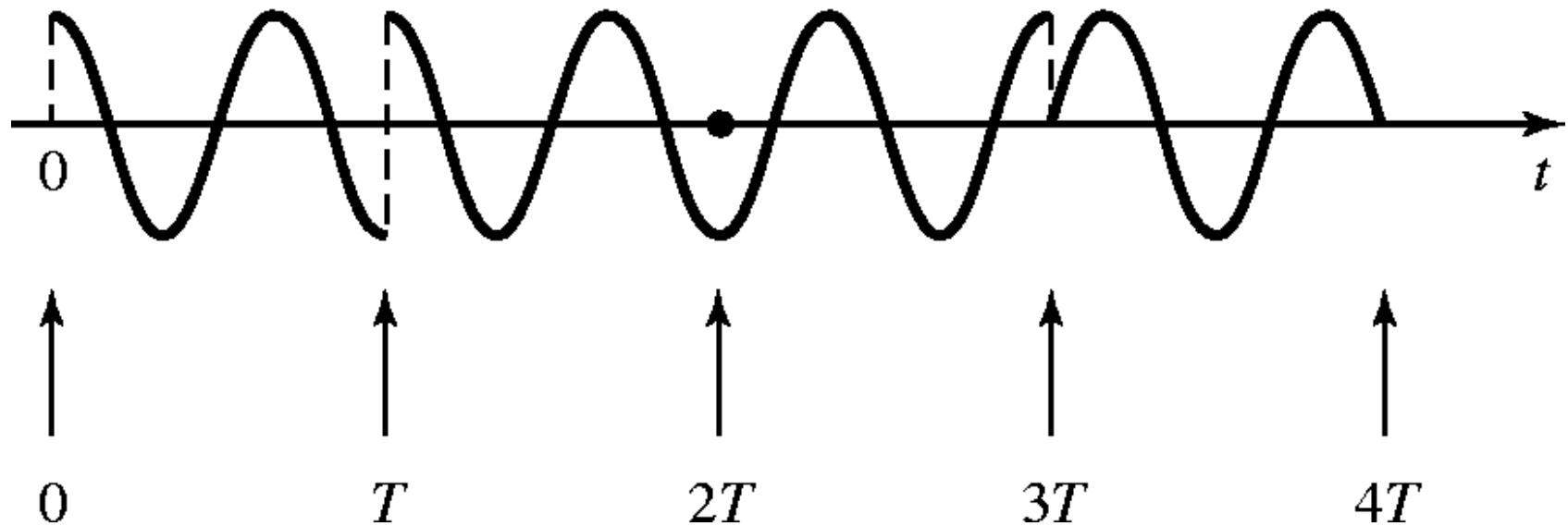
- τα ζωνοπερατά σήματα
 - έχουν σταθερή περιβάλλουσα
 - η φάση του φέροντος αλλάζει απότομα στην αρχή κάθε συμβόλου
- Μεταλλαγή Ολίσθησης Φάσης
 - Phase Shift Keying (PSK)

QPSK

- Για $M=4$, προκύπτει το 4-PSK
 - πιο γνωστό ως **QPSK** (Quadrature Phase Shift Keying),
 - δηλαδή **Ορθογώνιο PSK**
- Δύο εναλλακτικές διαμορφώσεις QPSK



Παράδειγμα Ζωνοπερατού Σήματος QPSK



- Περίοδος σηματοδοσίας T vs περίοδος φέρουσας $1/f_c$

Μετασχηματισμοί PSK

- Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

- Το σήμα PSK

$$u_m(t) = g_T(t) \cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi m}{M}\right)$$

μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως

$$u_m(t) = A_{mc} g_T(t) \cos(2\pi f_c t) - A_{ms} g_T(t) \sin(2\pi f_c t)$$

$$A_{mc} = \cos(2\pi m/M)$$

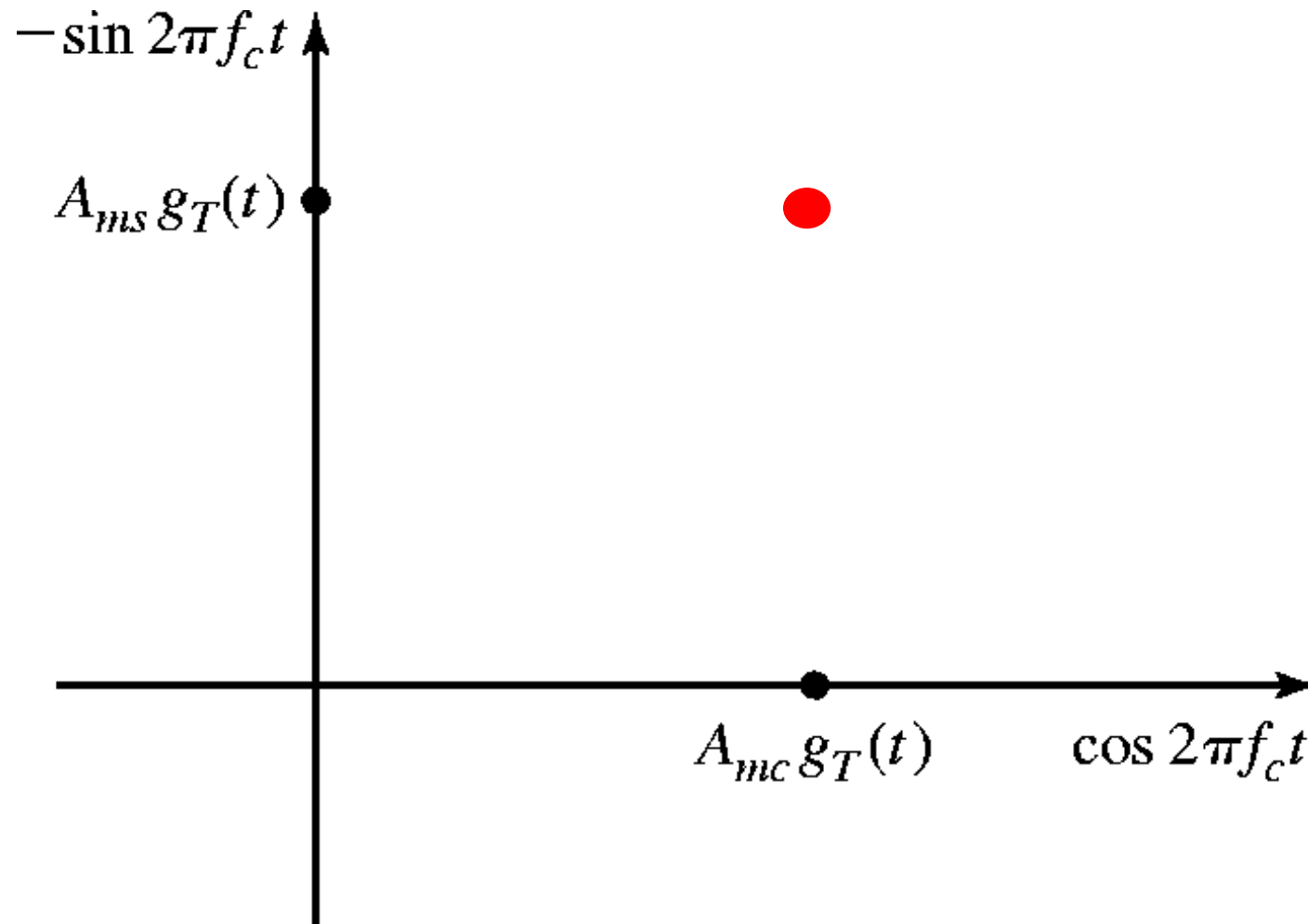
$$A_{ms} = \sin(2\pi m/M)$$

Μετασχηματισμοί PSK (2)

