Ψηφιακές Τηλεπικοινωνίες

Θεωρία Πληροφορίας:

Χωρητικότητα Καναλιού

Χωρητικότητα Καναλιού

- Η θεωρία πληροφορίας περιλαμβάνει μεταξύ άλλων:
  - κωδικοποίηση πηγής
  - κωδικοποίηση καναλιού
- Κωδικοποίηση πηγής:
  - πόση πληροφορία έχει μια πηγή;
  - πόσο μπορώ να τη συμπιέσω;
  - τι παραμόρφωση εισάγεται κατά τη συμπίεση;
  - γιατί χρησιμοποιούνται κωδικοποιητές πηγής;
- Κωδικοποίηση καναλιού:
  - πόσο «καλό» είναι ένα κανάλι;
  - πόσο υποβαθμίζεται η πληροφορία που διέρχεται από αυτό;
  - ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης δεδομένων από ένα κανάλι;
  - γιατί χρησιμοποιούνται κωδικοποιητές καναλιού;

Κωδικοποίηση Καναλιού

- Στόχος: η μετάδοση πληροφορίας μέσα από ένα κανάλι
  - με όσο το δυνατόν μεγαλύτερο ρυθμό
  - αλλά και αξιόπιστα

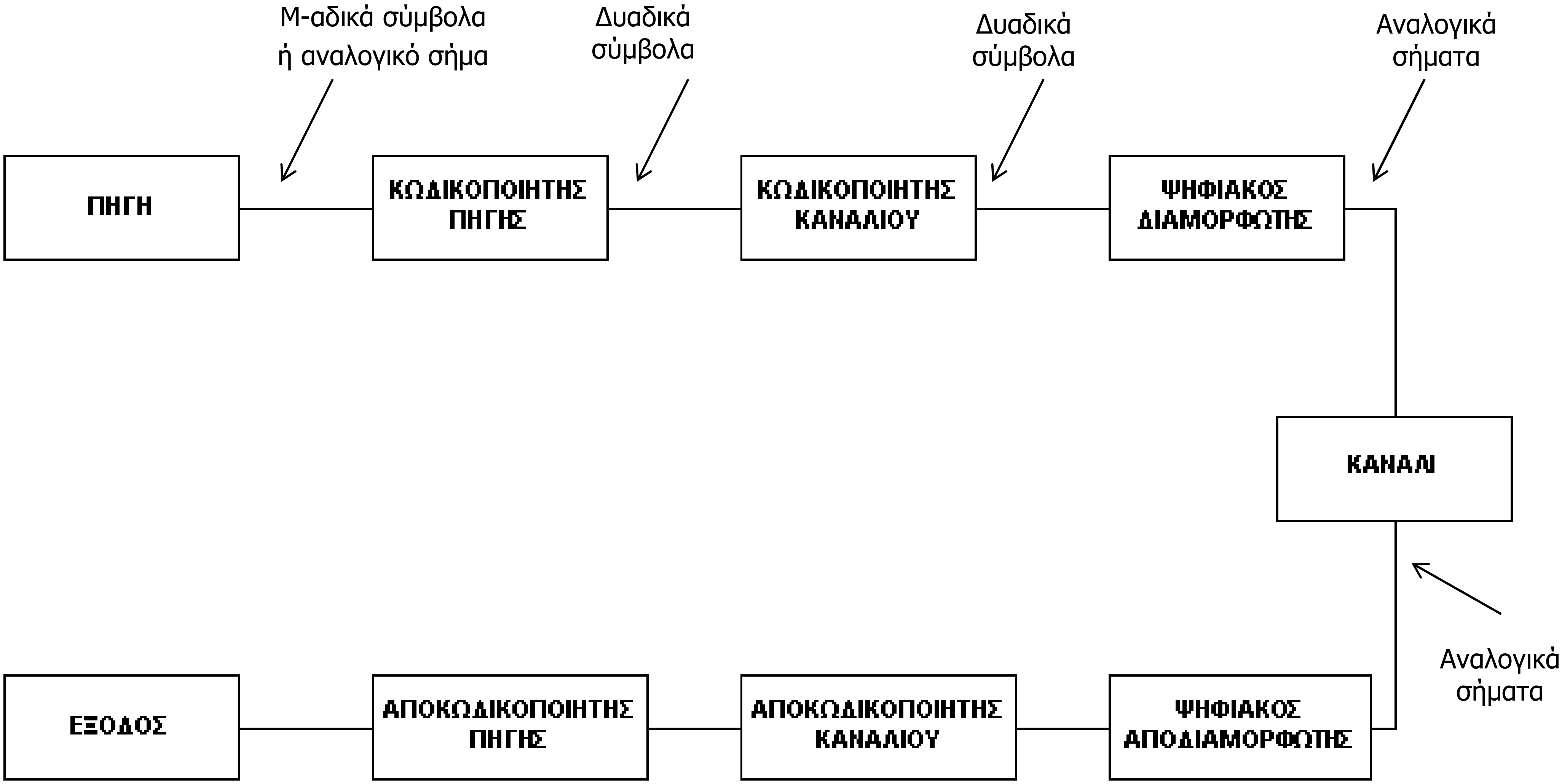
- Κάθε κανάλι εισάγει θόρυβο στο μεταδιδόμενο σήμα
- Αποτέλεσμα:
  - η μετάδοση μπορεί να περιέχει λάθη (λίγα ή πολλά)
  - θεμελιώδη όρια στο ρυθμό/ισχύ μετάδοσης και στην πιθανότητα σφάλματος

➢ Μπορεί να γίνει μετάδοση χωρίς λάθη όταν υπάρχει θόρυβος;

Διάκριση Καναλιών

- Η κατηγοριοποίηση των καναλιών είναι αντίστοιχη της κατηγοριοποίησης των πηγών
- Ως προς το χρόνο:
  - συνεχούς χρόνου
  - διακριτού χρόνου
- Ως προς το αλφάβητο του μεταδιδόμενου σήματος:
  - συνεχούς αλφαβήτου (κυματομορφή)
  - διακριτού αλφαβήτου (π.χ. bits, σύμβολα)
- Το κανάλι συνεχούς χρόνου μπορεί να μετατραπεί σε διακριτού:
  - θα πρέπει όμως να είναι πεπερασμένου εύρους ζώνης
  - και να δειγματοληπτηθεί σύμφωνα με το όριο Nyquist
- **Εστιάζουμε σε κανάλια διακριτού χρόνου και διακριτού αλφαβήτου**
- Σημείωση: Τα κανάλια αυτά εμπεριέχουν ως μέρη τους τα συνεχή κανάλια

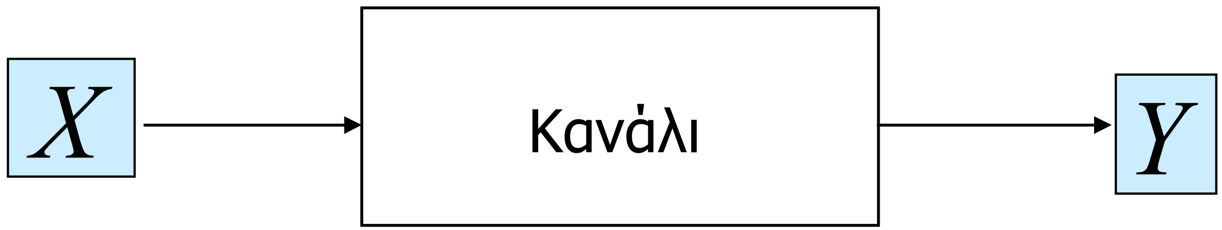
Βλ. Εισαγωγή: Βασική Δομή Ψ.Τ.Σ.



