Ψηφιακές Τηλεπικοινωνίες

Θεωρία Ρυθμού – Παραμόρφωσης

Θεωρία Ρυθμού-Παραμόρφωσης

- Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής: αν έχω αρκετά μεγάλο μπλοκ δεδομένων, μπορώ να φτάσω κοντά στην εντροπία
- Πιθανά Προβλήματα:
  > σε διακριτή πηγή:
  - η πηγή να έχει πολύ μεγάλη εντροπία (πολλά bits/symbol)
  - αλλά οι πόροι (αποθήκευσης, μετάδοσης) να είναι περιορισμένοι

  > σε αναλογική πηγή:
  - άπειρο πλήθος bits για ιδανική αναπαράσταση
  - άρα χάνεται πληροφορία κατά την κβάντιση
- Συμπέρασμα:
  - Πολλές φορές κατά την κωδικοποίηση πηγής δε μπορώ (ή δεν θέλω) να φτάσω στην εντροπία
  - Εισάγεται κάποια παραμόρφωση
  - Πώς σχετίζεται η παραμόρφωση με τη συμπίεση;
  - Η απάντηση προαπαιτεί να οριστούν κάποια μεγέθη

Ρυθμός vs Παραμόρφωση

- Αν δεν μπορώ να διαθέσω *H(X)* bits/έξοδο,
  - τα σφάλματα είναι αναπόφευκτα

- Ερώτηση:
  - Για δεδομένο ρυθμό bits/έξοδο, ποιος είναι ο ελάχιστος ρυθμός σφαλμάτων (παραμόρφωση) ;

- Αντίστροφο Ερώτημα:
  - Για δεδομένη παραμόρφωση, ποιος είναι ο ελάχιστος ρυθμός bits/έξοδο;

- Αλλά, πώς ορίζεται η παραμόρφωση;

Παραμόρφωση

- Κατά την κωδικοποίηση/αποκωδικοποίηση μιας πηγής, πόσο «κοντά» είναι το αναπαραχθέν σήμα στο αρχικό;

- Επιθυμητές ιδιότητες μέτρου παραμόρφωσης
  - αντιστρόφως ανάλογο της εγγύτητας/πιστότητας (μεγάλη εγγύτητα ⇔ μικρή παραμόρφωση)
  - απλό και μαθηματικά εύχρηστο
  - να ενσωματώνει στοιχεία από τη διαδικασία αντίληψης
  - Η Θ.Π. έρχεται αντιμέτωπη με ενδιαφέρουσες προκλήσεις

- Παράδειγμα αντίληψης:
  - ηχητικό σήμα: η ακοή δεν είναι ευαίσθητη στη φάση (??)
  - σήμα εικόνας: η όραση είναι ευαίσθητη στη φάση

Παραμόρφωση (2)

- Παραμόρφωση Hamming (πηγές με διακριτό αλφάβητο)

$$d_H\left(x,\hat{x}\right)=\begin{cases}1, & x\neq\hat{x}\\ 0, & x=\hat{x}\end{cases}$$

- Παραμόρφωση Τετραγωνικού Σφάλματος (πηγές συνεχούς αλφαβήτου)

$$d\left(x,\hat{x}\right)=\left(x-\hat{x}\right)^2$$

- Αν έχω ένα μπλοκ από *n* δείγματα πηγής, ορίζω την ποσότητα

$$d\left(\mathbf{x}^n,\hat{\mathbf{x}}^n\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d\left(x_i,\hat{x}_i\right)$$

ως το μέσο όρο των παραμορφώσεων

– Ανεξάρτητη από τη θέση του σφάλματος μέσα στο μπλοκ

Παραμόρφωση (3)

- Η έξοδος της πηγής είναι τυχαία διαδικασία
  - Η απόσταση αρχικού σήματος και αναπαραγωγής είναι επίσης τυχαία διαδικασία

- Η στατιστική μέση τιμή της παραμόρφωσης του κωδικοποιητή:

$$D = E\left[d\left(\mathbf{X}^n, \hat{\mathbf{X}}^n\right)\right] = E\left[d\left(X, \hat{X}\right)\right]$$

  - η δεύτερη ισότητα υποθέτει:
  - στασιμότητα της πηγής: δηλαδή ότι τα δείγματα της τυχαίας διαδικασίας κάθε χρονική στιγμή ακολουθούν την ίδια κατανομή