$$u_m(t) = g_T(t) A_{mc} \cos(2\pi f_c t) - g_T(t) A_{ms} \sin(2\pi f_c t)$$

- Το σήμα PSK μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα **δύο φερόντων σημάτων** που είναι ορθογώνια μεταξύ τους
 - $\cos(2\pi f_c t)$
 - $-\sin(2\pi f_c t)$και που έχουν διαμορφωθεί από τα **σήματα βασικής ζώνης**
 - $A_{mc}g_T(t)$
 - $A_{ms}g_T(t)$
- Τα δύο αυτά σήματα βασικής ζώνης σχετίζονται με το **ίδιο σύμβολο**

Μετασχηματισμοί PSK (3)



- Γεωμετρική Αναπαράσταση PSK ως δύο διαμορφωμένων κατά πλάτος ορθογώνιων φέροντων

Γεωμετρική Αναπαράσταση PSK

- Με βάση την προηγούμενη θεώρηση,
- Επιλέγονται ως ορθοκανονικές συναρτήσεις βάσεις

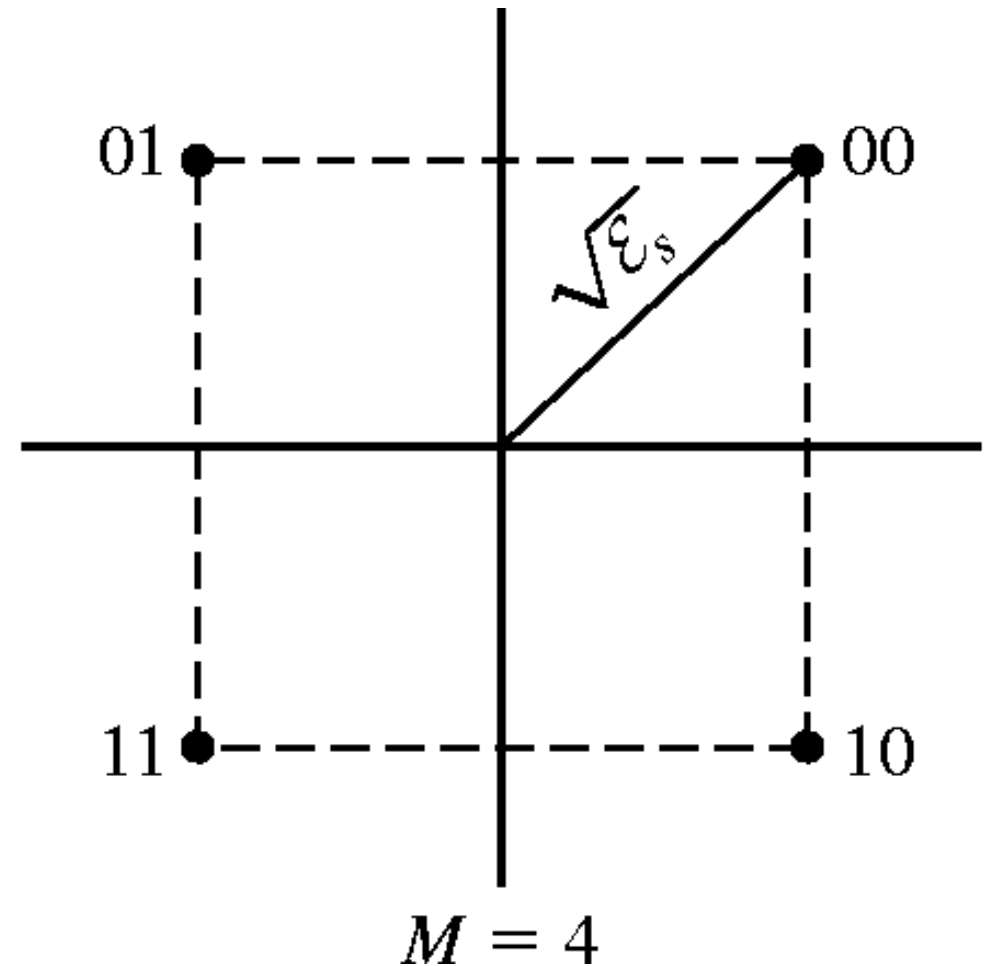
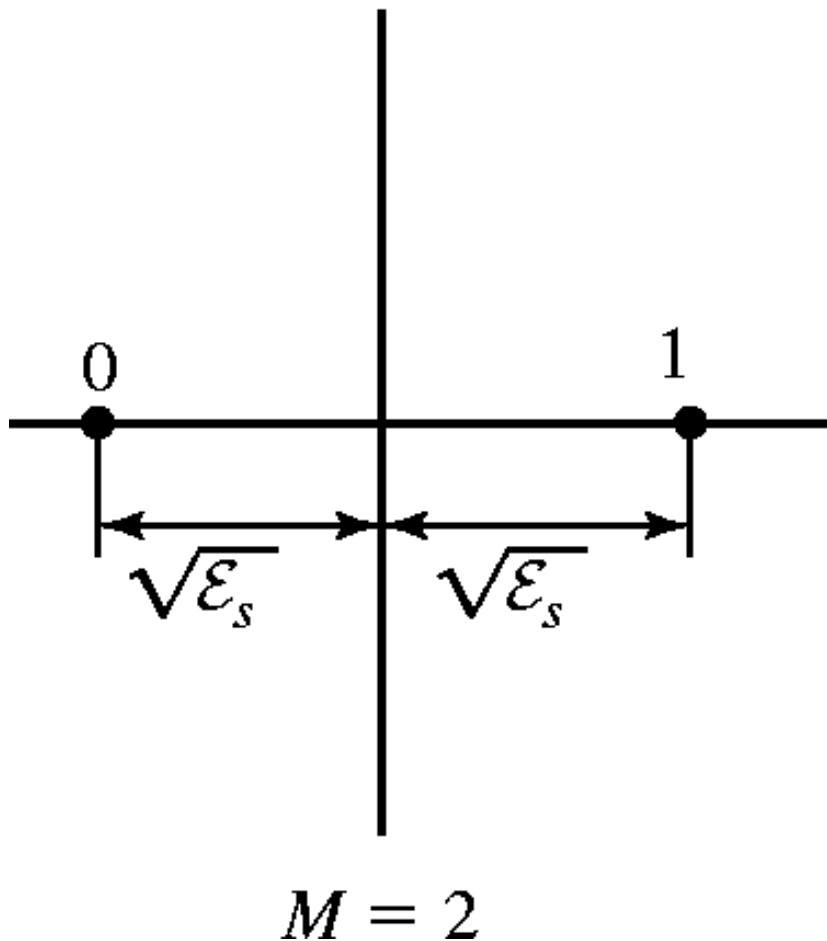
$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g_T(t) \cos 2\pi f_c t$$

$$\psi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}} g_T(t) \sin 2\pi f_c t$$