Διακριτό Κανάλι Χωρίς Μνήμη

- Discrete Memoryless Channel (DMC)

- Είναι το απλούστερο αλλά και βασικότερο μοντέλο καναλιού



- Διακριτό:
  - διακριτού χρόνου
  - η είσοδος και η έξοδος ανήκουν σε διακριτά αλφάβητα

- Χωρίς Μνήμη: κάθε έξοδος εξαρτάται μόνο από την αντίστοιχη είσοδο και όχι από παλαιότερες

Περιγραφή ενός DMC

- Αλφάβητο Εισόδου $X = \left\{ x_0, x_1, \ldots, x_{J-1} \right\}$
- Αλφάβητο Εξόδου $Y = \left\{ y_0, y_1, \ldots, y_{K-1} \right\}$
  - Το πλήθος των δύο αλφαβήτων δεν είναι απαραίτητα ίσο, ενδεχομένως $J>K$ ή $J<K$ (βλέπε ασκήσεις)
  - Για ευκολία θα θεωρήσουμε στη συνέχεια $J=K$
  - Η είσοδος και η έξοδος είναι τυχαίες μεταβλητές

- Ποιες ποσότητες χαρακτηρίζουν το κανάλι;

- Πιθανότητες μετάβασης $p\left(y_k \mid x_j\right) = P\left(Y = y_k \mid X = x_j\right) \quad \forall k, j$
  - Φυσική Σημασία: η πιθανότητα να λάβω στην έξοδο του καναλιού y_k, αν έστειλα x_j (υπό συνθήκη πιθανότητα)

Βασικές Σχέσεις

1. Πιθανότητες μετάβασης: εφόσον πρόκειται για πιθανότητες

$$\boxed{0 \le p\left(y_k \mid x_j\right) \le 1}$$

JxK πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης

2. Κατά σύμβαση (συνήθως) θεωρούμε
   - $j=k$, σωστή μετάδοση συμβόλου x_j
   - $j \neq k$, λανθασμένη μετάδοση συμβόλου x_j

3. Άθροισμα ως προς τις εξόδους

$$\boxed{\sum_{k=0}^{K-1} p\left(y_k \mid x_j\right) = 1}$$

Οι δεσμευμένες πιθανότητες του αθροίσματος είναι τα στοιχεία μιας αντίστοιχης γραμμής του πίνακα μετάβασης (j: δείκτης γραμμής)

Right stochastic matrix

   - Ερμηνεία: Αν στάλθηκε το x_j, τότε η έξοδος θα είναι σίγουρα κάποιο από τα y_k

Βασικές Σχέσεις (2)

4. Από κοινού πιθανότητα (κανόνας Bayes)

$$p\left(x_j, y_k\right) = p\left(y_k \mid x_j\right) p\left(x_j\right) = p\left(x_j \mid y_k\right) p\left(y_k\right)$$

– $p(x_j)$: η (a-priori) πιθανότητα του συμβόλου x_j, δηλαδή η πιθανότητα εμφάνισης του συμβόλου x_j

5. Για τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων εξόδου ισχύει

$$\begin{aligned} p\left(y_k\right) &= p\left(x_0, y_k\right) + \ldots + p\left(x_{J-1}, y_k\right) \\ &= \sum_{j=0}^{J-1} p\left(x_j, y_k\right) = \sum_{j=0}^{J-1} p\left(y_k \mid x_j\right) p\left(x_j\right) \end{aligned}$$

Βασικές Σχέσεις (3)

6. Πιθανότητα εσφαλμένης μετάδοσης:
   - το σφάλμα συμβαίνει όταν *j≠k (με p(*$y_k|x_j$*)*)
   - για συγκεκριμένο x_j η πιθανότητα λάθους είναι

$$\sum_{k \neq j} p\left(y_k \mid x_j\right)$$

   - Η μέση πιθανότητα λάθους είναι:
   - η μέση τιμή της για όλα τα x_j δίνεται ως

$$P_e = \sum_{j=0}^{J-1} p\left(x_j\right) \sum_{k \neq j} p\left(y_k \mid x_j\right) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k \neq j} p\left(x_j, y_k\right)$$

   - η πιθανότητα σωστής μετάδοσης είναι

$$P_c = 1 - P_e$$

Πότε ένα κανάλι είναι «καλό»;

- Ερωτήματα που – μεταξύ άλλων - θα απαντήσουμε:
  - Πόσο γρήγορα μπορώ να στείλω μέσα από ένα κανάλι;
  - Πότε ένα κανάλι δεν εισάγει πολλά σφάλματα;
  - Είναι δυνατόν να υπάρχει θόρυβος και παρόλα αυτά να μην έχουμε σφάλματα;

- **Παράδειγμα:**

  Έστω δυαδική πηγή (χωρίς μνήμη) που παράγει ισοπίθανα σύμβολα με ρυθμό 1000/sec τα οποία στη συνέχεια διέρχονται μέσα από ένα <u>δυαδικό συμμετρικό και χωρίς μνήμη κανάλι</u>. Η πιθανότητα σωστής μετάβασης μέσα από το κανάλι είναι 0.95. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβίβασης πληροφορίας;

Πότε ένα κανάλι είναι «καλό»;

- Για να προχωρήσουμε θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα κάποιες βασικές έννοιες που σχετίζονται με την ποσοτικοποίηση της πληροφορίας

- Εντροπία *H(X)*:
  - η αβεβαιότητα που έχουμε για την τυχαία μεταβλητή *X*
  - στα προηγούμενα μαθήματα το *X* ήταν η πηγή
  - εδώ, η πηγή είναι πλέον η είσοδος του καναλιού δηλαδή η πληροφορία που θέλω να μεταδώσω
  - η *X* είναι άγνωστη στο δέκτη και έχει εντροπία:

$$H(X) = -\sum_{j=0}^{J-1} p(x_j)\log_2 p(x_j)$$

Από Κοινού Εντροπία

- Αν συνδυάσω δύο πηγές *X* και *Y*, μπορώ να δημιουργήσω μία νέα πηγή *Z=(X,Y)*
- Η εντροπία της *Z* συνδέεται με τις από κοινού πιθανότητες εμφάνισης των δύο τ.μ.
- Από Κοινού (Συνδυασμένη) Εντροπία

$$H(X,Y) = -\sum_x \sum_y p(x,y) \log_2 p(x,y)$$

- Φυσική Σημασία: η αβεβαιότητα που έχω για το συνδυασμό των δύο τ.μ. (της από κοινού εμφάνισης τους)
- Παράδειγμα:

  X: ύψος βροχής τον Μάιο $\{x_0, x_1\}$=*{«μικρό», «καλό»}*

  Y: αγροτική παραγωγή τον Ιούλιο $\{y_0, y_1\}$=*{«μέτρια»,«καλή»}*

Υπό Συνθήκη Εντροπία

- Τι γίνεται όταν γνωρίζω την τιμή της μίας εκ των δύο τ.μ.;
- Γνωρίζοντας το *Y*, αλλάζει η αβεβαιότητα για το *X*
- *Αν, π.χ., προκύψει στην έξοδο το* y_1 *τότε η μέση αβεβαιότητα για το X είναι:*

$$H\left(X \mid Y = y_1\right) = -\sum_{j=0}^{J-1} p\left(x_j \middle| y_1\right) \log_2 p\left(x_j \middle| y_1\right)$$

- Για κάθε τιμή y_κ της τ.μ. *Y* έχουμε μία αντίστοιχη μεση αβεβαιότητα για την *X*, την $H(X|Y=y_\kappa)$
- Η μέση τιμή των παραπάνω ποσοτήτων είναι η υπό συνθήκη εντροπία

Υπό Συνθήκη Εντροπία (2)

- Υπό Συνθήκη Εντροπία:

$$
\begin{aligned}
H(X \mid Y) &= \sum_{k=0}^{K-1} H(X \mid y_k)\, p(y_k) \\
&= -\sum_{j} \sum_{k} p(x_j \mid y_k)\, p(y_k) \log_2 p(x_j \mid y_k) \\
&= -\sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{K-1} p(x_j, y_k) \log_2 p(x_j \mid y_k)
\end{aligned}
$$

- Φυσική Σημασία: Πόση είναι η αβεβαιότητα για την *X*, αν γνωρίζω την τιμή (έκβαση) της *Y*. Εναλλακτικά, πόση είναι η πληροφορία που "απομένει" στην X δοθέντος ότι έχω παρατηρήσει την Y.