- Όταν η μετρική είναι η παραμόρφωση Hamming, τότε η μέση παραμόρφωση D και η πιθανότητα σφάλματος συμπίπτουν

$$D = E\left[d\left(X, \hat{X}\right)\right] = 1 \times p(X \neq \hat{X}) + 0 \times p(X = \hat{X}) = p_e$$

Θεώρημα Ρυθμού-Παραμόρφωσης

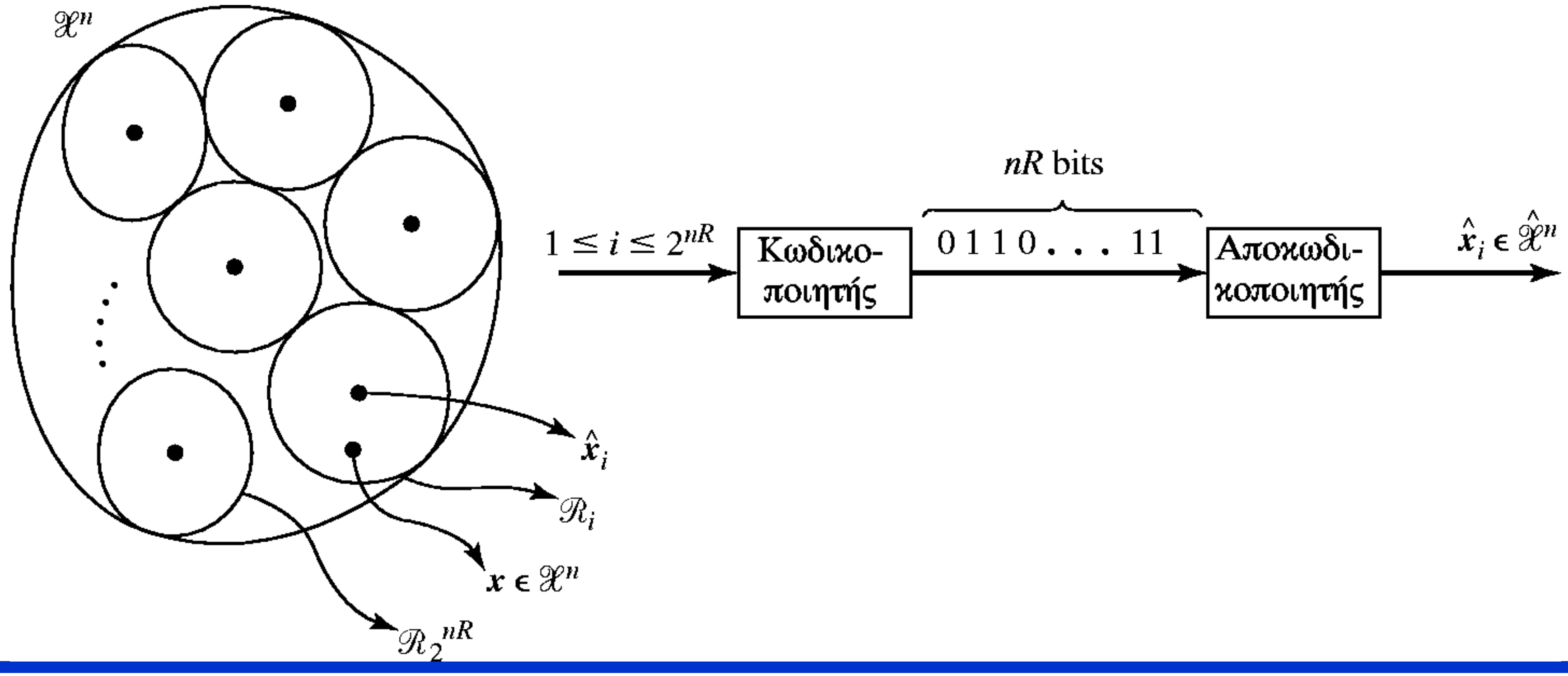
Θεώρημα: Ο ελάχιστος αριθμός bits/έξοδο που απαιτείται για να αναπαραχθεί μια πηγή χωρίς μνήμη με παραμόρφωση μικρότερη ή ίση του D ονομάζεται *συνάρτηση ρυθμού-παραμόρφωσης*, $R(D)$, και είναι

$$R(D) = \min_{p(\hat{x}|x):\ E\left[d\left(X,\hat{X}\right)\right] \le D} I\left(X;\hat{X}\right)$$

