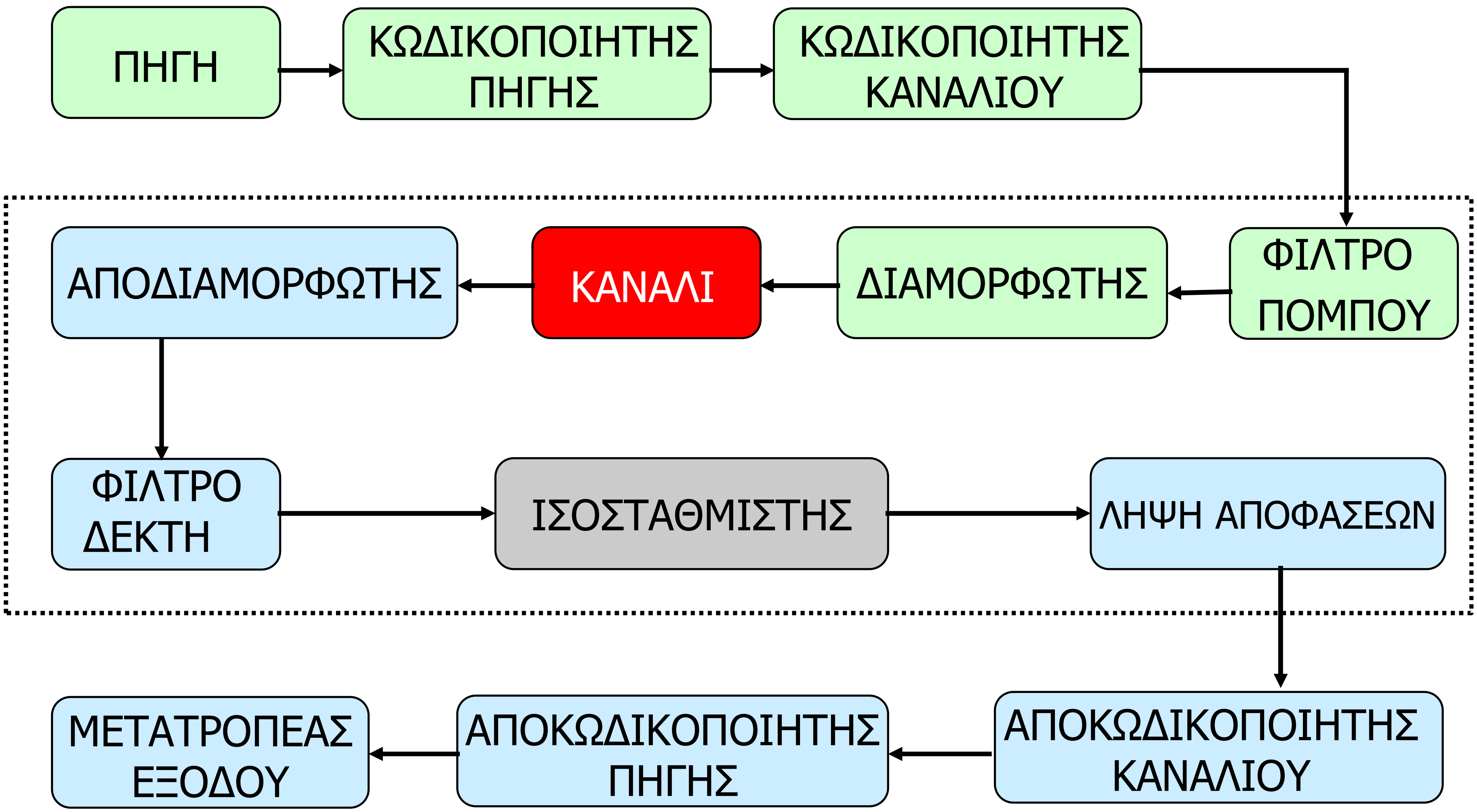
Ψηφιακές Τηλεπικοινωνίες

Γεωμετρική Αναπαράσταση Κυματομορφών Σήματος

Ψηφιακό Τηλ/κό Σύστημα: Τι είδαμε ως τώρα;



Εισαγωγή

- Στα επόμενα 2-3 μαθήματα θα μελετήσουμε τη μετάδοση πληροφορίας μέσα από κανάλια AWGN (δηλαδή κανάλια που είναι ιδανικά στο πλαίσιο του εύρους ζώνης στο οποίο ορίζονται και έχουν ως μοναδικό παράγοντα υποβάθμισης τον AWGN).