- Ερώτηση 1: Αν γνωρίζω το *Y*, η αβεβαιότητα για το *X* αυξάνεται, μειώνεται, ή παραμένει σταθερή;
- Ερώτηση 2: Πότε είναι H(X/Y) = 0 και πότε H(X/Y)=H(X) ;

Υπό Συνθήκη Εντροπία (3)

- Ιδιότητα 1: Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς και τις προηγούμενες ιδιότητες, μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\boxed{H\left(X,Y\right)=H\left(X\,|\,Y\right)+H\left(Y\right)}$$

- Ιδιότητα 2: Αν οι πηγές είναι ανεξάρτητες, τότε

$$\boxed{H\left(X,Y\right)=H\left(X\right)+H\left(Y\right)}$$

Αμοιβαία Πληροφορία

- Εντροπία πηγής *H(X)*: η πληροφορία (αβεβαιότητα) της *X*
- Υπό Συνθήκη Εντροπία *H(X|Y)*: η αβεβαιότητα για την *X* αν ξέρω την τιμή της *Y*
- Η διαφορά των δύο μεγεθών: $$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$

  ονομάζεται Αμοιβαία Πληροφορία και είναι:
  - η ποσότητα πληροφορίας που παρέχεται από την τυχαία μεταβλητή *Y* για την *X*, *ή ισοδύναμα:*
  - *η ποσότητα της αβεβαιότητας που διαλύεται για την X όταν παρατηρώ την Y*
- Η αμοιβαία πληροφορία είναι ένα σημαντικό μέγεθος για
  - την κωδικοποίηση πηγής
  - την κωδικοποίηση καναλιού

Αμοιβαία Πληροφορία και Κανάλι

- Ο δέκτης δε γνωρίζει την είσοδο του καναλιού (X),
  - αλλά βλέπει την έξοδό του (Y)
- Η X μεταφέρει ποσότητα πληροφορίας $H(X)$
- Αρχικά, ο δέκτης έχει αβεβαιότητα $H(X)$ για την X
- Η Y είναι εξαρτημένη από την είσοδο του καναλιού
  - στην ουσία είναι μια ενθόρυβη έκδοση της X
- Η αβεβαιότητα του δέκτη μειώνεται σε $H(X|Y)$
- Ο δέκτης έμαθε πληροφορία $H(X)-H(X|Y)$

Αμοιβαία Πληροφορία και Κανάλι (2)

- Η αμοιβαία πληροφορία είναι το ποσό της πληροφορίας που έμαθε ο δέκτης
  - για την είσοδο του καναλιού *X*
  - παρατηρώντας την έξοδο του καναλιού *Y*

- Όσο μεγαλύτερη είναι η αμοιβαία πληροφορία,
  - τόσο καλύτερο είναι το κανάλι (τουλάχιστον απέναντι στη X)
  - τόσο περισσότερα μας λέει η έξοδος *Y* για την είσοδο *X*

$$\boxed{I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)}$$

$$\boxed{I(X;Y) = \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p(x_j, y_k)\log_2\left[\frac{p(y_k / x_j)}{p(y_k)}\right]}$$

Ιδιότητες Αμοιβαίας Πληροφορίας

1. Μη αρνητική: $I(X;Y) \geq 0$
   – πότε ισχύει η ισότητα;

2. Συμμετρία: $$I(X;Y) = I(Y;X)$$ TX → RX , RX → TX

3. $$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

4. $$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

5. $$I(X;Y) \leq \min\{H(X), H(Y)\}$$

Ιδιότητες Αμοιβαίας Πληροφορίας (ΟΧΙ)

6. Υπό συνθήκη αμοιβαία πληροφορία

$$\begin{aligned} I(X;Y\mid Z) &= \sum_z I(X;Y\mid z)\,p(z) \\ &= H(X\mid Z) - H(X\mid Y,Z) \end{aligned}$$

7. Κανόνας αλυσίδας για την αμοιβαία πληροφορία

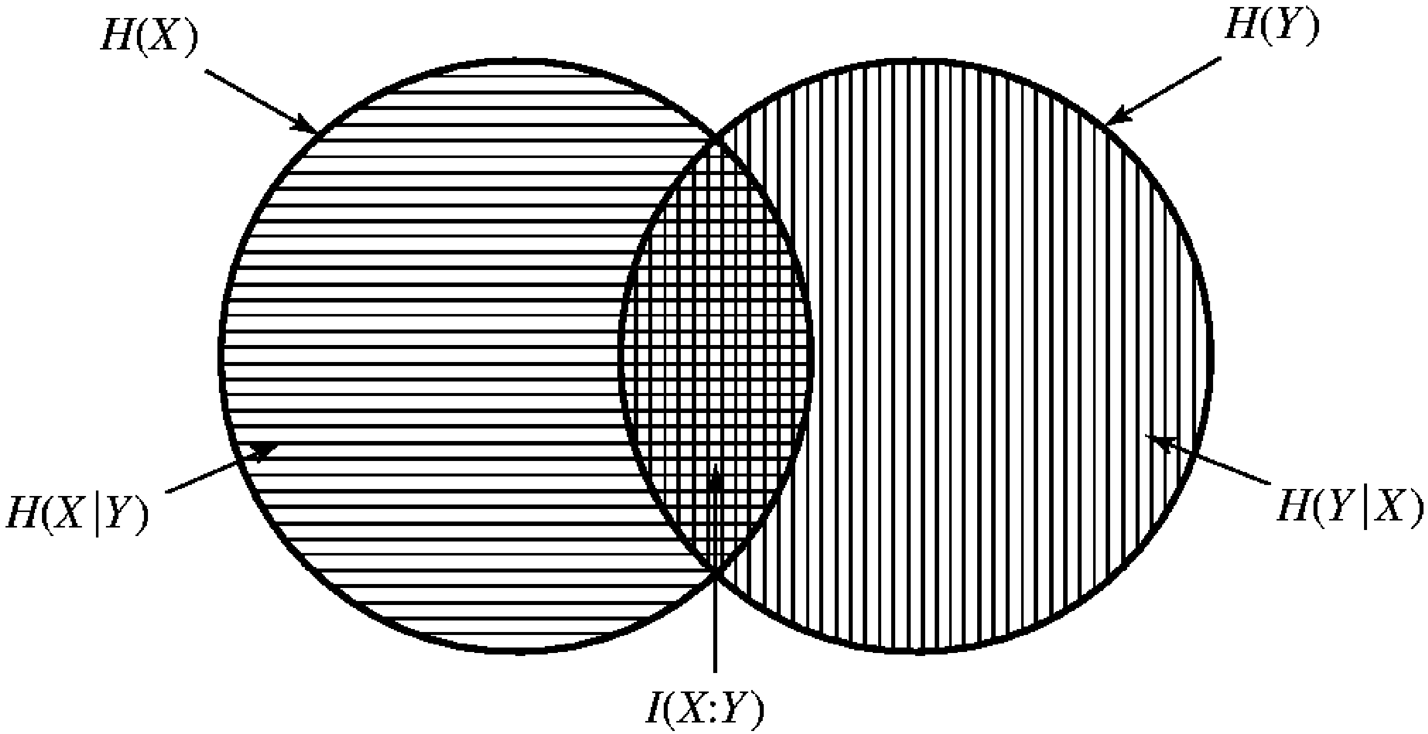
$$I(X,Y;Z) = I(X;Z) + I(Y;Z\mid X)$$

8. Γενίκευση κανόνα αλυσίδας

$$\begin{aligned} I(X_1,X_2,\ldots,X_n;Y) &= I(X_1;Y) + I(X_2;Y\mid X_1) \\ &\quad + \ldots + I(X_n;Y\mid X_1,X_2,\ldots,X_{n-1}) \end{aligned}$$