- Οπότε τα σύμβολα/σήματα αντιστοιχούν σε 2-D διανύσματα

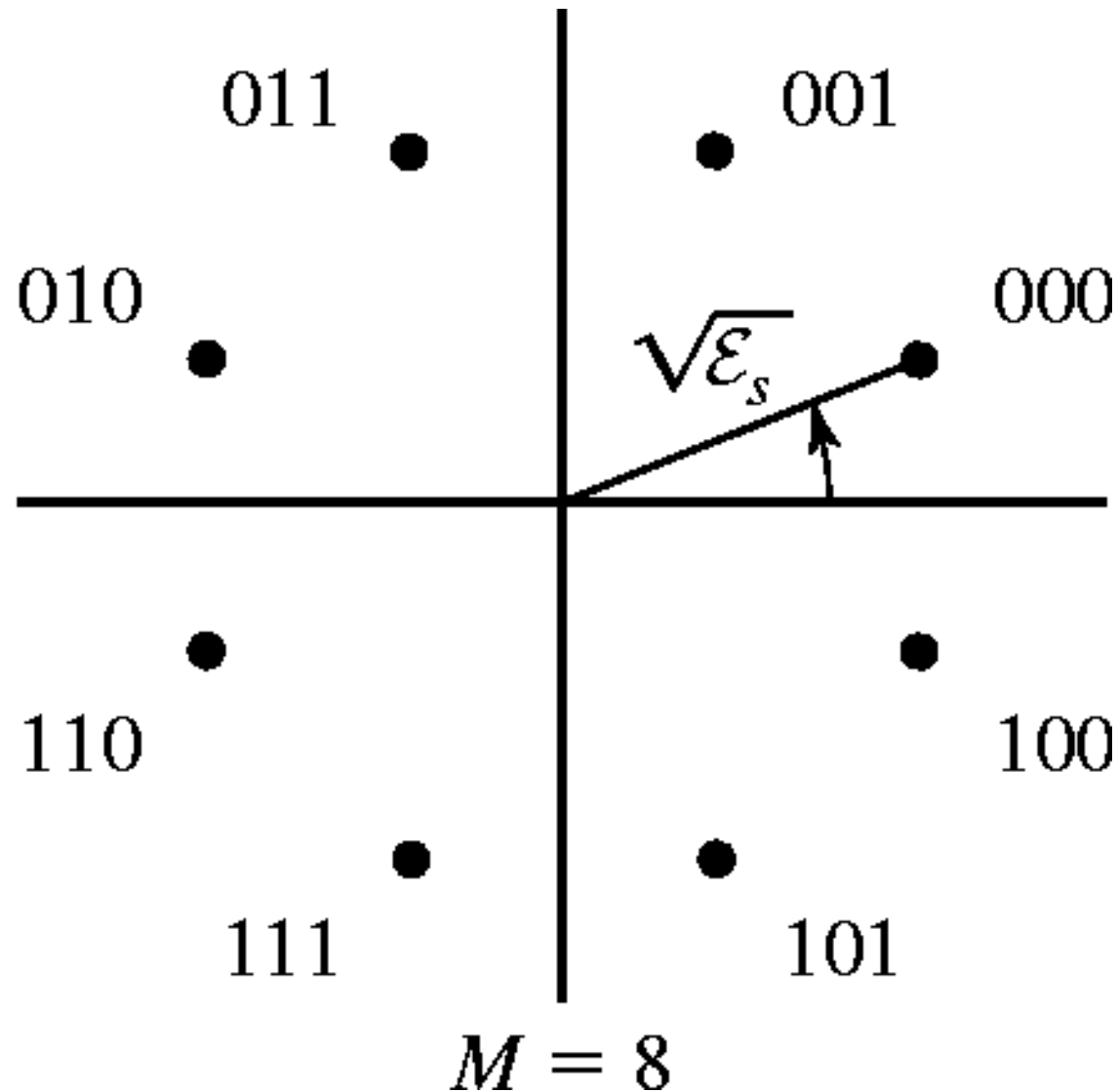
$$\mathbf{s}_m = \begin{bmatrix} A_{mc} \\ A_{ms} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{E_s} \cos 2\pi m/M \\ \sqrt{E_s} \sin 2\pi m/M \end{bmatrix}$$