- Το AWGN είναι το απλούστερο, αλλά ίσως και το βασικότερο μοντέλο καναλιού διότι, παρότι συνήθως δεν συναντάται στην πράξη,
  - είναι εφικτή η θεωρητική του ανάλυση και έτσι υπολογίζονται τα εφικτά όρια επιδόσεων
  - έχει όμως και πρακτική σημασία, διότι οποιοδήποτε κανάλι μπορεί με κατάλληλη επεξεργασία να αναχθεί (έστω και με προσέγγιση) σε κανάλι AWGN

- Τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν στο μέρος αυτό είναι:
  - πώς αντιστοιχίζεται η ψηφιακή πληροφορία σε αναλογικές κυματομορφές (που θα διέλθουν μέσα από το αναλογικό κανάλι);
  - πώς επιλέγονται οι κυματομορφές;
  - πώς σχεδιάζεται ο δέκτης που θα αντιστοιχίζει τις κυματομορφές και πάλι σε ψηφιακή πληροφορία;

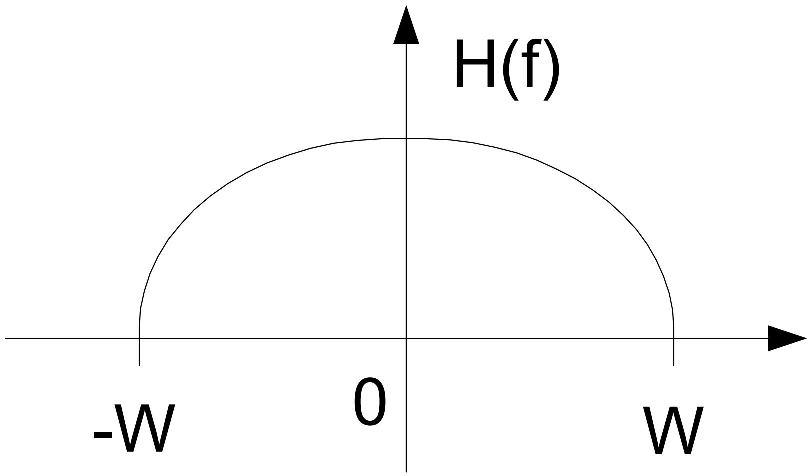
Κανάλια Βασικής Ζώνης

1. Baseband Channels

   – η ζώνη διέλευσής τους περιλαμβάνει τη συχνότητα $f=0$

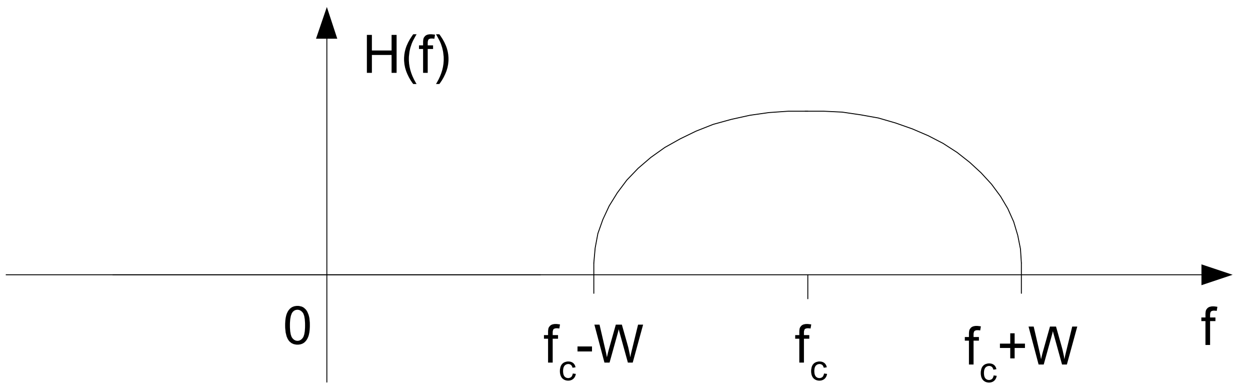
   – δε χρησιμοποιείται κάποιο φέρον ημιτονοειδές σήμα για τη μετάδοση ψηφιακά διαμορφωμένων σημάτων