Σχέση Ποσοτήτων

- Εντροπία – Υπό Συνθήκη Εντροπία – Αμοιβαία Πληροφορία



- Ερώτηση: Ποια ποσότητα είναι η ένωση όλων των γραμμοσκιασμένων περιοχών;
- Απάντηση: *H(X,Y)*

Χωρητικότητα Καναλιού C

- Χωρητικότητα Καναλιού (Channel Capacity):
  - ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης από ένα κανάλι
  - εκφράζεται ανά χρήση του καναλιού (bits/channel use)
    channel use $\equiv$ symbol slot (χωρίς κωδικ. καναλιού)

- Χωρητικότητα Καναλιού και Αμοιβαία Πληροφορία
  - $I(X;Y)$ είναι το ποσό της πληροφορίας που έμαθε ο δέκτης για την είσοδο X του καναλιού παρατηρώντας την έξοδο Y
  - Η χωρητικότητα C είναι η μέγιστη πληροφορία που μπορεί να περάσει σωστά από το κανάλι

- Διαφορές:
  - η χωρητικότητα είναι ένα μέγεθος που χαρακτηρίζει το κανάλι αποκλειστικά
  - η αμοιβαία πληροφορία εξαρτάται από
    - » τις πιθανότητες μετάβασης $p(y_k|x_j)$ (κανάλι)
    - » τις πιθανότητες εμφάνισης $p(x_j)$ (πηγή)

Χωρητικότητα Καναλιού (2)

- Παράδειγμα 1: δύο πηγές μεταδίδονται (όχι ταυτόχρονα) πάνω από το ίδιο κανάλι και παρατηρούνται οι αντίστοιχες έξοδοι

  $H(X_1)=1,\quad H(X_1|Y_1)=0.8,\quad I(X_1;Y_1)=0.2$

  $H(X_2)=1.5,\quad H(X_2|Y_2)=0.3,\quad I(X_2;Y_2)=1.2$

  - ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού;
  - σίγουρα είναι μεγαλύτερη από 1.2 (ή ίση)

- Παράδειγμα 2: μία πηγή μεταδίδεται μέσα από δύο κανάλια

  $H(X)=1,\quad H_1(X|Y_1)=0.8,\quad I_1(X;Y_1)=0.2$

  $H_2(X|Y_2)=0.5,\quad I_2(X;Y_2)=0.5$

  - Ποιο κανάλι είναι καλύτερο;
  - το δεύτερο κανάλι «φέρθηκε» καλύτερα στην πηγή αυτή
  - ίσως όμως η πηγή αυτή ήταν καλύτερα προσαρμοσμένη να περάσει πάνω από το δεύτερο κανάλι
  - αυτό δεν σημαίνει ότι το πρώτο κανάλι είναι πάντοτε χειρότερο

Ορισμός Χωρητικότητας

- Προκειμένου να μην εξαρτάται η χωρητικότητα από την εκάστοτε πηγή, ορίζουμε

> Χωρητικότητα ενός DMC είναι η μέγιστη τιμή της αμοιβαίας πληροφορίας *I(X;Y)* ως προς όλες τις δυνατές κατανομές του αλφαβήτου εισόδου *X*
>
> $$C = \max_{\{p(x_j)\}} I(X;Y)$$

- Η *C* είναι πλέον συνάρτηση μόνο των πιθανοτήτων μετάβασης του καναλιού και όχι και των a-priori πιθανοτήτων

- Σημείωση: ανατρέξτε στον ορισμό της συνάρτησης ρυθμού-παραμόρφωσης (βλ. επόμενο σετ διαφανειών) και συγκρίνετέ τον με αυτόν της χωρητικότητας

Υπολογισμός Χωρητικότητας

- Για να υπολογίσουμε τη χωρητικότητα ενός καναλιού:
  - μεγιστοποιούμε την έκφραση που δίνει την *I(X;Y)*
  - ως προς τα $p(x_j)$
  - λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$0 \le p\left(x_j\right) \le 1 \qquad \sum_{j=0}^{J-1} p\left(x_j\right) = 1$$

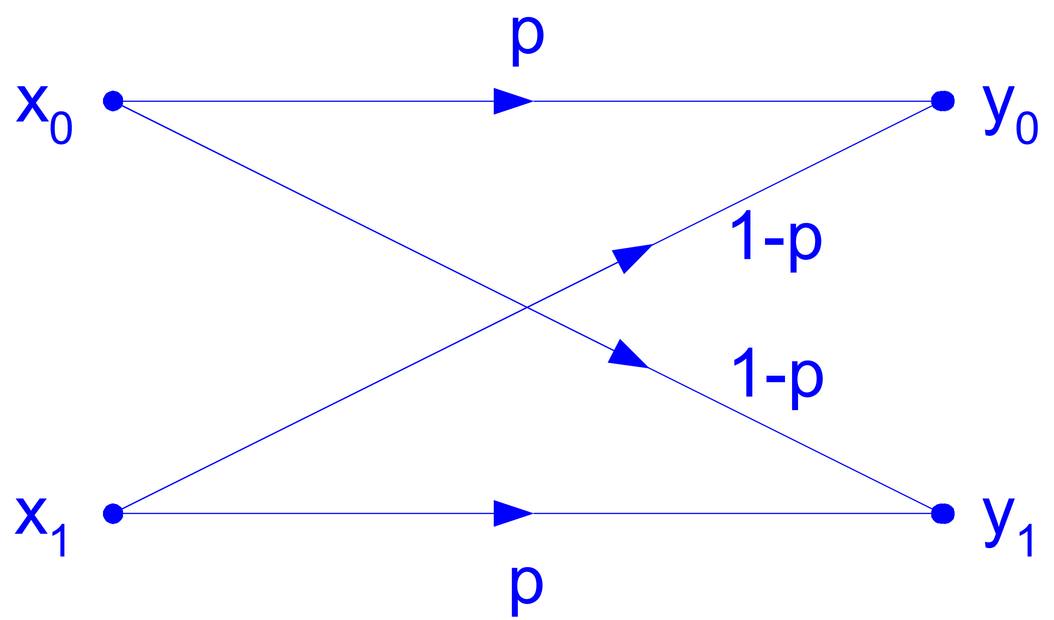
- Πρόκειται για ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης υπό συνθήκες *(constrained maximization)*

- Γενικά δεν είναι εύκολη η λύση του (ειδικά όταν εισάγονται τυχαίες παράμετροι)

- Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την απλή περίπτωση του δυαδικού συμμετρικού καναλιού

Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι

- Binary Symmetric Channel (BSC)
- Το απλούστερο και βασικότερο μοντέλο καναλιού



  - Δυαδικό: δυαδικά αλφάβητα εισόδου & εξόδου *{0,1}*
  - Συμμετρικό: το κανάλι αντιμετωπίζει ισότιμα τα *'0'* και *'1'*
  - Χωρίς μνήμη
  - πιθανότητες εμφάνισης $\{p(x_0), 1\text{-}p(x_o)\}$
  - πιθανότητα σωστής μετάδοσης *p*