- Η ποσότητα *I(X;Y)* είναι η αμοιβαία πληροφορία
  - Φυσική Σημασία: τι πληροφορία μαθαίνω για την τυχαία μεταβλητή *X* αν γνωρίζω την τυχαία μεταβλητή *{\hat X}*
  - Με την αμοιβαία πληροφορία ασχοληθήκαμε αναλυτικά κατά την κωδικοποίηση καναλιού (προσοχή: εκεί θέλαμε να την μεγιστοποιήσουμε)

Ρυθμός – Παραμόρφωση

- Δημιουργώ μπλοκ *n* δειγμάτων(εξόδων) της πηγής
- Αν διαθέτω *R bits/έξοδο*, τότε έχω *nR bits/μπλοκ*
- Μπορώ να κωδικοποιήσω 2^{nR} «διαφορετικές τιμές» του μπλοκ
- Χωρίζω το χώρο της εξόδου της πηγής σε 2^{nR} περιοχές
- Κάθε περιοχή συμβολίζεται με το δείκτη $1 \le i \le 2^{nR}$
- Η δυαδική αναπαράσταση του δείκτη είναι η κωδικοποίηση της περιοχής



Ρυθμός – Παραμόρφωση (2)

- Όλες οι τιμές της πηγής που ανήκουν σε μια περιοχή αντιστοιχίζονται σε μια αντιπροσωπευτική τιμή $\boxed{\hat{x}_i}$
- Αυτή επιλέγεται ώστε να ελαχιστοποιεί τη μέση απόσταση (παραμόρφωση) όλων των τιμών της περιοχής
- Κωδικοποιητής και Αποκωδικοποιητής γνωρίζουν την αντιστοίχηση
- Μεγάλο *R*:
  - πολλές περιοχές
  - μικρή παραμόρφωση
- Μικρό *R*:
  - λίγες περιοχές
  - μεγάλη παραμόρφωση

Ρυθμός – Παραμόρφωση (3)

- Ακραίες Περιπτώσεις:
  - Μία περιοχή ($R=0$): το σημείο είναι το κέντρο μάζας του χώρου της πηγής
  - Μέγιστο R: κάθε περιοχή περιλαμβάνει μία τιμή εξόδου, μηδενική παραμόρφωση

- Συνάρτηση Ρυθμού Παραμόρφωσης:
  - Ποιος είναι ο ελάχιστος R για μια ανεκτή D;
  - Ποια είναι η μέγιστη D για ένα επιθυμητό R;