   – παράδειγμα: αρκετά ενσύρματα κανάλια



Ζωνοπερατά Κανάλια

2. Passband Channels
   - το σήμα που φέρει την πληροφορία αποτυπώνεται σε ένα ημιτονοειδές φέρον σήμα (πλάτος/συχνότητα/φάση)
   - το συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος πληροφορίας μεταφέρεται στη ζώνη διέλευσης
   - παράδειγμα: ραδιοκανάλια (RF channels)



   - Λόγοι χρήσης ζωνοπερατών καναλιών:
     - Για να ξεπεραστούν τυχόν αδυναμίες μετάδοσης στη βασική ζώνη για ένα συγκεκριμένο μέσο
     - Για τη χρησιμοποίηση συχνοτήτων σε διάφορες ζώνες

Κυματομορφές Σήματος

- Μετάδοση ψηφιακής πληροφορίας πάνω από ένα αναλογικό κανάλι
- Μέσα στο κανάλι μπορώ να στείλω μόνο αναλογικές κυματομορφές
- Έστω ότι το αλφάβητο της ψηφιακής πληροφορίας που θέλω να μεταδώσω αποτελείται από *M* σύμβολα

$$\boxed{\Phi = \left\{ s_1, \ldots, s_M \right\}}$$

- Τα σύμβολα αντιστοιχίζονται σε *M* αναλογικές κυματομορφές

$$\boxed{\left\{ s_1\left(t\right), \ldots, s_M\left(t\right) \right\}}$$

- Ερωτήματα:
  - Πώς σχεδιάζονται οι κυματομορφές;
  - Τι ιδιότητες θα πρέπει να έχουν;
  - Πώς επηρεάζουν την αξιοπιστία της μετάδοσης;

Γεωμετρική Αναπαράσταση

- Ένα σημαντικό εργαλείο για την ανάλυση/σχεδιασμό των κυματομορφών είναι
  - η γεωμετρική αναπαράστασή τους
- Τι είναι η γεωμετρική αναπαράσταση;
  - αντί των κυματομορφών $s_m(t)$,
  - χρησιμοποιώ μια εναλλακτική μαθηματική αναπαράσταση
  - αντί για αναλογικά σήματα, έχω πλέον διανύσματα

- Γιατί χρησιμοποιείται η γεωμετρική αναπαράσταση;
  - δίνει μια καλύτερη διαισθητική κατανόηση
  - απλοποιείται η ανάλυση των κυματομορφών
  - απλοποιείται η υλοποίηση
  - γίνεται καλύτερη επιλογή κυματομορφών
- Αξιοποιούνται γνωστά εργαλεία από τη γραμμική άλγεβρα και τη θεωρία πιθανοτήτων και στοχαστικών διαδικασιών

Ορθοκανονική Βάση (1)

- Για να προχωρήσουμε στη γεωμετρική αναπαράσταση, απαιτείται μια ορθοκανονική βάση