Χωρητικότητα BSC

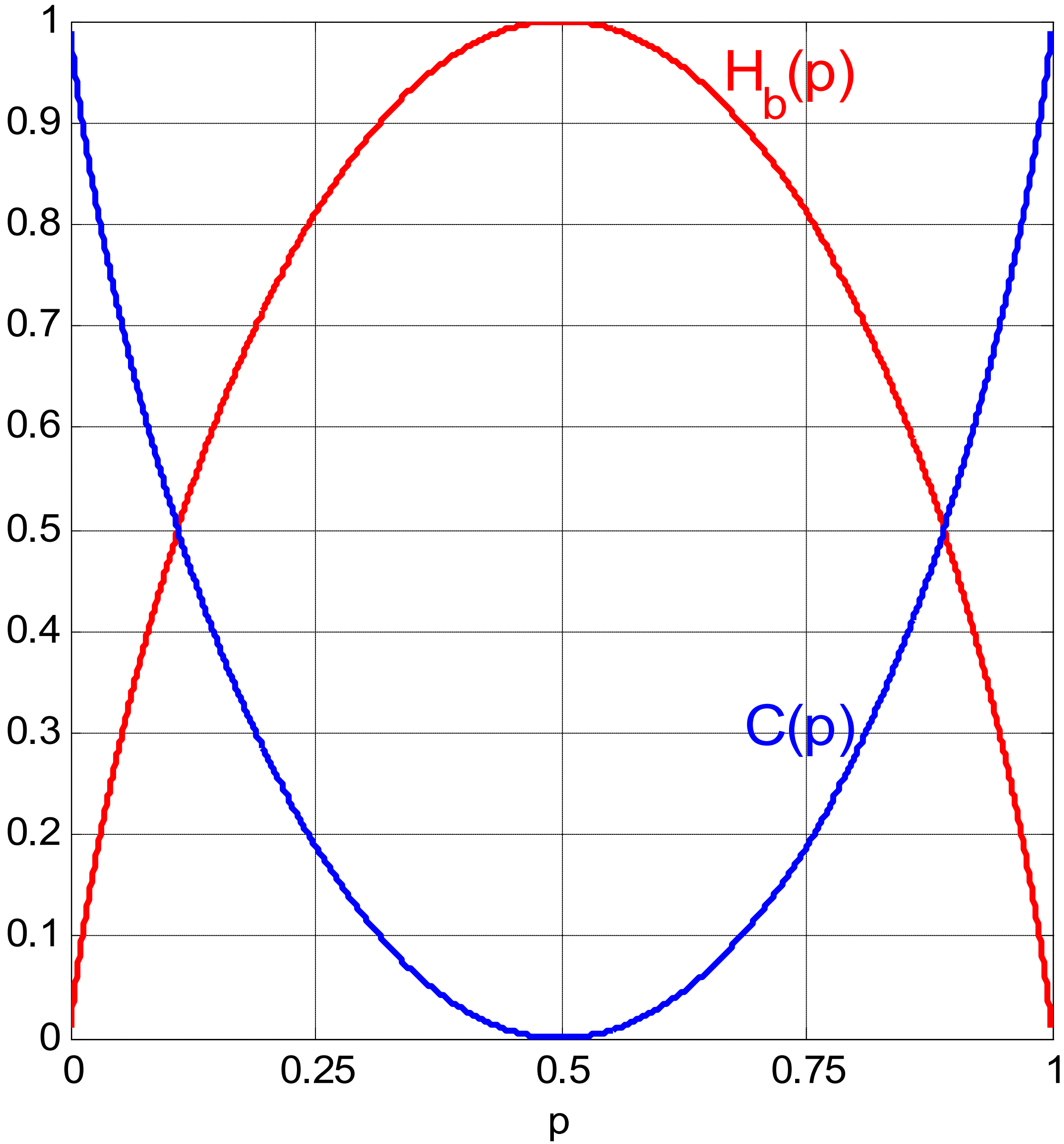
- Αποτέλεσμα 1: η αμοιβαία πληροφορία μεγιστοποιείται για ισοπίθανη είσοδο $p(x_0)=0.5$
  - δικαιολογείται διαισθητικά λόγω της δίκαιης συμπεριφοράς του καναλιού (συμμετρία)
  - θυμηθείτε ότι η ομοιόμορφη πηγή έχει μέγιστη εντροπία

- Αποτέλεσμα 2: η χωρητικότητα του BSC δίνεται ως

$$
\begin{aligned}
&C(p) = 1 - \left(-p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)\right) \\
&\Rightarrow C(p) = 1 - H_b(p), \\
&όπου\ H_b(p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)
\end{aligned}
$$

  - $H_b(p)$ η συνάρτηση δυαδικής εντροπίας

Χωρητικότητα BSC (2)



- Σχολιάστε:
  - *C(0)*
  - *C(0.5)*
  - συμμετρία

Θεώρημα Χωρητικότητας Καναλιού

- ή «Δεύτερο Θεώρημα του Shannon»
- Χρησιμότητα: ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός αξιόπιστης μετάδοσης μέσα από ένα ενθόρυβο κανάλι;

Θεώρημα: Έστω κανάλι με χωρητικότητα C, μέσα από το οποίο επιθυμούμε να μεταδώσουμε με ρυθμό R

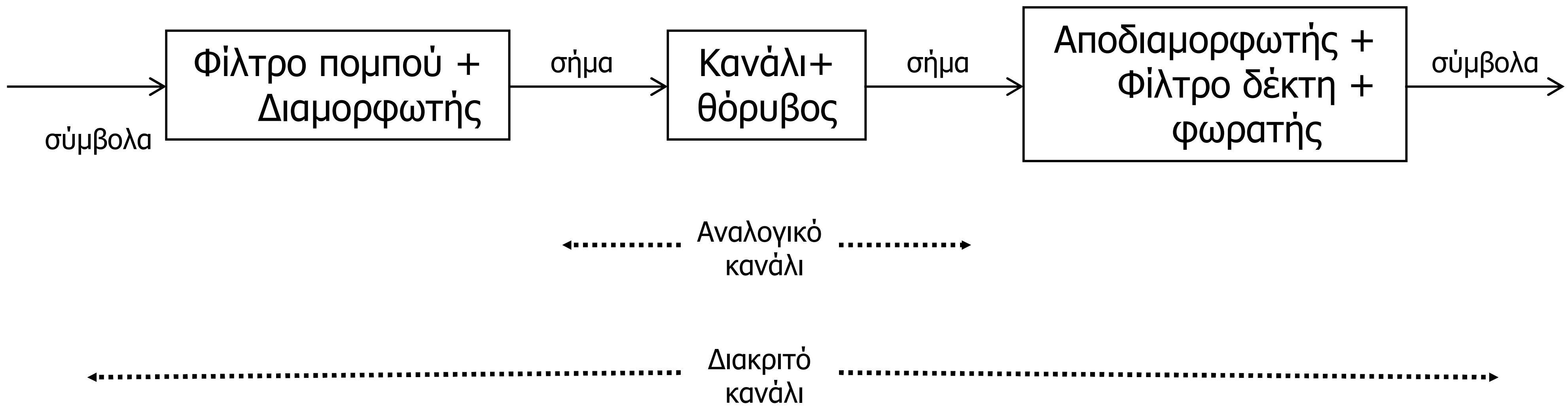
- Αν $R \leq C$, τότε για οσοδήποτε μικρό $\delta > 0$ υπάρχει κώδικας (κωδικοποιητής καναλιού) που να πετυχαίνει πιθανότητα σφάλματος μικρότερη του δ
- Αν $R > C$, τότε όσο πολύπλοκος κι αν είναι ο κωδικοποιητής καναλιού, η πιθανότητα σφάλματος θα είναι μακριά από το 0

- Για να προσεγγίσουμε το όριο του C, θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν πολύπλοκοι κώδικες
- Το θεώρημα δεν προτείνει μεθοδολογία κατασκευής κωδικοποιητή καναλιού

Αναλογικό Κανάλι

- Τα παραπάνω ισχύουν για την περίπτωση καναλιών
  - διακριτού χρόνου
  - και διακριτού αλφαβήτου

- Ποιο είναι όμως σε ένα πραγματικό σύστημα το διακριτό κανάλι;



