

Στοχαστικές Διαδικασίες

(έμφαση στις σ.δ. διακριτού χρόνου)

Εισαγωγικές Έννοιες
για το μάθημα “Ψηφιακές Τηλεπικοινωνίες”

Να δοθεί έμφαση στις διαφάνειες με κίτρινο χρώμα στον τίτλο

- ❑ Θεωρούμε το **πείραμα** της ρίψης ενός νομίσματος.
- ❑ Το πείραμα έχει δύο **πιθανές εκβάσεις** (αποτελέσματα):

$$K = \text{"κορόνα"} \quad \Gamma = \text{"γράμματα"}$$

- ❑ Θεωρούμε ότι οι δύο εκβάσεις του πειράματος είναι **ισοπίθανες**, δηλαδή το νόμισμα μπορεί να δώσει K ή Γ με την ίδια πιθανότητα.
- ❑ Έστω ότι καταμετρούμε τα **συνεχή** αποτελέσματα ρίψης του νομίσματος. Για παράδειγμα, ρίχνουμε το νόμισμα N φορές, και έστω ότι μετράμε N_K φορές κορόνα και N_Γ φορές γράμματα.



Για μεγάλο αριθμό N αναμένουμε: $\frac{N_K}{N} \approx 0.5$ και $\frac{N_\Gamma}{N} \approx 0.5$

Πιθανότητα εμφάνισης K ή Γ : $\Pr\{K\} = 0.5$ και $\Pr\{\Gamma\} = 0.5$

- Ονομάζουμε το σύνολο όλων των πειραματικών αποτελεσμάτων ως **δειγματικό χώρο** (sample space) και συμβολίζουμε Ω :

$$\Omega = \{K, \Gamma\} \quad \text{και} \quad \Pr\{\Omega\} = 1$$

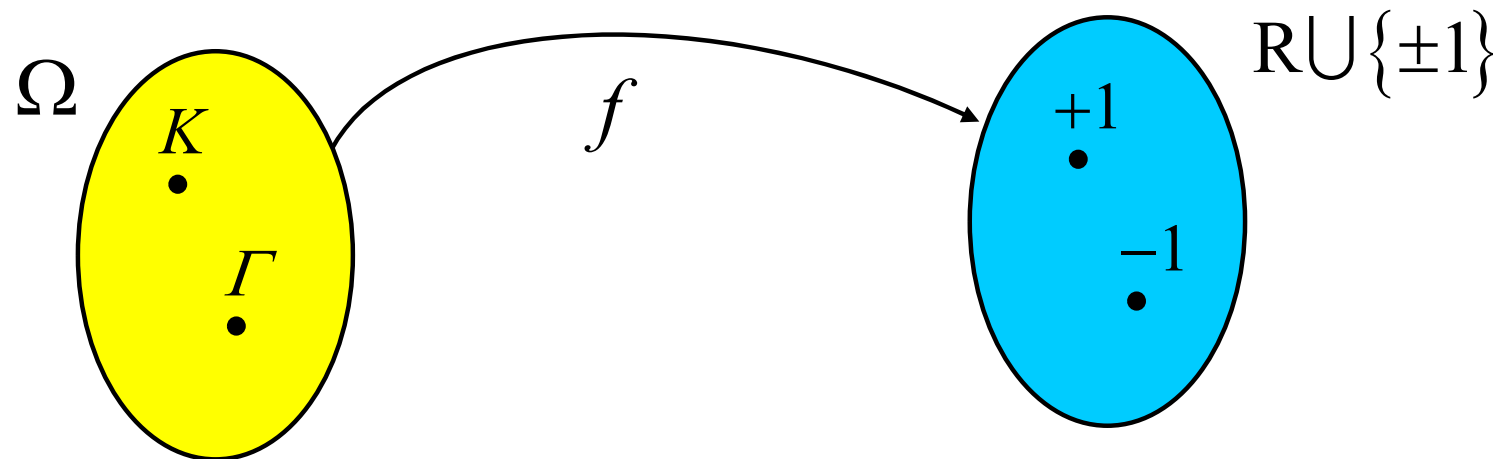
- Κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου ονομάζεται **ενδεχόμενο** (event) και το συμβολίζουμε ως ω . Ένα υποσύνολο που περιλαμβάνει μόνο ένα στοιχείο ονομάζεται **στοιχειώδες ενδεχόμενο** (elementary event). Ο δειγματικός χώρος καλείται και **βέβαιο ενδεχόμενο**.