- Ορθοκανονική βάση
  - ένα ελάχιστο σύνολο N κυματομορφών $\{\psi_i(t)\}$, $i=1,\ldots,N$, ορθοκανονικών μεταξύ τους
  - που θα ορίζουν έναν χώρο στον οποίο βρίσκονται οι κυματομορφές σήματος $\{s_m(t)\}$, $m=1,\ldots,M$,

- Ερώτηση 1: Υπάρχει περίπτωση να είναι $M>N$;

- Ερώτηση 2: Υπάρχει περίπτωση να απαιτείται $N>M$;

Ορθοκανονική Βάση (2)

- Ορθοκανονικότητα:
  - Ορθογώνια διανύσματα ή σήματα
  - μοναδιαίας ενέργειας

1. Κυματομορφές

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(t)\psi_j(t)\,dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}}$$

2. Διανύσματα

$$\boxed{\mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}}$$

Ορθοκανονική Βάση (3)

- Βρίσκουμε μια ορθοκανονική βάση, και δεν χρησιμοποιούμε κατευθείαν τις $\{s_m(t)\}$, διότι:
  - μπορεί δύο ή περισσότερες κυματομορφές να είναι γραμμικά εξαρτημένες

    (αυτό σημαίνει ότι ο χώρος σημάτων *N* είναι μικρότερος του αριθμού των κυματομορφών *M*)

    Παράδειγμα: έχω 4 κυματομορφές που ορίζονται σε ένα δισδιάστατο χώρο (επίπεδο)
  - οι κυματομορφές σήματος μπορεί να μην έχουν μοναδιαία ενέργεια

Ορθογωνοποίηση Gram-Schmidt

- Gram-Schmidt: Μια διαδικασία κατασκευής μιας ορθοκανονικής βάσης για τις *M* κυματομορφές σήματος

1. Πρώτη ορθοκανονική κυματομορφή

$$\psi_1(t) = s_1(t) \Big/ \sqrt{E_1}, \quad E_1 = \int s_1^2(t)\,dt$$

E_m : η ενέργεια του m-ιοστου σήματος $s_m(t)$

2. Δεύτερη ορθοκανονική κυματομορφή
   - κατασκευάζεται από το $s_2(t)$
   - αφού αφαιρέσουμε τη συνιστώσα του $s_2(t)$ στην $\psi_1(t)$ και
   - κανονικοποιήσουμε την ενέργεια του τελικού σήματος

$$d_2(t) = s_2(t) - c_{21}\psi_1(t)$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon \quad c_{21} = \int s_2(t)\psi_1(t)\,dt$$

$$\psi_2(t) = d_2(t) \Big/ \sqrt{E_2}, \quad E_2 = \int d_2^2(t)\,dt$$

Ορθογωνοποίηση Gram-Schmidt (2)

3. k-οστή ορθοκανονική κυματομορφή
   - κατασκευάζεται από το $s_k(t)$
   - αφού αφαιρέσουμε τις συνιστώσες του $s_k(t)$ πάνω σε όλες τις προηγούμενες ορθοκανονικές κυματομορφές $\psi_i(t)$, $i=1,\ldots,k-1$, και στη συνέχεια
   - Κανονικοποιήσουμε την ενέργεια του τελικού σήματος