Αστερισμοί Σημάτων PSK



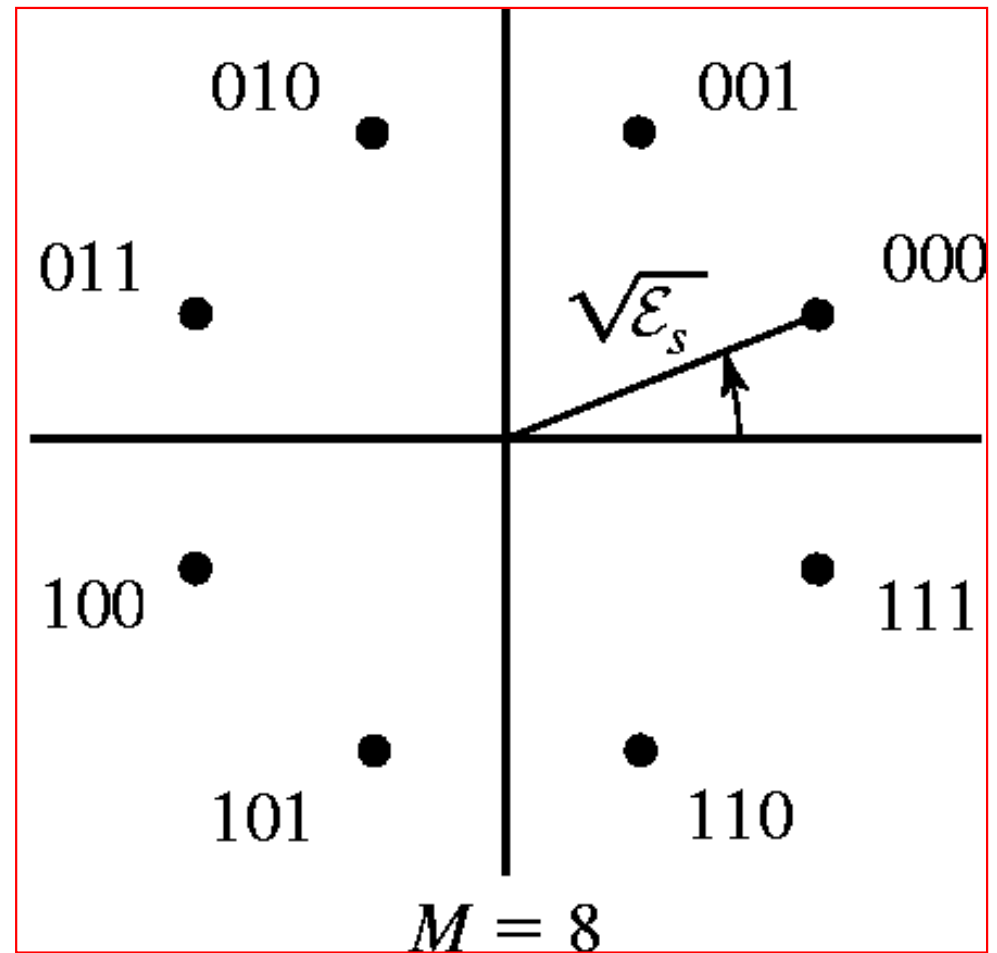
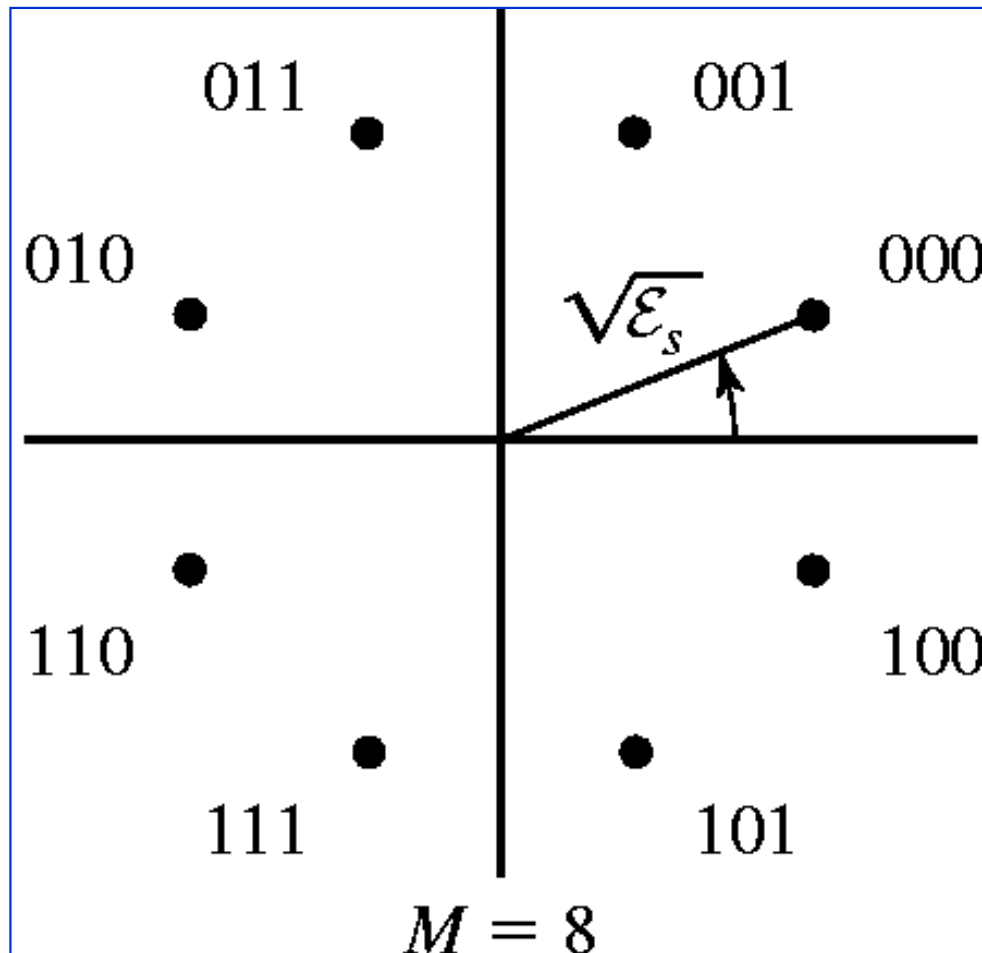
- **Παρατήρηση:** Το 2-PSK είναι ισοδύναμο με το 2-PAM

Αστερισμοί Σημάτων PSK (2)



- Η αντιστοίχιση των μπλοκ των k bits σε σύμβολα μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους

Κωδικοποίηση Gray



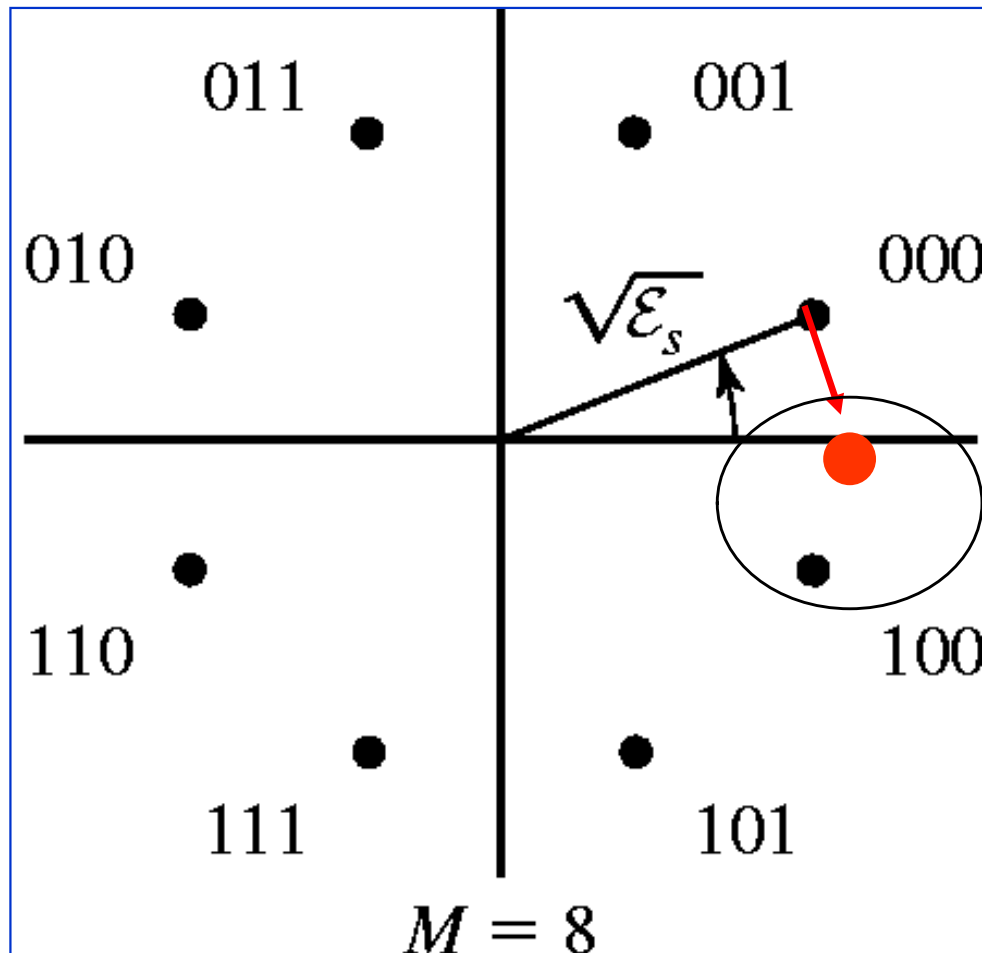
Κωδικοποίηση Gray:
γειτονικά (διαδοχικά) σύμβολα
διαφέρουν μόνο κατά ένα bit