$$\omega_1 = \{K\} \quad \text{και} \quad \omega_2 = \{\Gamma\}$$

- Εάν ένας δειγματικός χώρος αποτελείται από n στοιχεία, τότε το **πλήθος** των υποσυνόλων είναι 2^n :

$$\{\emptyset\}, \{K\}, \{\Gamma\}, \{K, \Gamma\}$$

- Στο προηγούμενο παράδειγμα, ορίζουμε την **τυχαία μεταβλητή** x ως εξής: όταν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι K , θέτουμε $x = +1$, ενώ όταν είναι Γ , θέτουμε $x = -1$.



- Δηλαδή, ορίσαμε μια αντιστοίχιση (συνάρτηση) των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω και ενός υποσυνόλου των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} .

$$x = f(\omega) = \begin{cases} +1 & \text{αν } \omega = \{K\} \\ -1 & \text{αν } \omega = \{\Gamma\} \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{aligned} \Pr\{x = +1\} &= 0.5 \\ \Pr\{x = -1\} &= 0.5 \end{aligned}$$

επιπλέον $\Pr\{x = \alpha\} = 0$, όπου $\alpha \neq \pm 1$, και $\Pr\{x = \pm 1\} = 1$

- Άρα, για την τυχαία μεταβλητή x , έχουμε ως **πεδίο ορισμού** ένα δειγματικό χώρο, π.χ. $\Omega = \{K, \Gamma\}$, και ως **πεδίο τιμών** ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.
- Εάν ο δειγματικός χώρος αποτελείται από **διακριτά** ενδεχόμενα $\omega_2 = \{x = -1\}$ και $\omega_1 = \{x = +1\}$, η τυχαία μεταβλητή x ονομάζεται **διακριτή τυχαία μεταβλητή**.
- Επιπλέον, παρατηρούμε ότι ο **χαρακτηρισμός** μιας τυχαίας μεταβλητής δίνεται **στατιστικά** μέσω της ανάθεσης πιθανοτήτων (**νόμος πιθανότητας**) στις τιμές της μεταβλητής. Δηλαδή, ο νόμος πιθανοτήτων είναι ένας κανόνας, ο οποίος αντιστοιχίζει έναν αριθμό (πιθανότητα) σε κάθε συμβάν (ενδεχόμενο).
- Ένας νόμος πιθανότητας πρέπει να ικανοποιεί τα παρακάτω **αξιώματα**:
 - $\Pr\{A_i\} \geq 0 \quad \forall A_i \in \Omega$
 - $\Pr\{\Omega\} = 1$
 - $\Pr\{A_1 \cup A_2\} = \Pr\{A_1\} + \Pr\{A_2\} \quad \forall A_1, A_2 : A_1 \cap A_2 = \emptyset$

- Συνήθως, δεν ενδιαφερόμαστε μόνο να χαρακτηρίσουμε στατιστικά κάποια συμβάντα, αλλά κυρίως να περιγράψουμε με έναν **πιθανοτικό τρόπο** (συνάρτηση) μια τυχαία μεταβλητή. Δηλαδή ενδιαφερόμαστε για έναν **πιθανοτικό νόμο**, ο οποίος εφαρμόζεται κατευθείαν στην τυχαία μεταβλητή και όχι στα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου.
- Ορίζουμε τη **συνάρτηση κατανομής πιθανότητας** (probability distribution function):

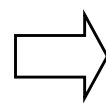
$$F_x(a) = \Pr\{x \leq a\}$$

Για το παράδειγμα ρίψης νομίσματος:

$$F_x(a) = \begin{cases} 0 & \text{αν } a < -1 \\ 0.5 & \text{αν } -1 \leq a < +1 \\ 1 & \text{αν } +1 \leq a \end{cases}$$

- Ορίζουμε τη **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (probability density function):

$$f_x(a) = \frac{d}{da} F_x(a)$$



$$\int_{x_1}^{x_2} f_x(a) da = \Pr\{x_1 < x \leq x_2\}$$

- Ονομάζουμε **μέση** (mean) ή **αναμενόμενη** (expected) **τιμή** μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής x που λαμβάνει μια τιμή a_k με πιθανότητα $\Pr\{x = a_k\}$ ως:

$$E\{x\} = m_x = \sum_k a_k \Pr\{x = a_k\}$$

Για συνεχείς τ.μ.