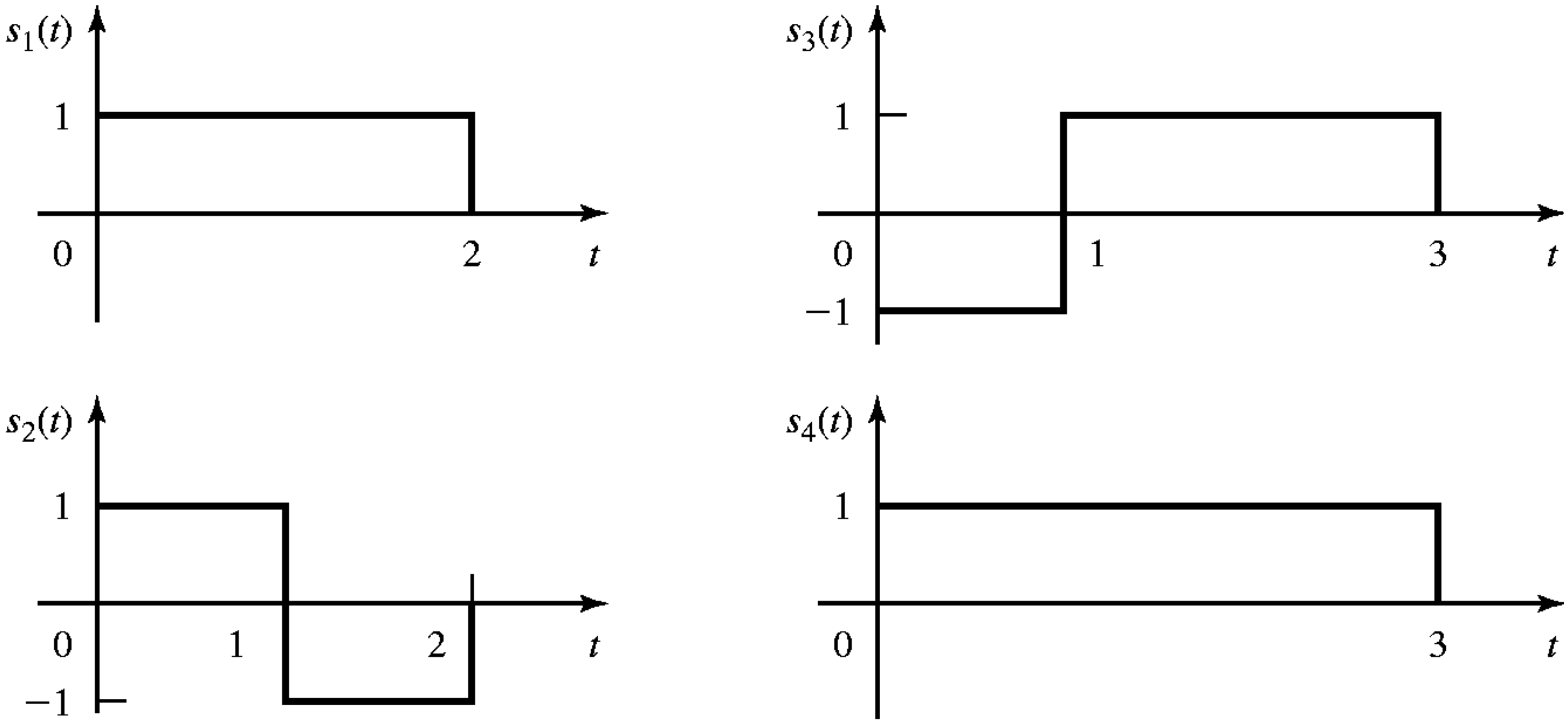
$$d_k(t) = s_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki}\psi_i(t),$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon \quad c_{ki} = \int s_k(t)\psi_i(t)\,dt$$