Άλλη Κωδικοποίηση:
δυναμική αρίθμηση αντίστροφα
των δεικτών του ρολογιού

Γιατί Κωδικοποίηση Gray;

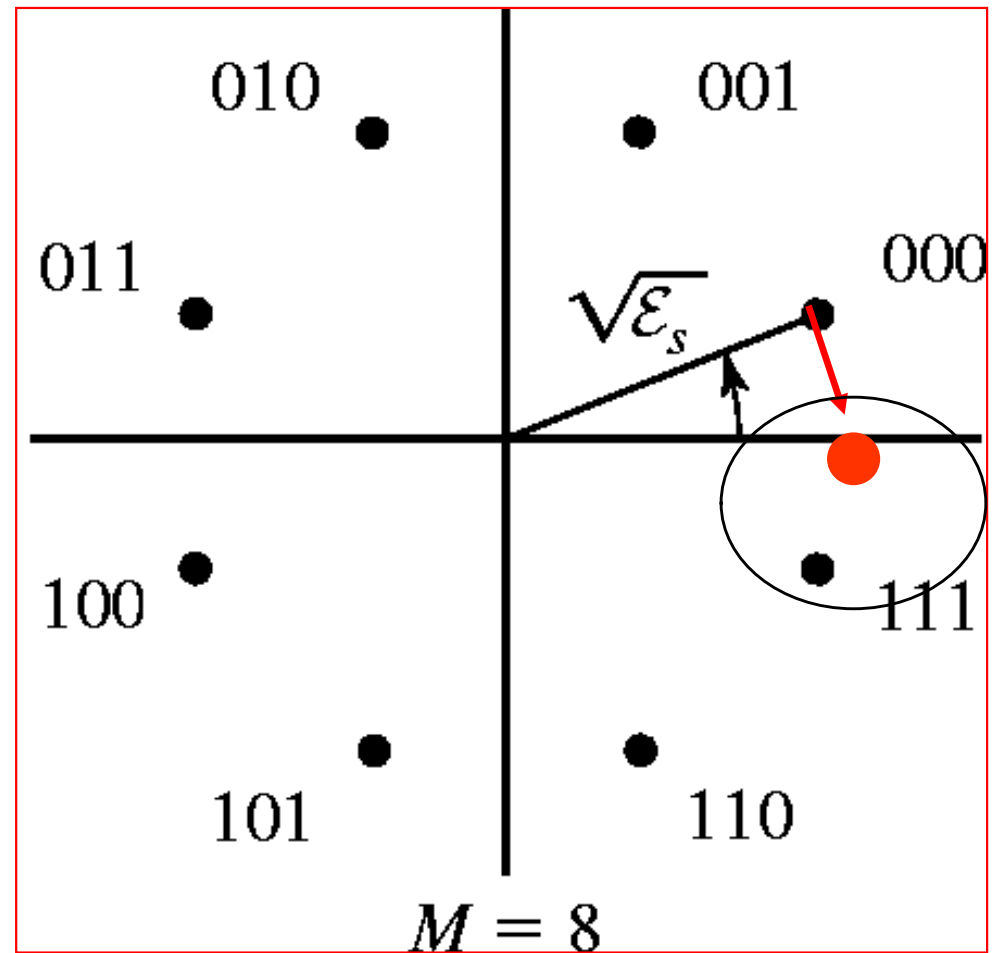
- Κατά τη μετάδοση του σήματος προστίθεται **θόρυβος**
- Ο δέκτης λαμβάνει **σύμβολο + θόρυβο**
- Μετατοπίζεται το ληφθέν σημείο στη γεωμετρική αναπαράσταση του δέκτη
- Η μετατόπιση γίνεται στη **γειτονιά** του πραγματικού συμβόλου
- Ο δέκτης μπορεί να πάρει **εσφαλμένη απόφαση** για το σύμβολο που στάλθηκε
- Το λανθασμένο σύμβολο είναι **συνήθως** κάποιο από τα γειτονικά του πραγματικού συμβόλου (η πιθανότητα να είναι παρα-γειτονικό είναι πολύ μικρή)
- **Οπότε μία εσφαλμένη απόφαση συνεπάγεται (κοστίζει) ένα μόνο λανθασμένο bit**
- **BER vs SER ??**

Παράδειγμα



Κωδικοποίηση Gray:

000 \rightarrow 100
1 λάθος σύμβολο \rightarrow
1 λάθος bit



Άλλη Κωδικοποίηση:

000 \rightarrow 111
1 λάθος σύμβολο \rightarrow
3 λανθασμένα bits

Αποστάσεις Σημείων PSK

- Η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ δύο σημείων PSK είναι

$$d_{mn} = \sqrt{|\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n|^2} = \sqrt{2E_s \left(1 - \cos \frac{2\pi(m-n)}{M} \right)}$$

- Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει είναι

$$d_{\min} = \sqrt{2E_s \left(1 - \cos \frac{2\pi}{M} \right)}$$

- Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σημείων ενός αστερισμού σημάτων επηρεάζει σημαντικά την απόδοση του αστερισμού ως προς τα σφάλματα

Σήματα 2-D Διαφορετικής Ενέργειας

- Αναφερθήκαμε σε σήματα 2-D που είχαν την ίδια ενέργεια
 - Με βάση αυτόν τον **περιορισμό ίσης ενέργειας** τα σήματα αναπαρίστανται ως σημεία πάνω στον ίδιο κύκλο
- **Παράδειγμα:** τα σήματα PSK είναι σταθερής ενέργειας
- **Υπενθύμιση για το PSK:**
 - τα δύο ορθογώνια φέροντα διαμορφώνονταν από το ίδιο σύμβολο, **δηλαδή και από τα k bits**
- Μπορούμε να ακυρώσουμε τον παραπάνω περιορισμό.
- Τα δύο ορθογώνια φέροντα, $\{ \cos(2\pi f_c t), \sin(2\pi f_c t) \}$
 - μπορούν να διαμορφώνονται και κατά πλάτος
- Ένας απλός τρόπος για να επιτευχθεί αυτό είναι να διαμορφώνονται από διαφορετικά (π.χ. $k/2$) bits