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} a f_x(a) da$$

Η μέση τιμή μιας συνάρτησης $g(x)$ της τυχαίας μεταβλητής x είναι:

$$E\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(a) f_x(a) da$$

- Ονομάζουμε **μέση τετραγωνική τιμή** (mean square value):

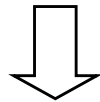
$$E\{x^2\}$$

- Ονομάζουμε **διασπορά** (variance) της τυχαίας μεταβλητής x , ως τη μέση τετραγωνική τιμή της τυχαίας μεταβλητής $y = x - m_x$:

$$\text{var}(x) = \sigma_x^2 = E\{(x - m_x)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (a - m_x)^2 f_x(a) da$$

- Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς ονομάζεται **τυπική απόκλιση** (standard deviation): σ_x
- Για τον τελεστή $E\{\cdot\}$, ισχύει η ιδιότητα της **γραμμικότητας**:

$$E\{ax + by\} = aE\{x\} + bE\{y\}$$



$$\begin{aligned}\text{var}(x) &= E\{(x - m_x)^2\} = E\{x^2 + m_x^2 - 2xm_x\} \\ &= E\{x^2\} + E\{m_x^2\} - E\{2xm_x\} \\ &= E\{x^2\} + m_x^2 - 2E\{x\}m_x \\ &= E\{x^2\} - m_x^2\end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
μέση τετραγωνική τιμή

- Όταν εμπλέκονται περισσότερες από μία μεταβλητές, τότε είναι απαραίτητο να λάβουμε υπόψη τις **στατιστικές εξαρτήσεις** που υπάρχουν μεταξύ τους.

Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές x και y

- Ορίζουμε την **από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας** (joint probability distribution function):

$$F_{x,y}(a_x, a_y) = \Pr \{ x \leq a_x, y \leq a_y \}$$

- Ορίζουμε την **από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (joint probability density function):

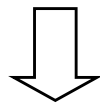
$$f_{x,y}(a_x, a_y) = \frac{\partial^2}{\partial a_x \partial a_y} F_{x,y}(a_x, a_y)$$

- Ορίζουμε τη **συσχέτιση** (correlation) δύο τυχαίων μεταβλητών x και y :

$$r_{xy} = E\{xy^*\}$$

- Ορίζουμε τη **συνδιασπορά** (covariance) δύο τυχαίων μεταβλητών x και y :

$$c_{xy} = \text{COV}(x, y) = E\{(x - m_x)(y - m_y)^*\}$$



$$\begin{aligned}\text{COV}(x, y) &= E\{(x - m_x)(y^* - m_y^*)\} \\ &= E\{xy^* - xm_y^* - y^*m_x + m_xm_y^*\} \\ &= E\{xy^*\} - E\{x\}m_y^* - E\{y^*\}m_x + m_xm_y^* \\ &= r_{xy} - m_xm_y^*\end{aligned}$$

Αν m_x ή m_y
είναι μηδέν,
τότε η
συνδιασπορά
ισούται με τη
συσχέτιση.

- Ορίζουμε το **συντελεστή συσχέτισης** (correlation coefficient) δύο τυχαίων μεταβλητών x και y :

$$\rho_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad \Rightarrow \quad |\rho_{xy}| \leq 1$$

- Γενικά ορίζουμε τις ποσότητες:

Τάξη (order): $k + r$

Ροπές: $E\{x^k\}$

Από κοινού ροπές: $E\{x^k y^r\}$

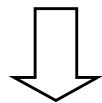
Κεντρικές ροπές: $E\{(x - m_x)^k\}$

Κεντρικές ροπές: $E\{(x - m_x)^k (y - m_y)^r\}$

- Άρα, η μέση τιμή $E\{x\}$ είναι **ροπή πρώτης τάξης**, η μέση τετραγωνική τιμή $E\{x^2\}$ είναι **ροπή δεύτερης τάξης**, η διασπορά $E\{(x - m_x)^2\}$ είναι **κεντρική ροπή δεύτερης τάξης**, η συνδιασπορά $E\{(x - m_x)(y - m_y)^*\}$ είναι **από κοινού κεντρική ροπή δεύτερης τάξης**.