$$\psi_k(t) = d_k(t)\Big/\sqrt{E_k}\,, E_k = \int d_k^2(t)\,dt$$

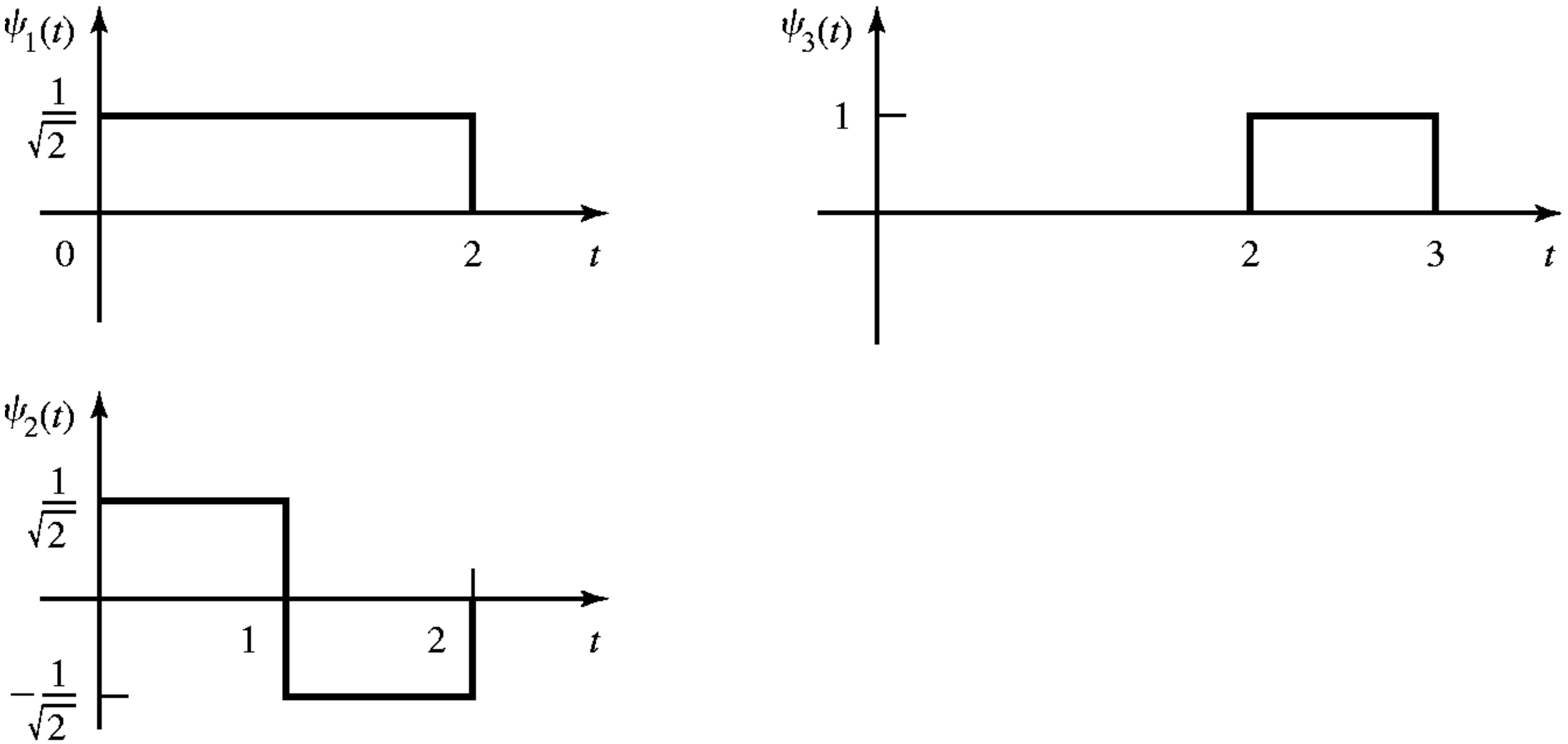
4. Συνεχίζεται μέχρι να εξαντληθούν οι M κυματομορφές σήματος και δημιουργηθούν $N \leq M$ ορθοκανονικές βάσεις

Παράδειγμα



- *M=4* κυματομορφές σήματος

Παράδειγμα (συν.)



- *N=3* ορθοκανονικές κυματομορφές (οι συναρτήσεις βάσης)

Διανυσματική Αναπαράσταση

- Χρησιμοποιώντας την ορθοκανονική βάση
  - κάθε μία από τις M κυματομορφές σήματος μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των ορθοκανονικών κυματομορφών

$$s_m(t) = \sum_{n=1}^{N} s_{mn}\psi_n(t), \quad m = 1,\ldots,M$$

  - όπου s_{mn} είναι η προβολή της m-οστής κυματομορφής σήματος στην n-οστή ορθοκανονική συνιστώσα

$$s_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)\psi_n(t)\,dt$$

Διαφορές με άλλα αναπτύγματα (π.χ. Fourier):