- Ας δούμε τι γίνεται στην περίπτωση του αναλογικού καναλιού

Αναλογικό Κανάλι

- Το αναλογικό τμήμα του όλου καναλιού
- Το συνολικό κανάλι είδαμε ότι περιγράφεται ως διακριτό κανάλι
- Τα προηγούμενα αποτελέσματα γενικεύονται στα κανάλια συνεχούς αλφαβήτου
- Επομένως αρκεί να μελετήσουμε την περίπτωση των καναλιών συνεχούς αλφαβήτου
- Άλλωστε ένα αναλογικό κανάλι μπορεί να δειγματοληπτηθεί κατάλληλα (η είσοδος και η έξοδός του),
  - και να μετατραπεί σε διακριτού χρόνου

Διαφορική Εντροπία (ΟΧΙ)

- Έστω πηγή διακριτού χρόνου αλλά συνεχούς αλφάβητου

- Έξοδος πηγής: πραγματικός αριθμός → άπειρα bits για αναπαράσταση

- Δεν μπορεί να οριστεί η εντροπία

- Ορίζεται η λεγόμενη διαφορική εντροπία ως

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log_2 f_X(x)\, dx$$

  - $f_X(x)$: η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X
  - Η $h(x)$ δεν έχει το διαισθητικό νόημα της εντροπίας
  - μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές

Διαφορική Εντροπία Ομοιόμορφης (ΟΧΙ)

- *X* ομοιόμορφα κατανεμημένο στο συνεχές διάστημα *[0,a]*

$$f_X(x) = \frac{1}{a}, \quad 0 \le x \le a$$

- Διαφορική Εντροπία:

$$h(X) = -\int_0^a \frac{1}{a} \log_2 \frac{1}{a} dx = \log_2 a$$

- Για *a<1*, μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές

Διαφορική Εντροπία Gaussian (ΟΧΙ)

- X Gaussian κατανεμημένη $N(0,\sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

- Διαφορική Εντροπία:

$$h(X) = \frac{1}{2}\ln\left(2\pi e\sigma^2\right) \text{ nats} = \frac{1}{2}\frac{\log_2\left(2\pi e\sigma^2\right)}{\log_2 e} \text{ bits}$$

- Παρατήρηση:
  - Όπως η ομοιόμορφη κατανομή μεγιστοποιεί την εντροπία για τις πηγές διακριτού αλφαβήτου
  - Η Gaussian κατανομή μεγιστοποιεί τη διαφορική εντροπία για τις πηγές συνεχούς αλφαβήτου

Κανάλια με Συνεχές Αλφάβητο (ΟΧΙ)

- Στις πηγές συνεχούς αλφαβήτου ορίστηκε η διαφορική εντροπία
- Αντίστοιχα για κανάλια συνεχούς αλφαβήτου ορίζονται:
- Από Κοινού Διαφορική Εντροπία

$$h(X,Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\log_2 f_{X,Y}(x,y)\,dxdy$$

- Υπό Συνθήκη Διαφορική Εντροπία

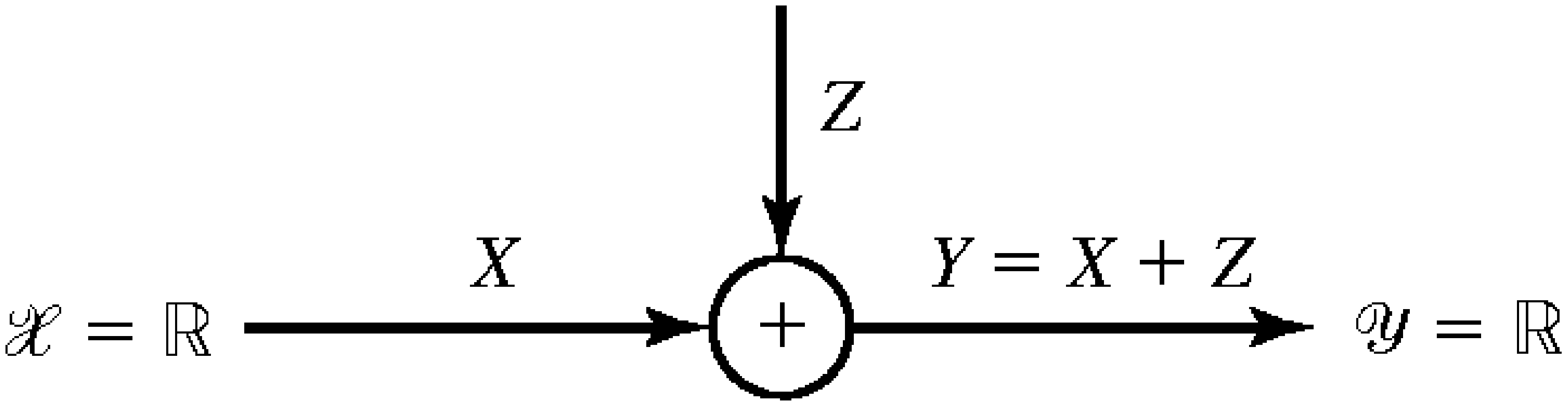
$$h(X|Y) = h(X,Y) - h(Y)$$

- Αμοιβαία Πληροφορία

$$I(X;Y) = h(X) - h(X|Y)$$

Κανάλι AWGN

- Από τα κανάλια συνεχούς αλφαβήτου, το απλούστερο και βασικότερο είναι το κανάλι AWGN

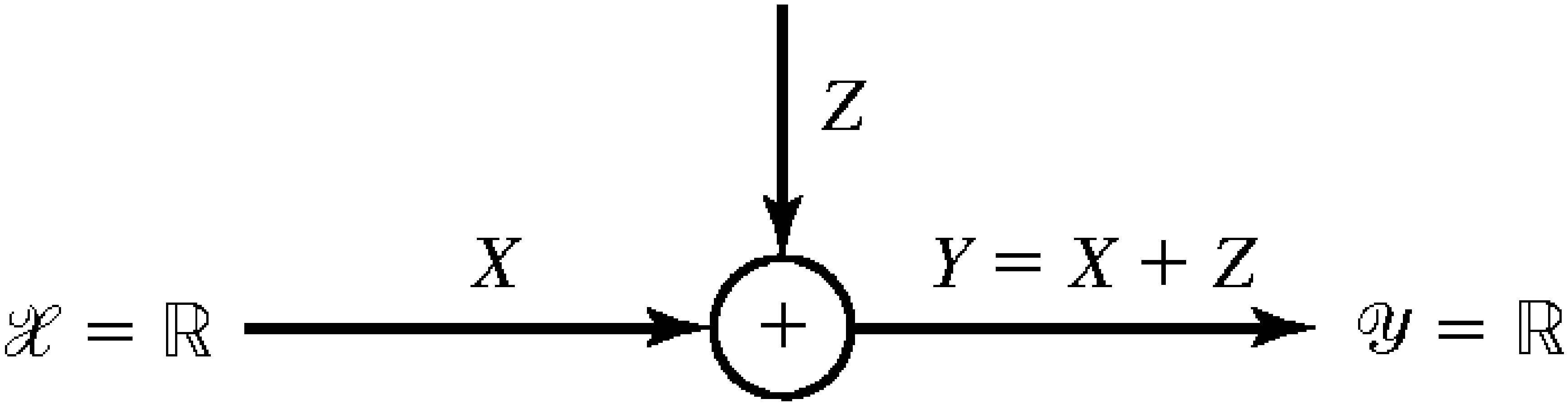


- Κανάλι Προσθετικού Λευκού Gaussian Θορύβου

  (Additive White Gaussian Noise (AWGN) Channel)

-- Θεωρούμε: Discrete-Time Memoryless Gaussian Channel

Μοντέλο AWGN



1. Τα αλφάβητα εισόδου *X* και εξόδου *Y* είναι συνεχή
2. Στην είσοδο τίθεται περιορισμός μέσης ισχύος