- Όταν η τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής x δεν εξαρτάται από την τιμή μιας άλλης τυχαίας μεταβλητής y , τότε οι τυχαίες μεταβλητές x και y ονομάζονται **στατιστικά ανεξάρτητες** (statistically independent).
- Δύο τυχαίες μεταβλητές x και y είναι **στατιστικά ανεξάρτητες** αν η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι διαχωρίσιμη ως εξής:

$$f_{x,y}(a,b) = f_x(a)f_y(b)$$



$$E\{xy^*\} = r_{xy} = E\{x\}E\{y^*\}$$

$$\text{cov}(x, y) = r_{xy} - E\{x\}E\{y^*\} = 0$$

$$\rho_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = 0$$

- Δύο τυχαίες μεταβλητές x και y που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση ονομάζονται **ασυσχέτιστες** (uncorrelated).

- Δύο τυχαίες μεταβλητές που είναι στατιστικά ανεξάρτητες είναι ασυσχέτιστες. Το αντίστροφο **γενικά δεν ισχύει**.
- Για τις ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές ισχύει η ιδιότητα:

$$\text{var}(x + y) = \text{var}(x) + \text{var}(y)$$

- Δύο τυχαίες μεταβλητές x και y ονομάζονται **ορθογώνιες** (orthogonal) αν έχουν μηδενική συσχέτιση:

$$r_{xy} = 0$$

- Δύο τυχαίες μεταβλητές που είναι ορθογώνιες δεν είναι απαραίτητα ασυσχέτιστες.
- Δύο ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές, όπου η μία τουλάχιστον έχει μηδενική μέση τιμή είναι και ορθογώνιες.

- Μια τυχαία μεταβλητή ονομάζεται **Gaussian** ή **κανονική** (normal) τυχαία μεταβλητή όταν η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** είναι:

$$f_x(a) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Η σ.π.π. ορίζεται πλήρως αν γνωρίζουμε τις τιμές m_x , σ_x^2

όπου m_x και σ_x^2 είναι η μέση τιμή και η διασπορά αντίστοιχα.

- Δύο τυχαίες μεταβλητές ονομάζονται **από κοινού Gaussian** τυχαίες μεταβλητές όταν η **από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** είναι:

$$f_{x,y}(a,b) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)} \left[\frac{(a-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho_{xy} \frac{(a-m_x)(b-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(b-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right]}$$

όπου ρ_{xy} είναι ο συντελεστής συσχέτισης.

- **Ιδιότητα:** Αν x και y είναι από κοινού Gaussian τυχαίες μεταβλητές, τότε για κάθε σταθερά a και b η τυχαία μεταβλητή $z = ax + by$ είναι Gaussian με μέση τιμή και διασπορά:

$$m_z = am_x + bm_y$$

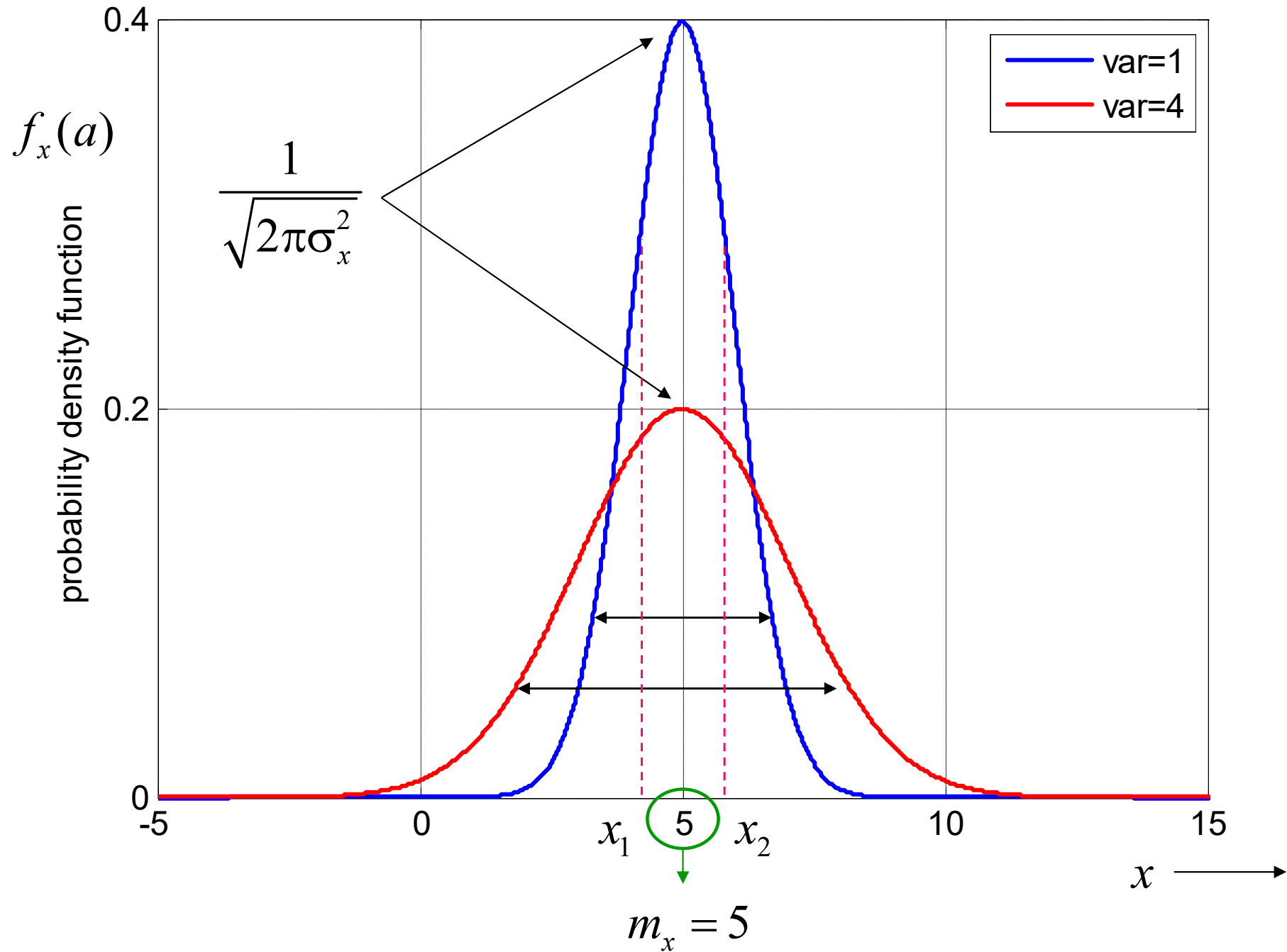
$$\sigma_z^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\sigma_x\sigma_y\rho_{xy}$$

$\text{cov}(x, y)$

- **Ιδιότητα:** Αν δύο από κοινού Gaussian τυχαίες μεταβλητές x και y είναι ασυσχέτιστες, δηλαδή $\rho_{xy} = 0$, τότε είναι και στατιστικά ανεξάρτητες, δηλαδή $f_{xy}(a, b) = f_x(a)f_y(b)$.

- **Ιδιότητα:** Αν x και y είναι από κοινού Gaussian τυχαίες μεταβλητές, τότε ο βέλτιστος εκτιμητής για το y , δηλαδή $\hat{y} = g(x)$, ο οποίος ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα $\xi = E\{(y - \hat{y})^2\}$ είναι ένας γραμμικός εκτιμητής: $\hat{y} = ax + b$