- *Η μορφή των συναρτήσεων βάσης δεν είναι προκαθορισμένη*
- *Αν και πεπερασμένο είναι ακριβές ανάπτυγμα*

Διανυσματική Αναπαράσταση (2)

- Θεωρώντας ότι η ορθοκανονική βάση είναι δεδομένη
  - αντί να χρησιμοποιώ τις κυματομορφές σήματος
  - χρησιμοποιώ το διάνυσμα των προβολών τους στην ορθοκανονική βάση

$$s_m(t) \rightleftarrows \mathbf{s}_m = \begin{bmatrix} s_{m1} & s_{m2} & \cdots & s_{mN} \end{bmatrix}^T$$

- Ισοδύναμες εκφράσεις σημάτων και αντίστοιχων διανυσμάτων.
  - ενέργεια κυματομορφής

$$E_m = \int_{-\infty}^{\infty} s_m^2(t)\,dt = \sum_{n=1}^{N} s_{mn}^2$$

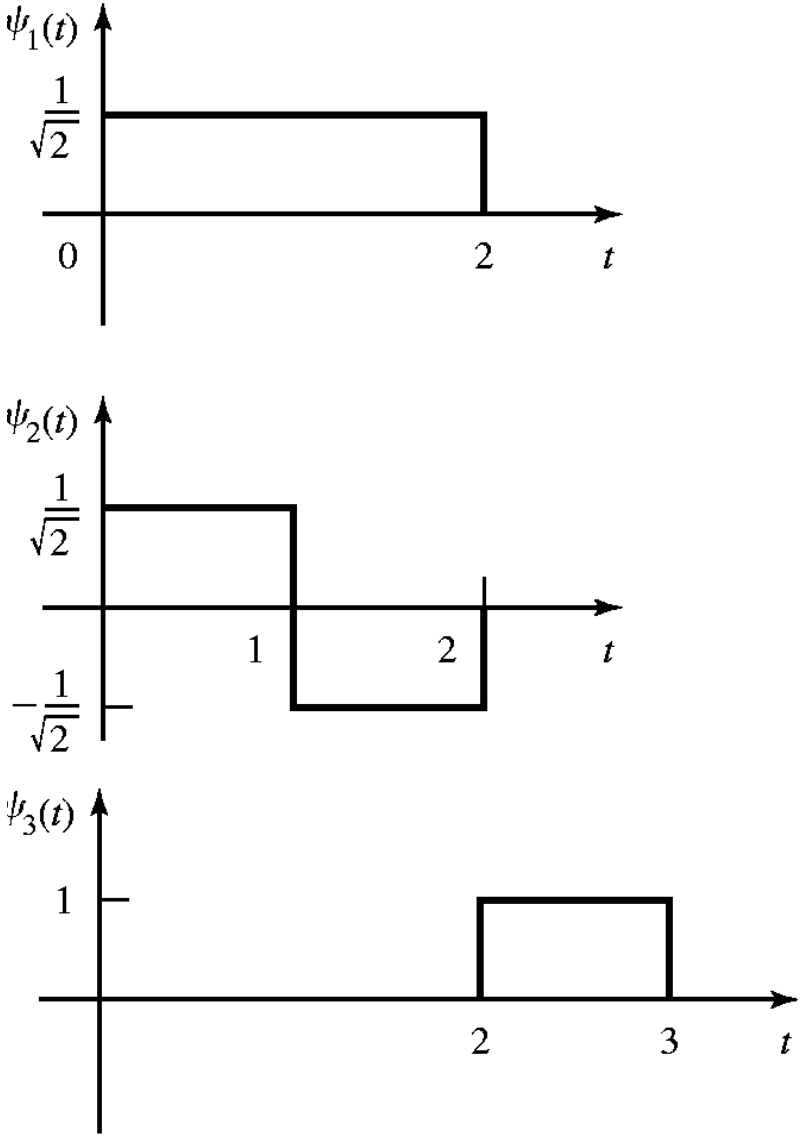
  - εσωτερικό γινόμενο δύο κυματομορφών

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)\,s_n(t)\,dt = \mathbf{s}_m^T \mathbf{s}_n$$