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le P}$$

   – όπου *n* είναι το μέγεθος του μπλοκ κωδικοποίησης
3. Προστίθεται θόρυβος που είναι:
   – λευκός
   – και ακολουθεί Gaussian κατανομή $\mathcal{N}(0,N)$

Χωρητικότητα Καναλιού AWGN

Θεώρημα: Η χωρητικότητα ενός καναλιού AWGN με εύρος ζώνης *W* είναι

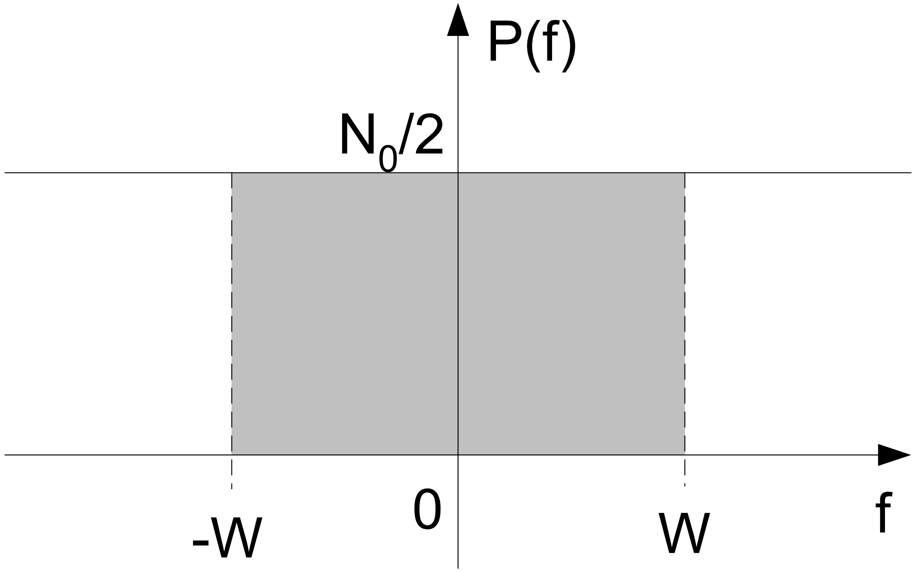
$$C = W\log_2\left(1+\frac{P}{N}\right) \quad \text{(bits/sec)}$$

Πόρισμα: Η αμοιβαία πληροφορία ενός καναλιού AWGN μεγιστοποιείται όταν η είσοδος είναι επίσης Gaussian, $X \sim N(0,P)$

- Το παραπάνω θεώρημα είναι υποπερίπτωση του θεωρήματος χωρητικότητας του Shannon
- Είναι γνωστό ως Θεώρημα Shannon-Hartley
- Είναι το άνω όριο ρυθμού μετάδοσης για οποιοδήποτε τηλεπικοινωνιακό κανάλι. Δεν είναι εύκολο να επιτευχθεί.

Shannon-Hartley + Ισχύς Θορύβου

- Αντί της μέσης ισχύος θορύβου *N*, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η πυκνότητα φάσματος ισχύος, $N_0/2$



- Επειδή το εύρος ζώνης κυμαίνεται και σε αρνητικές τιμές,

$$N = \left(\frac{N_0}{2}\right)(2W) = N_0 W$$

- Άλλη διατύπωση του Shannon-Hartley $$C = W \log_2\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right)$$

Κωδικοποιητής Καναλιού

- Είδαμε ότι κατά τη μετάδοση πληροφορίας,
  - ο ρυθμός μετάδοσης δεν εξαρτάται μόνο από το ίδιο το κανάλι (χωρητικότητα καναλιού),
  - αλλά και από την πηγή που μεταδίδεται

- Για ένα συγκεκριμένο κανάλι, μπορούμε να βρούμε εκείνη την κατανομή εισόδου που να μεγιστοποιεί την αμοιβαία πληροφορία

- Ωστόσο, το σήμα που θέλουμε να μεταδώσουμε έχει προκαθορισμένα στατιστικά χαρακτηριστικά

- Ο κωδικοποιητής καναλιού αναλαμβάνει να μετατρέψει το σήμα προς μετάδοση σε μια τυχαία διαδικασία με στατιστικά «φιλικότερα» και προσαρμοσμένα στο συγκεκριμένο κανάλι

Συνέπειες του Θεωρήματος S-H

1. Μας δίνει ένα ανώτατο όριο αξιόπιστης μετάδοσης δεδομένων μέσα από AWGN κανάλι.
2. Προσφέρει τη δυνατότητα για ανταλλαγή (trade-off) σήματος-προς-θόρυβο (SNR) με εύρος ζώνης
3. «Συμπίεση» εύρους ζώνης μεταδιδόμενου σήματος

Συνέπειες του Θεωρήματος S-H

Παράδειγμα για τη 2η συνέπεια:

Έστω: R=10000bits/sec, W=3000Hz

Χρειαζόμαστε κανάλι με C >= R .

Θεώρημα S-H: C= $Wlog_2(1+\frac{P}{N})$

Θέτοντας C=R μπορούμε να βρούμε από S-H τον απαιτούμενο λόγο P/N

$$\frac{P}{N} = 2^{(\frac{C}{W})} - 1 = 2^{3,333} - 1 \approx 9$$

Για το ίδιο πρόβλημα, εάν W=10000Hz τότε $\frac{P}{N} = 1$

Συνέπειες του Θεωρήματος S-H

Παράδειγμα για τη 3η συνέπεια:

Έστω αναλογικό σήμα με εύρος ζώνης 10KHz και κανάλι με εύρος ζώνης 5KHz και θόρυβο AWGN με μέση τιμή 0 και διασπορά $N_0/2 = 0{,}0005$. Ποιο είναι το rate και πώς θα το μεταδώσουμε;

Rate: Έστω δειγματοληψία με 20Ksampes/sec και κβάντιση με 8bits/sample → R_b = 160Kbits/sec

Θεώρημα S-H: C$= W log_2\left(1+\frac{P}{N}\right)$ *όπου* $\mathrm{N} = \mathrm{N}_0 W$ = 0,001*5000=5Watt

Θέτοντας C=R_b και W=5000Hz μπορούμε να βρούμε από S-H την απαιτούμενη ισχύ P

P$= \mathrm{N}(2^{\left(\frac{R_b}{W}\right)} - 1) = 5 * (2^{32} - 1) \approx 2{,}15 * 10^{10} Watt\ \ \kappa\alpha\iota\ \left(\frac{\mathrm{P}}{N}\right)_{dB}$ ≈96dB

Όριο Shannon (1)

- Ποια είναι η χωρητικότητα ενός αθόρυβου καναλιού;
  Απάντηση: Άπειρη, βλ. τύπο Shannon-Hartley →

$$C = W\log_2\left(1+\frac{P}{N_0 W}\right)$$

- Ποια είναι η χωρητικότητα ενός ενθόρυβου καναλιού με άπειρο εύρος ζώνης ;

  Απάντηση: Όταν υπάρχει θόρυβος και η ισχύς του μεταδιδόμενου σήματος είναι σταθερή τότε η χωρητικότητα του καναλιού τείνει σε ένα πεπερασμένο ανώτατο όριο καθώς το εύρος ζώνης τείνει στο ∞ .

$$C = W\log_2\left(1+\frac{P}{N_0 W}\right) = \left(\frac{P}{N_0}\right)\left(\frac{N_0 W}{P}\right)\log_2\left(1+\frac{P}{N_0 W}\right) = \left(\frac{P}{N_0}\right)\log_2\left(1+\frac{P}{N_0 W}\right)^{\left(\frac{N_0 W}{P}\right)}$$