Τυχαίες Μεταβλητές: Gaussian



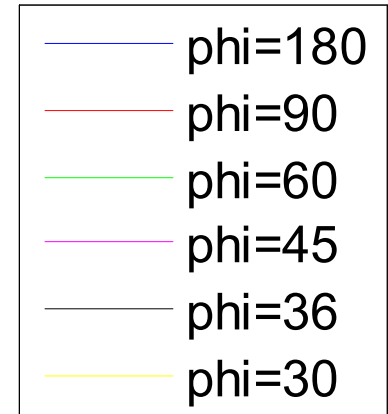
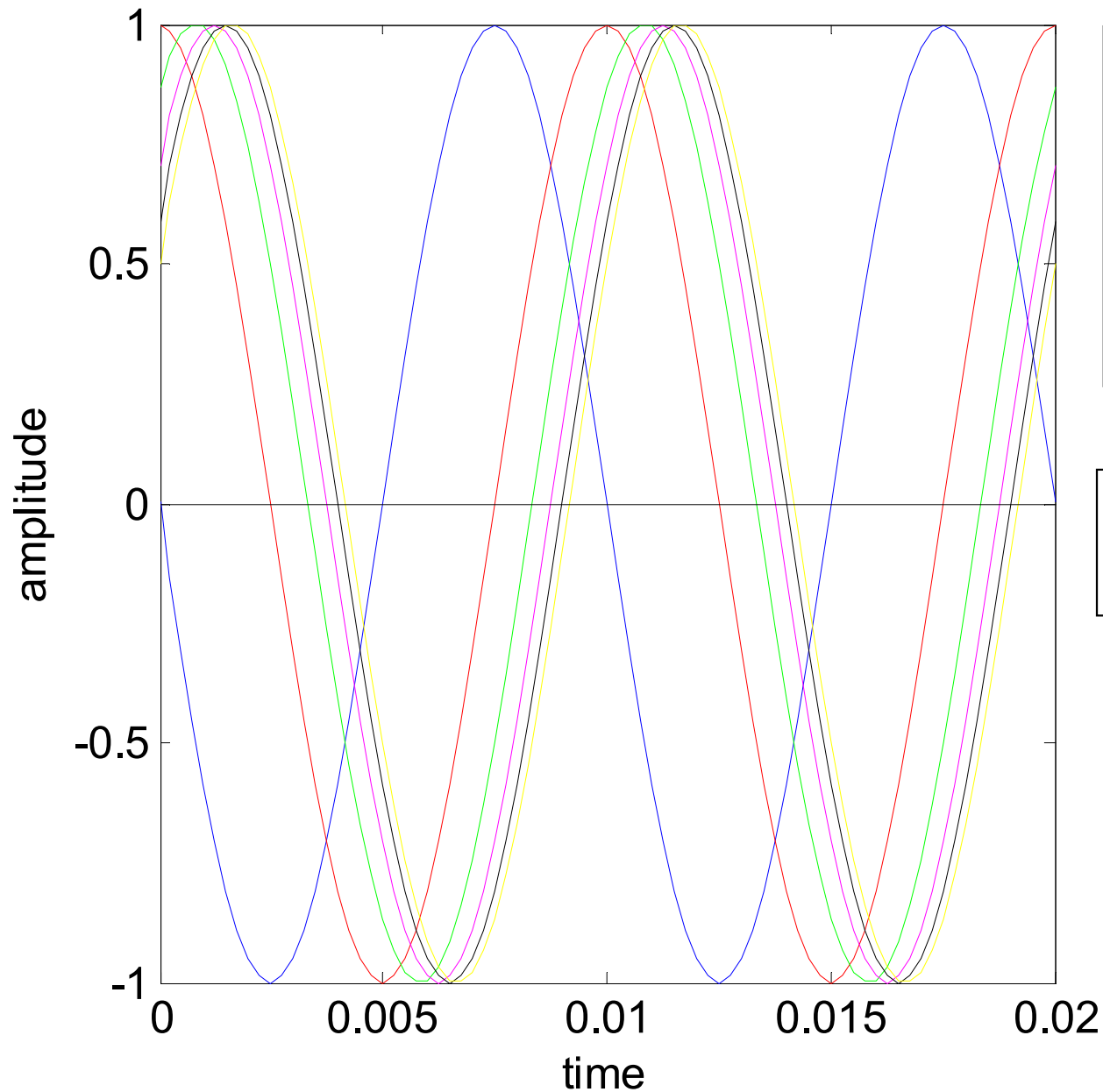
- Ορίζουμε ως **τυχαία διαδικασία** (random process) ή **στοχαστική διαδικασία** (stochastic process) ή **τυχαίο σήμα** (random signal) μια συλλογή από σήματα, δηλαδή συναρτήσεις στο χρόνο, τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικά αποτελέσματα ενός πειράματος.
- Δηλαδή, δοθέντος ενός δειγματικού χώρου $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^M$, σε κάθε συμβάν ω_i αντιστοιχεί ένα σήμα $x(t; \omega_i)$ το οποίο έχει πιθανότητα $\Pr\{\omega_i\}$.