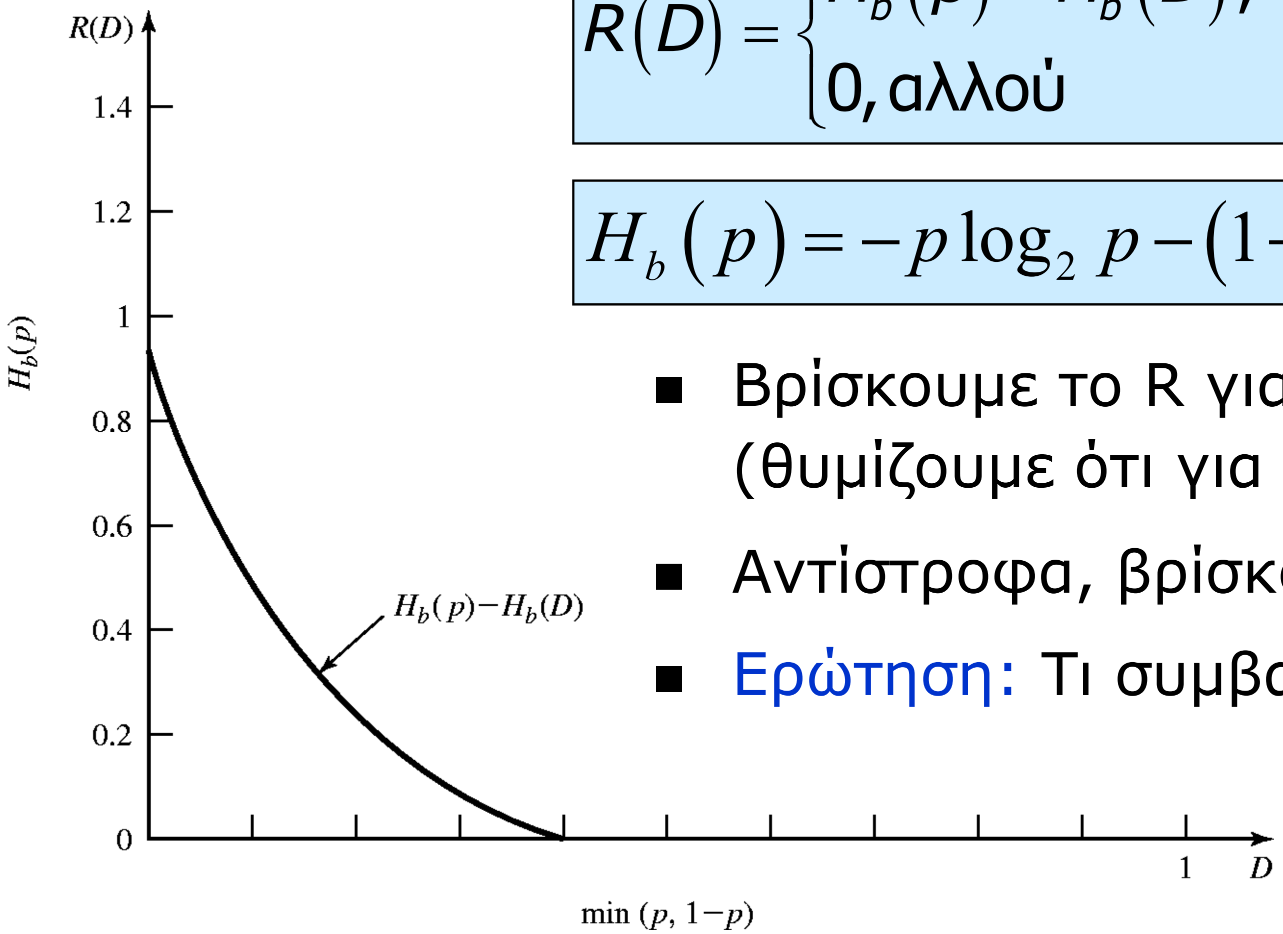
- Όλα αυτά είναι θεμελιώδη όρια
  - ισχύουν ασυμπτωτικά όταν $n \to \infty$

Δυαδική Διακριτή Πηγή

- Πηγή *Φ={0,1}*, με πιθανότητες εμφάνισης *{1-p,p}*
- Εάν η μετρική παραμόρφωσης είναι η Hamming, τότε μπορεί να δειχθεί ότι:

$$R(D) = \begin{cases} H_b(p) - H_b(D), & 0 \le D \le \min\{p, 1-p\} \\ 0, \text{αλλού} \end{cases}$$