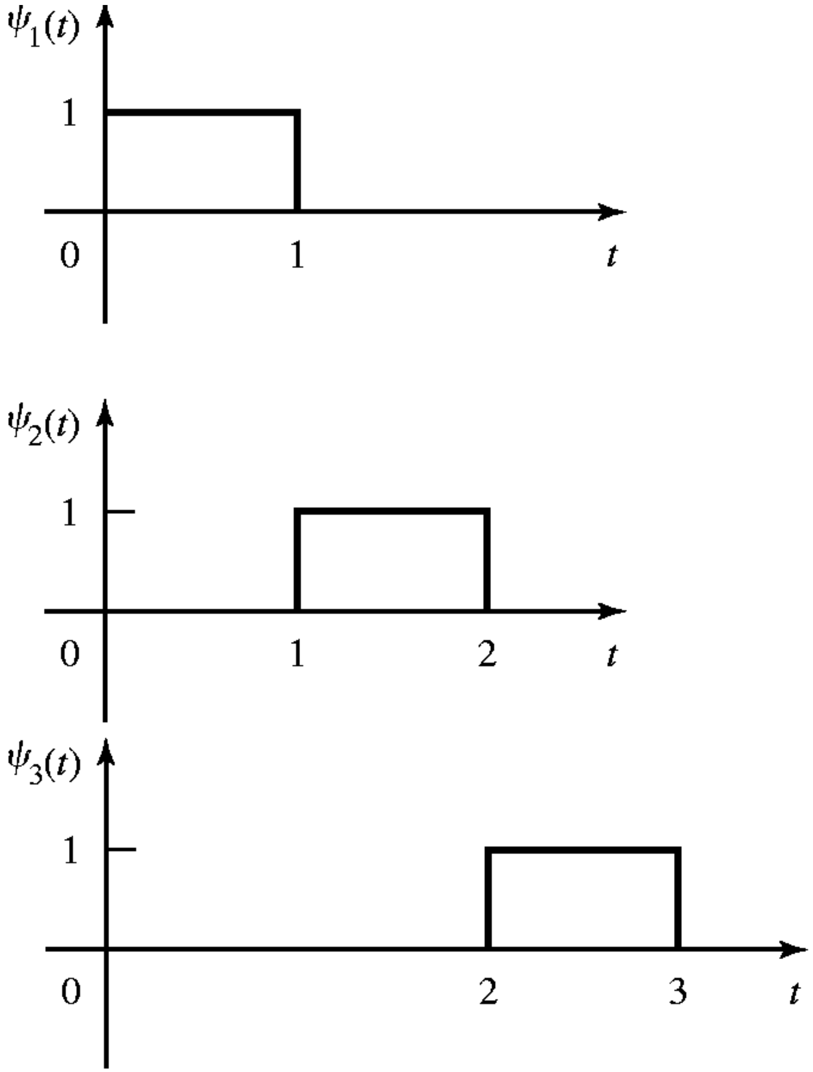
Μοναδικότητα Βάσης

- Η ορθοκανονική βάση δεν είναι μοναδική
  - ένας *N*-διάστατος χώρος μπορεί να οριστεί από άπειρες ορθοκανονικές βάσεις
  - π.χ. μια περιστροφή της βάσης είναι επίσης ορθοκανονική βάση
  - πολλές φορές αντί της βάσης που παράγεται από την Gram-Schmidt, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια άλλη βολικότερη ορθοκανονική βάση

Παράδειγμα



ορθοκανονική βάση
από Gram-Schmidt



απλούστερη
ορθοκανονική βάση