Quadrature Amplitude Modulation

- Έτσι προκύπτει η Ορθογώνια Διαμόρφωση κατά Πλάτος
 - QAM ή M-QAM
- Αποτελείται από δύο ορθογώνια φέροντα
 - (2 συναρτήσεις βάσεις \rightarrow 2-D σήματα)
 - που διαμορφώνονται κατά πλάτος από τα $\{A_{mc}, A_{ms}\}$ ως

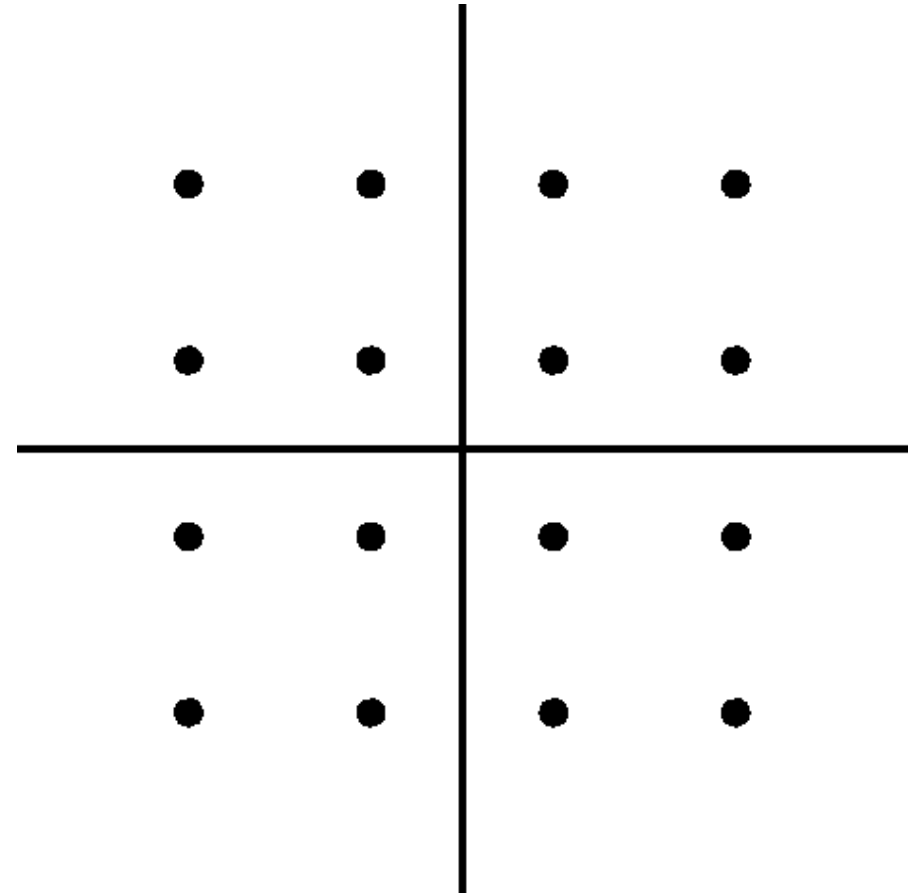
$$u_m(t) = A_{mc} g_T(t) \cos(2\pi f_c t) + A_{ms} g_T(t) \sin(2\pi f_c t)$$

- Κάθε σύμβολο αναπαρίσταται και πάλι ως

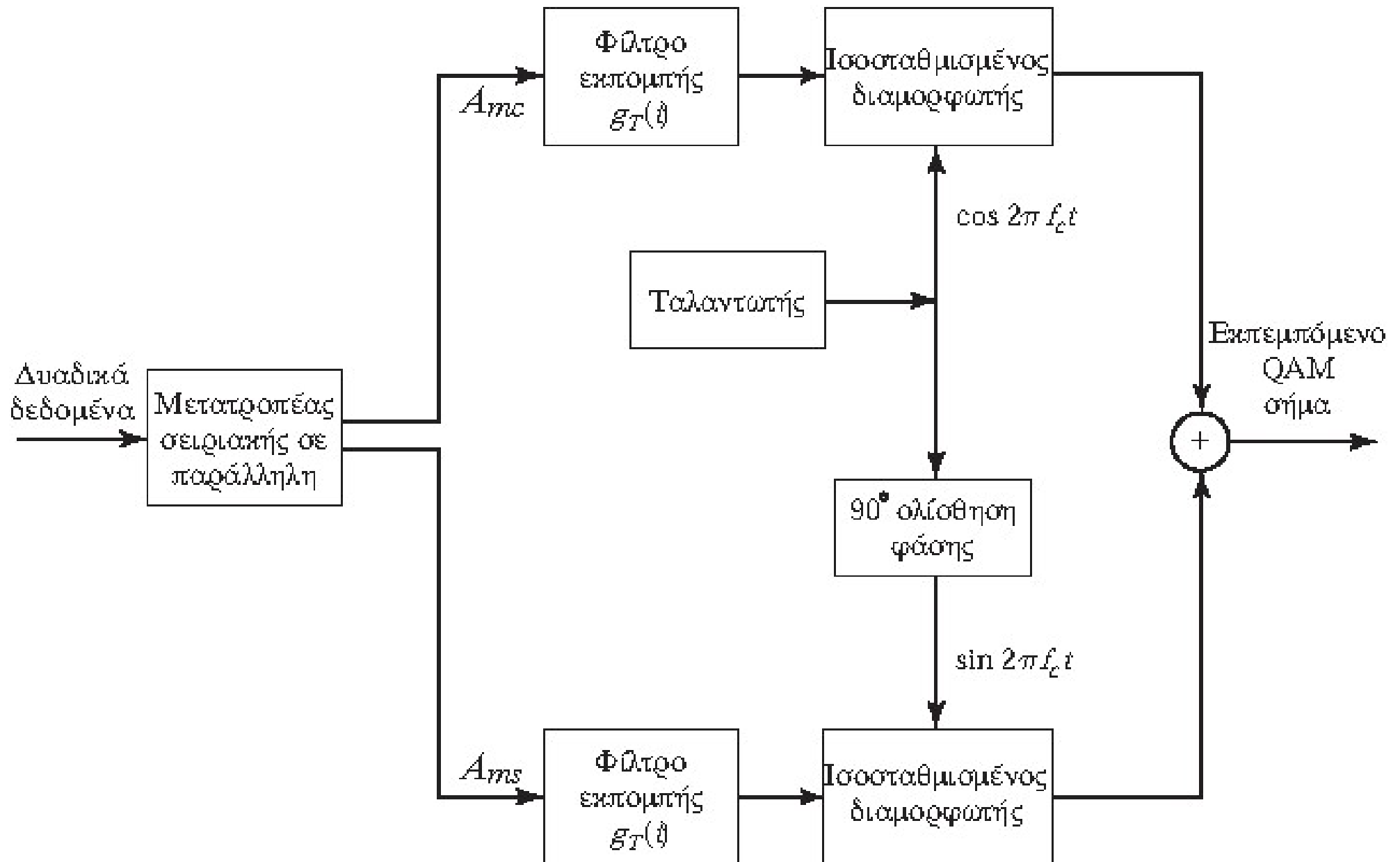
$$\mathbf{s}_m = \begin{bmatrix} A_{mc} \\ A_{ms} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 16-QAM