$$H_b(p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$$



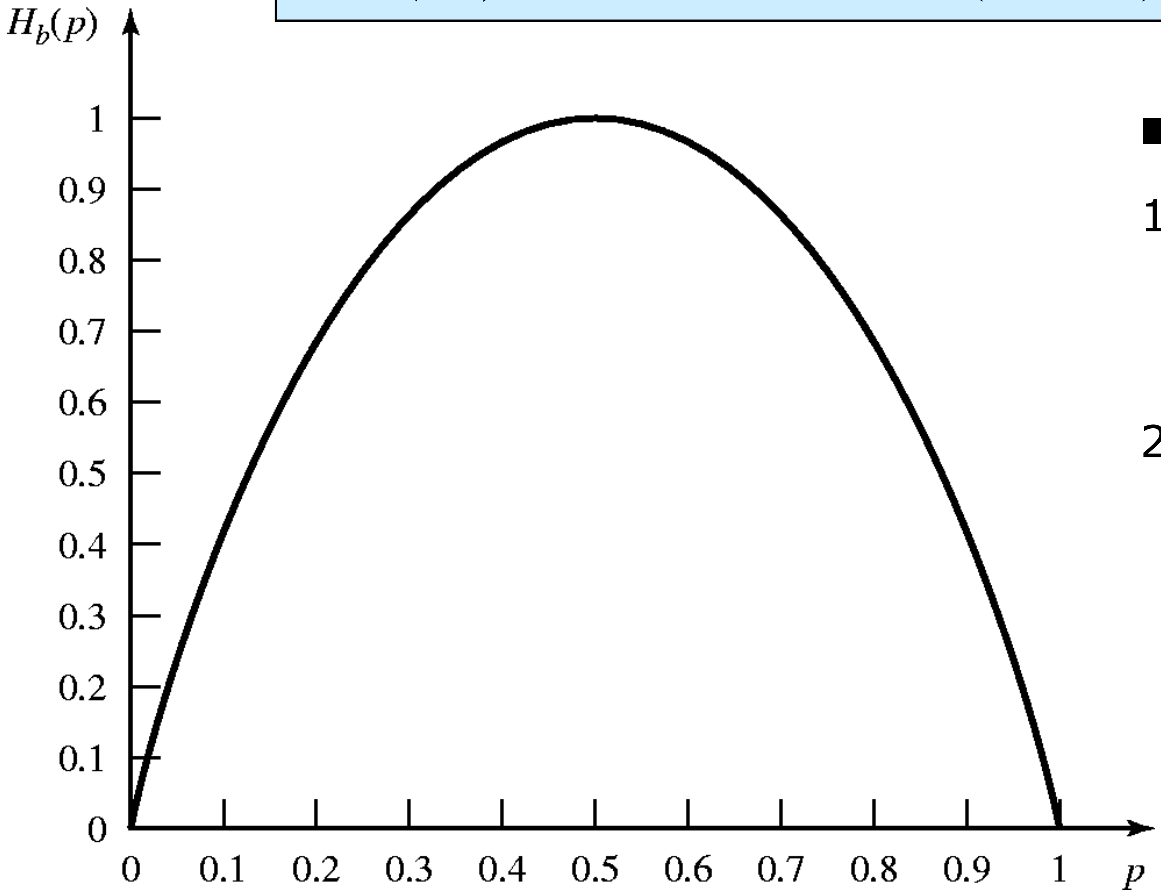
- Βρίσκουμε το R για δεδομένη D
(θυμίζουμε ότι για δυαδικές πηγές D = P_e)
- Αντίστροφα, βρίσκουμε το D για δεδομένο R
- Ερώτηση: Τι συμβαίνει για *D=0 και D=p*;

Π.χ. έστω p=0.5 kai P_e=0.25. Τότε D= 0.25 ➔ R(0.25)=H_b(0.5) – H_b(0.25) = 0.189

Γράφημα της συνάρτησης δυαδικής εντροπίας

Έχουμε ήδη δει ότι για δυαδική DMS $\Phi=\{0,1\}$, με πιθανότητες εμφάνισης $\{p,1-p\}$, η συνάρτηση δυαδικής εντροπίας δίνεται ως:

$$\boxed{H_b(p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)}$$



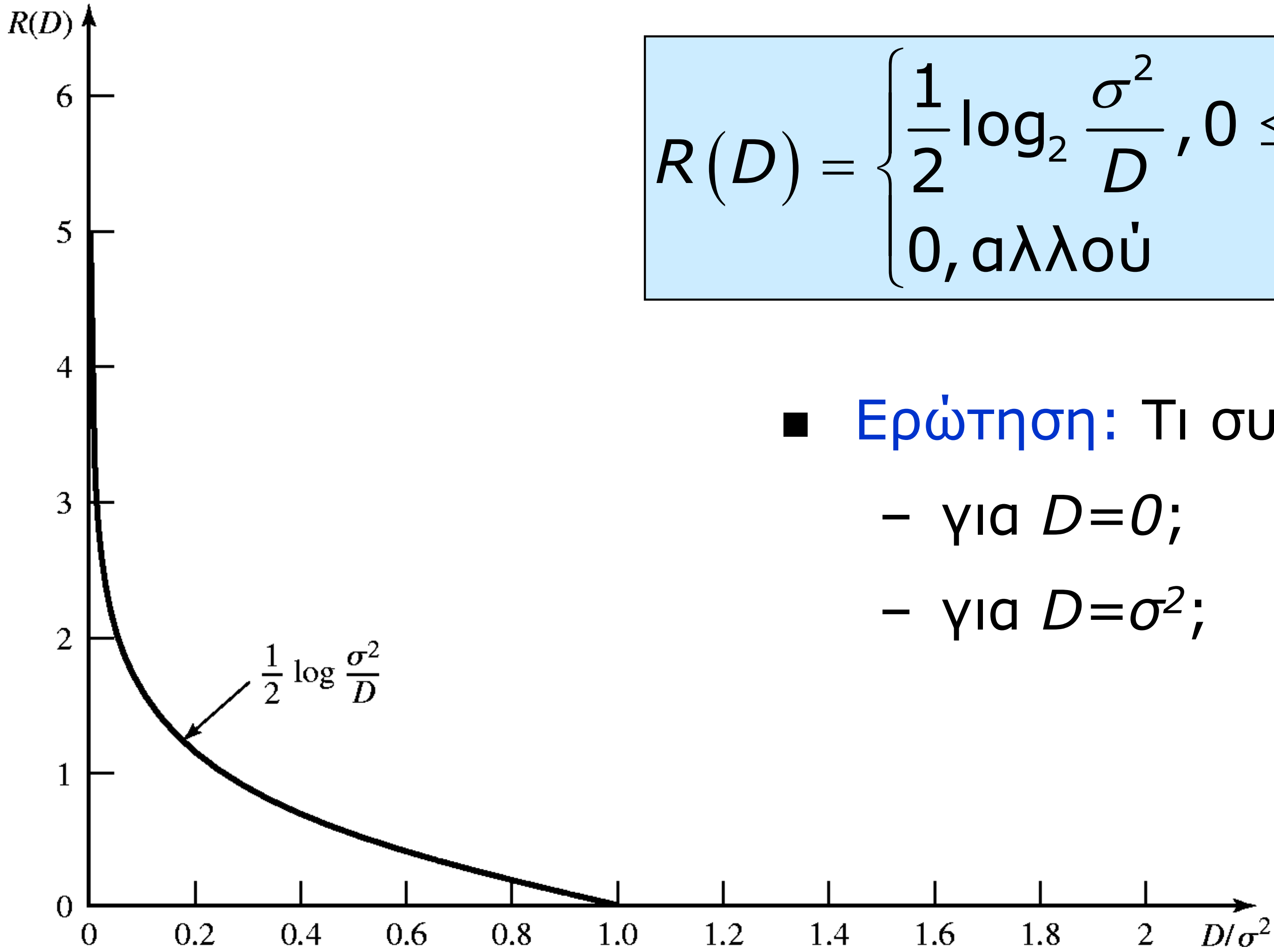
- Παρατηρήσεις:

1. ελαχιστοποιείται όταν $p=0$ ή 1, οπότε $H(0)=H(1)=0$
2. μεγιστοποιείται όταν τα σύμβολα είναι ισοπίθανα, $H(0.5)=1$

Gaussian Πηγή

- Έστω πηγή με συνεχές αλφάβητο $X \sim N(0,\sigma^2)$
- Εάν η μετρική παραμόρφωσης είναι το μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα, τότε μπορεί να δειχθεί ότι:

$$R(D) = \begin{cases} \frac{1}{2}\log_2 \frac{\sigma^2}{D}, 0 \le D \le \sigma^2 \\ 0, \text{αλλού} \end{cases}$$



- Ερώτηση: Τι συμβαίνει
  - για $D=0$;
  - για $D=\sigma^2$;

Συνάρτηση Παραμόρφωσης - Ρυθμού

- Ερώτημα:
  - πόσο μειώνεται η παραμόρφωση αν αυξήσω το ρυθμό κατά 1bit/έξοδο; (δηλαδή από R → R+1)
- Απάντηση:
  - χρειαζόμαστε την αντίστροφη συνάρτηση της *R(D)*, που είναι η συνάρτηση παραμόρφωσης - ρυθμού *D(R)*

- Παράδειγμα:
  - Gaussian πηγή
  - παραμόρφωση τετραγωνικού σφάλματος

$$R(D) = \frac{1}{2}\log_2 \frac{\sigma^2}{D}$$

$$D(R) = \sigma^2 2^{-2R}$$

  - αύξηση κατά 1bit/έξοδο
  - Υπο-τετραπλασιάζει την *D* (μείωση 6dB)