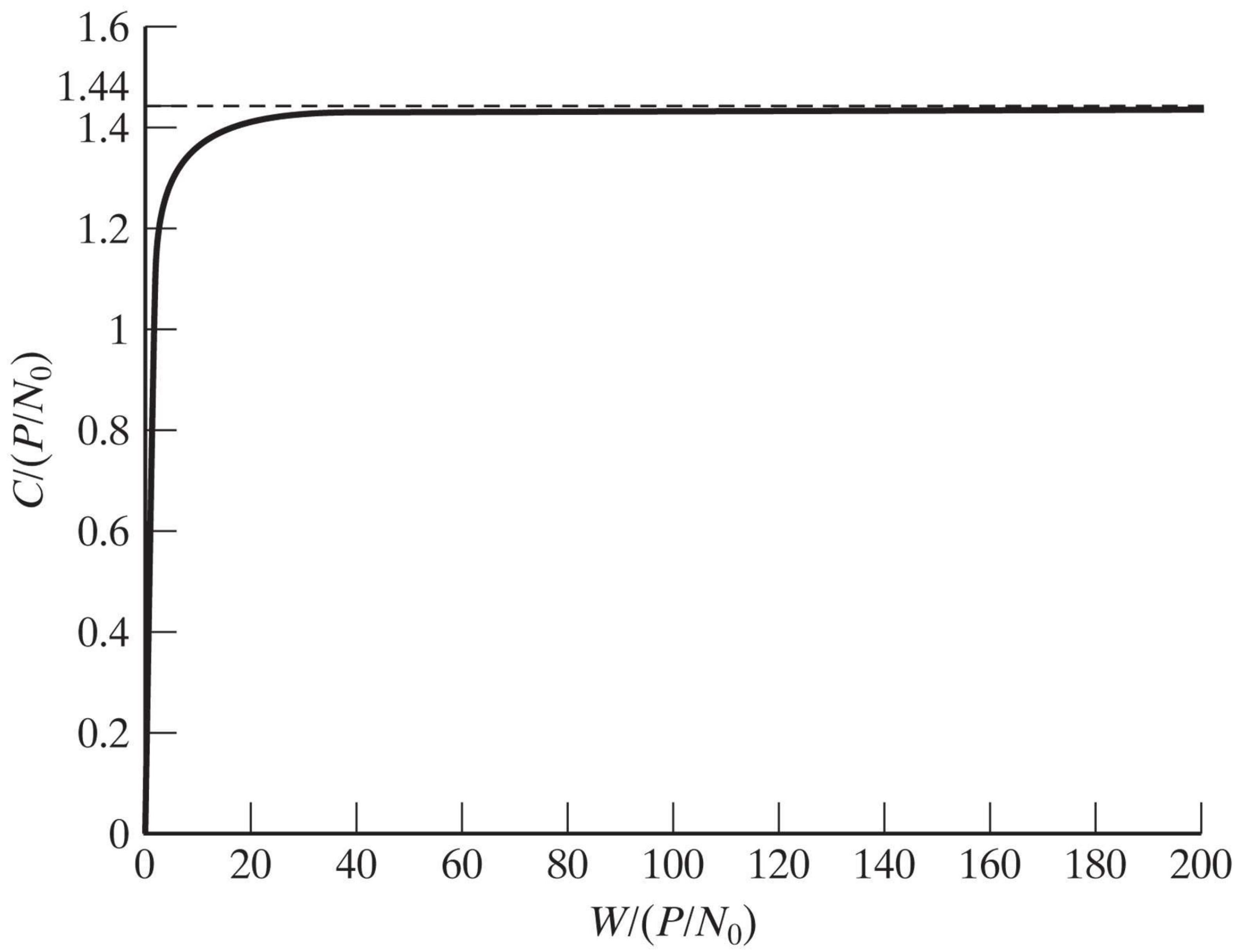
Επειδή όμως

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e$$

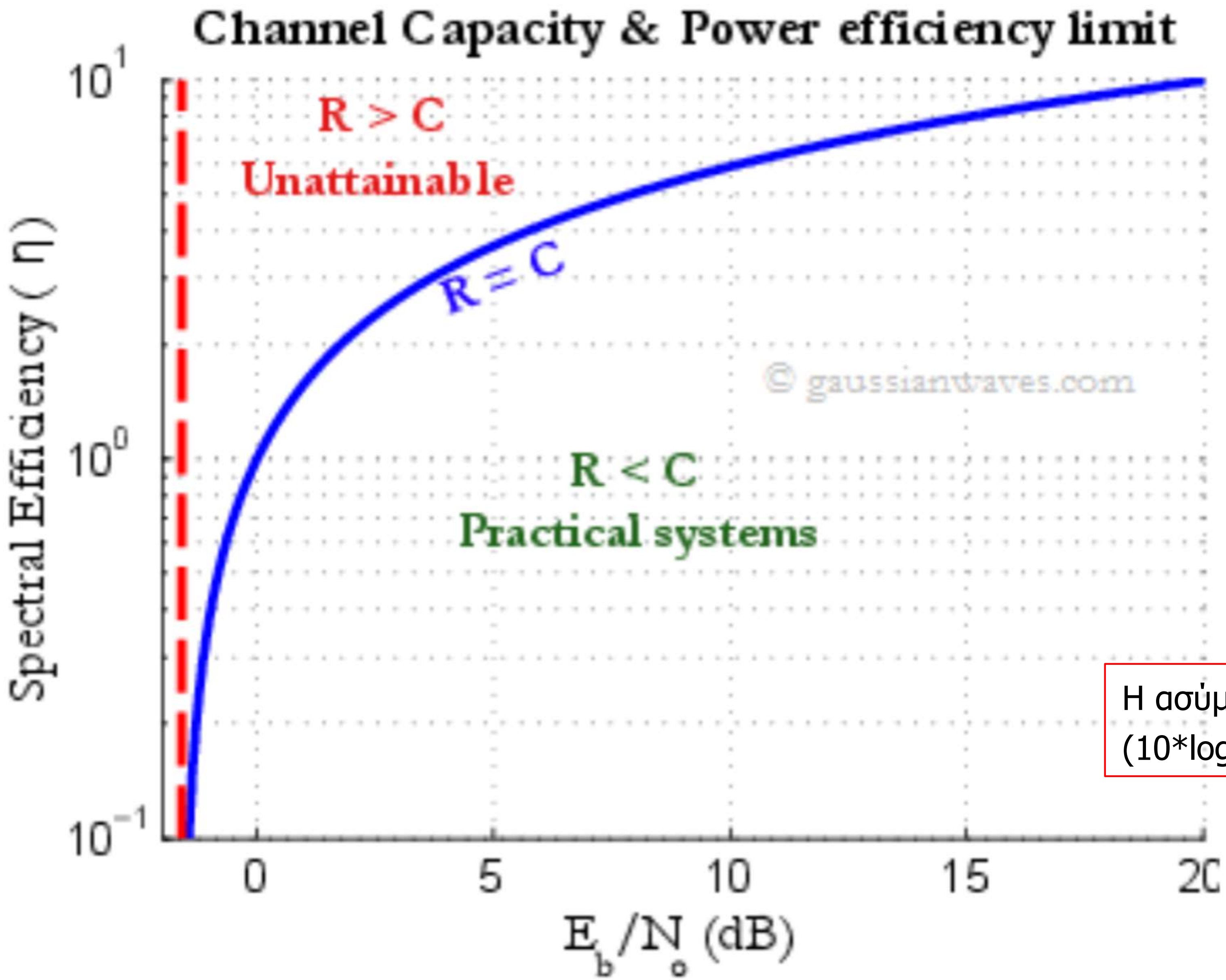
καταλήγουμε ότι:

$$\lim_{W\to\infty} C = \left(\frac{P}{N_0}\right)\log_2 e = 1.44\left(\frac{P}{N_0}\right)$$

Όριο Shannon (2)



Φασματική αποδοτικότητα



Spectral efficiency:
η= C/W (in bits/seconds/Hz)

E_b = P

Η ασύμπτωτη είναι στο -1.59dB (10*log10(1/1.44)=-1.59)