- Προκύπτει από τη διαμόρφωση κατά πλάτος κάθε μίας ορθογώνιας φέρουσας από ένα 4-PAM
- Τετραγωνικοί αστερισμοί: αποτέλεσμα διαμόρφωσης των δύο ορθογώνιων φερουσών από PAM ανεξάρτητων μεταξύ τους
- Τι πλεονέκτημα έχει ο νέος βαθμός ελευθερίας (ως προς το πλάτος);



Διαμορφωτής QAM



Εναλλακτική Θεώρηση QAM (ΟΧΙ)

- QAM: συνδυασμός ψηφιακής διαμόρφωσης
 - κατά πλάτος
 - και κατά φάση

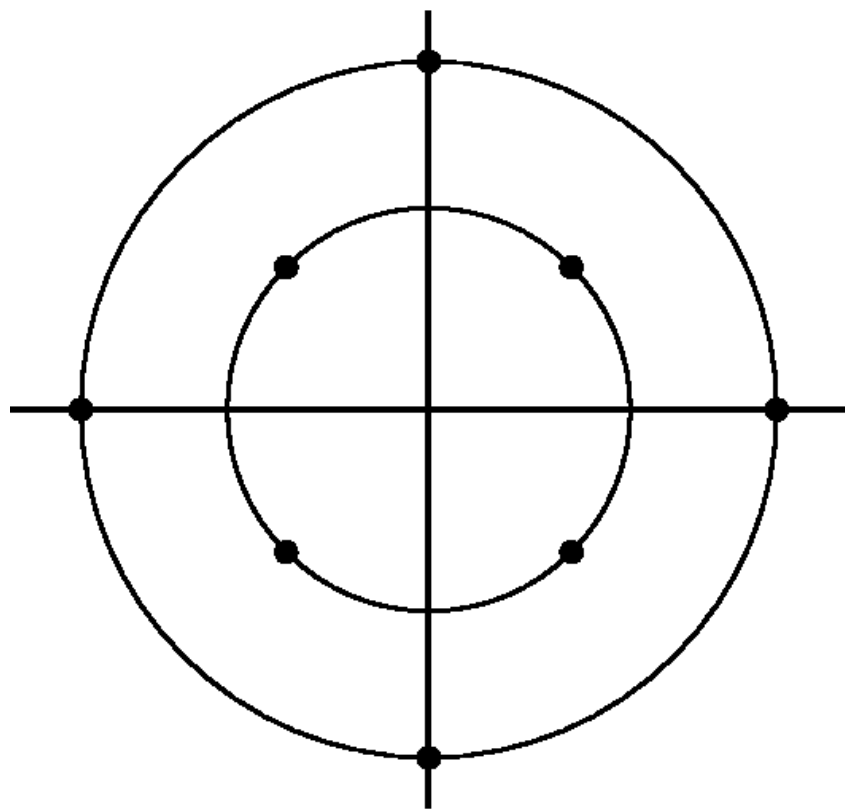
- Τα σήματα QAM μπορούν να γραφούν σε «πολικές συντεταγμένες» ως

$$u_m(t) = A_m g_T(t) \cos(2\pi f_c t + \vartheta_n), \quad m = 1, \dots, M_1$$
$$n = 1, \dots, M_2$$

Εναλλακτική Θεώρηση QAM (ΟΧΙ)

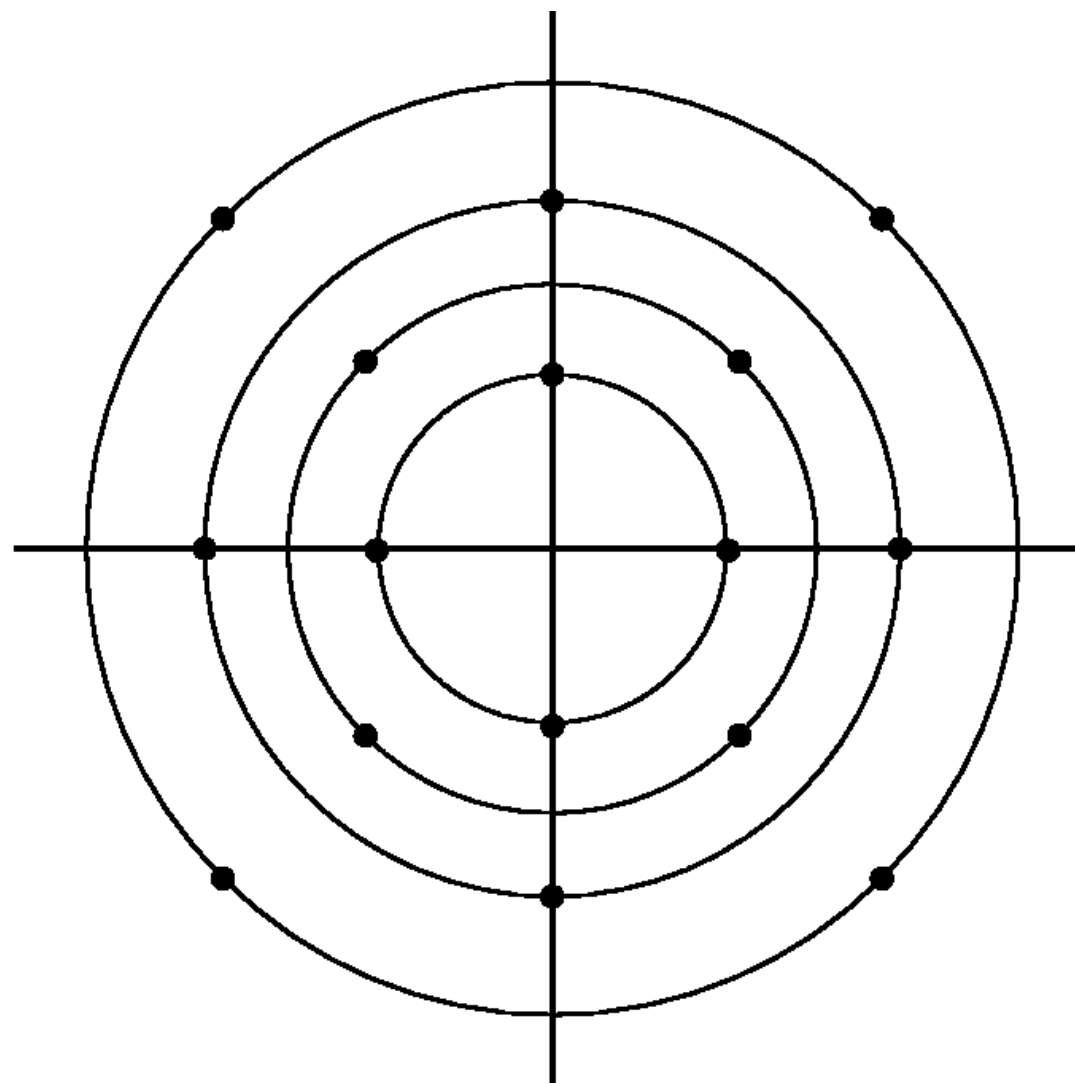
- Από τα k bits κάθε μπλοκ
 - τα $k_1 = \log_2 M_1$ χρησιμοποιούνται για διαμόρφωση πλάτους
 - τα $k_2 = \log_2 M_2$ χρησιμοποιούνται για διαμόρφωση φάσης
- Ταυτόχρονη μετάδοση $k = k_1 + k_2 = \log_2 M_1 M_2$ bits/σύμβολο
- Ρυθμός συμβόλων $R_b / (k_1 + k_2)$
- Συνήθως είναι $M_1 = M_2 = \text{sqrt}(M)$

Αστερισμοί QAM



$M = 8$

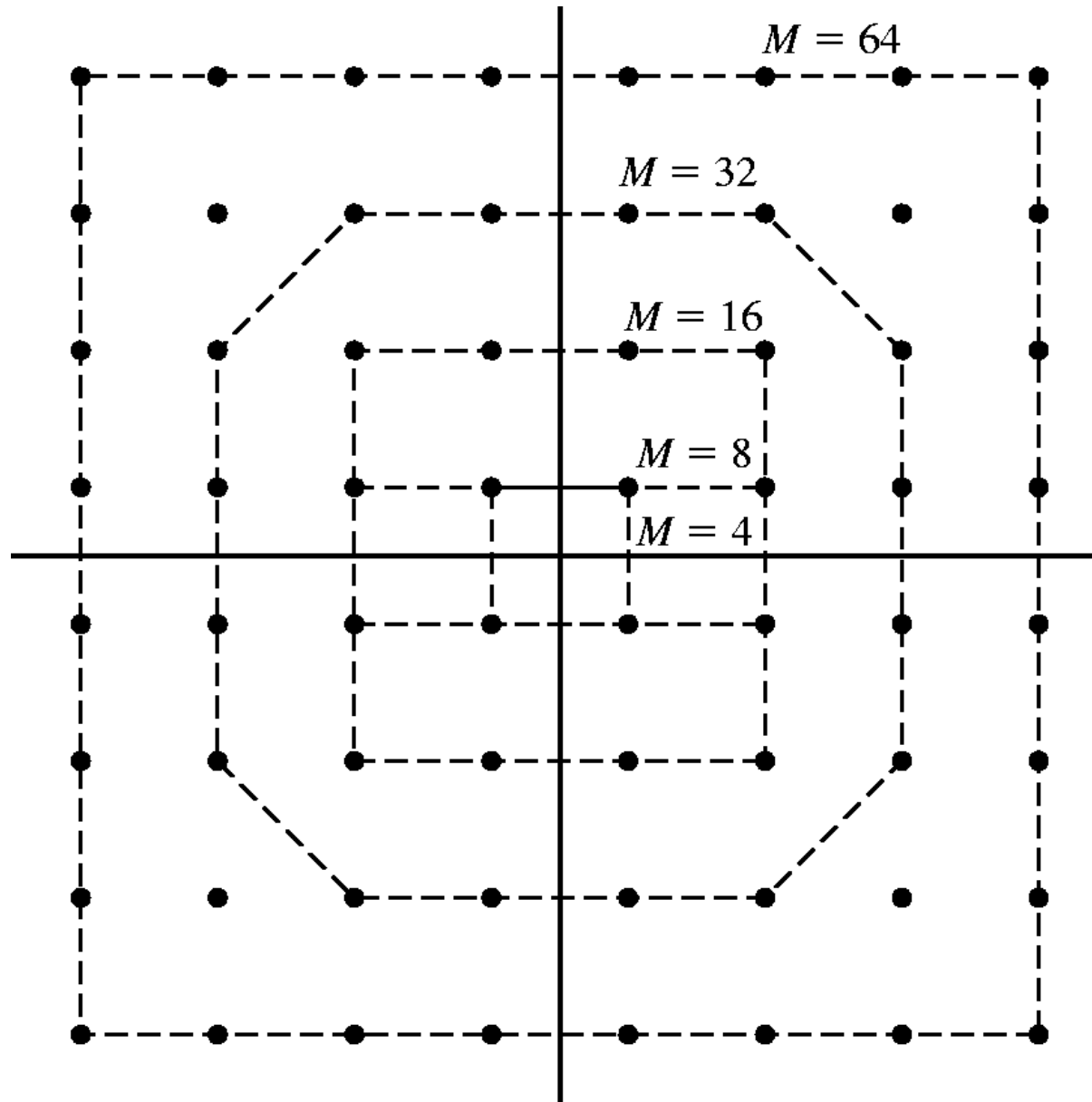
(β)



$M = 16$

(γ)

Αστερισμοί QAM (2)



(α)

Μέση Ενέργεια QAM

- Κάθε σύμβολο έχει διαφορετική ενέργεια που δίνεται
 - ως το μέτρο του 2-D διανύσματός του, δηλαδή
 - ως το άθροισμα της ενέργειάς του σε κάθε συνιστώσα
- Η μέση ενέργεια είναι η μέση τιμή της ενέργειας των συμβόλων
- Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων είναι

$$d_{mn} = \sqrt{|\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n|^2}$$

- Σχέση μέσης ενέργειας και μέσης πιθανότητας σφάλματος
- Επιλογή της γεωμετρίας του αστερισμού

Η Γεωμετρία του Αστερισμού QAM

- Το Symbol Error Rate (SER) εξαρτάται από τον **αστερισμό συμβόλων** που χρησιμοποιούμε κάθε φορά
- Σε έναν αστερισμό συμβόλων μας ενδιαφέρουν θέματα όπως:
 - η κεντροσυμμετρία του αστερισμού
 - η **ελάχιστη απόσταση** d_{\min} μεταξύ δύο σημείων σήματος
 - η **μέση μεταδιδόμενη ισχύς**
- Αν θεωρήσουμε ότι όλα τα σημεία (σύμβολα) είναι ισοπίθανα και κεντροσυμμετρικά τοποθετημένα, τότε μπορούμε να συγκρίνουμε τους αστερισμούς ως προς:
 - **την απαιτούμενη μέση ισχύ για δεδομένη (και ίση) ελάχιστη απόσταση**
 - **το αντίστροφο του προηγούμενου**