Παράδειγμα :

Θεωρούμε το πείραμα ρίψης ενός ζαριού. Η έκβαση του πειράματος είναι ο αριθμός του ζαριού, συνεπώς $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Θεωρούμε όλα τα αποτελέσματα ισοπίθανα, δηλαδή $\Pr\{\omega = i\} = 1/6$ για κάθε $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Ορίζουμε την τυχαία διαδικασία:

$$x(t; \omega_i) = A \sin(2\pi f_c t + \phi_i) \quad \text{όπου} \quad \phi_i = \frac{\pi}{\omega_i} \rightarrow \Pr\{\phi_i = \frac{\pi}{\omega_i}\} = \frac{1}{6} \quad \forall i$$

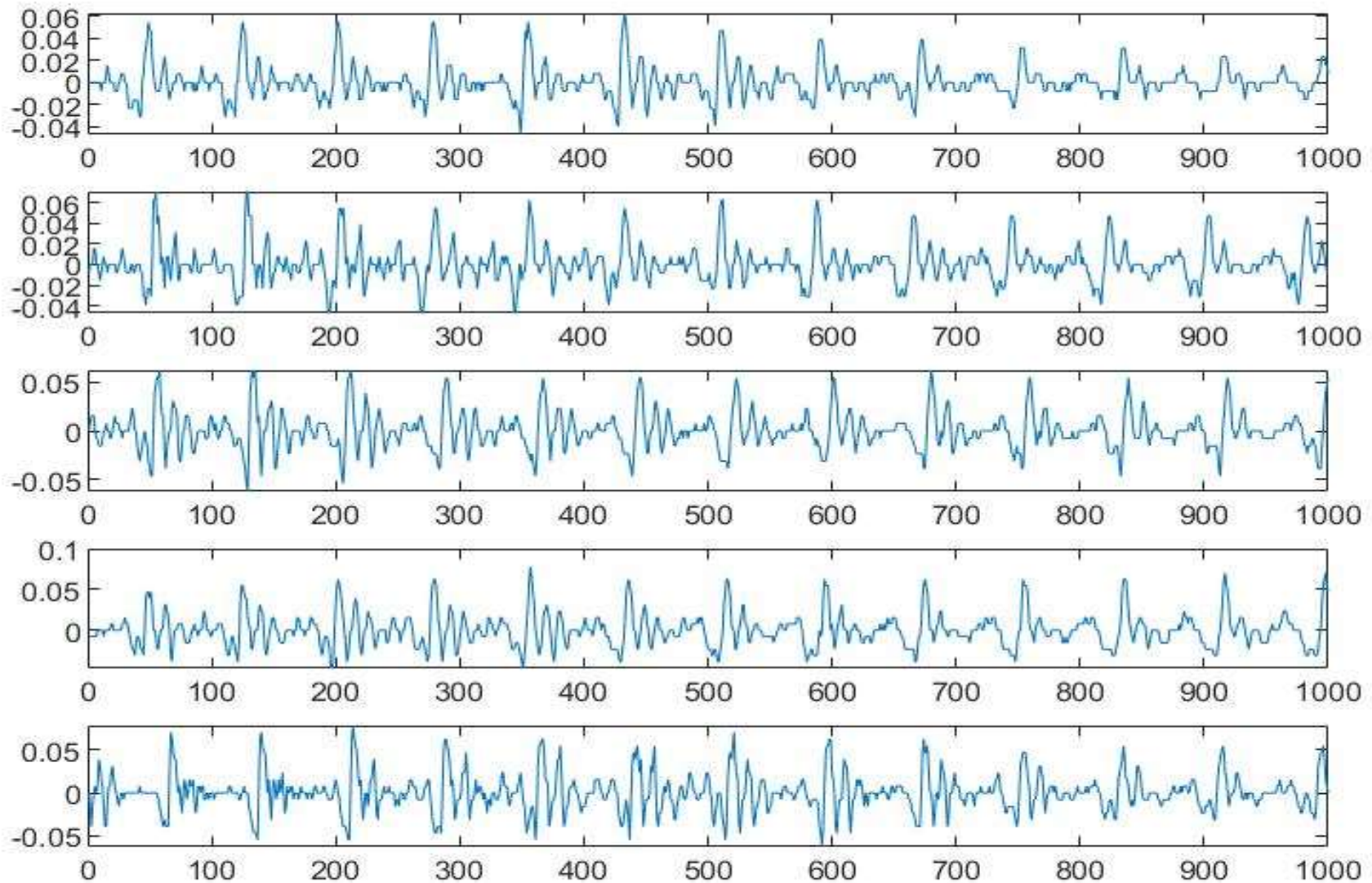
Τυχαίες Διαδικασίες: Ορισμοί



$$x(t; \omega_i) = A \sin(2\pi f_c t + \phi_i)$$

$A = 1$; % amplitude (Volt)
 $f_c = 100$; % frequency (Hz)

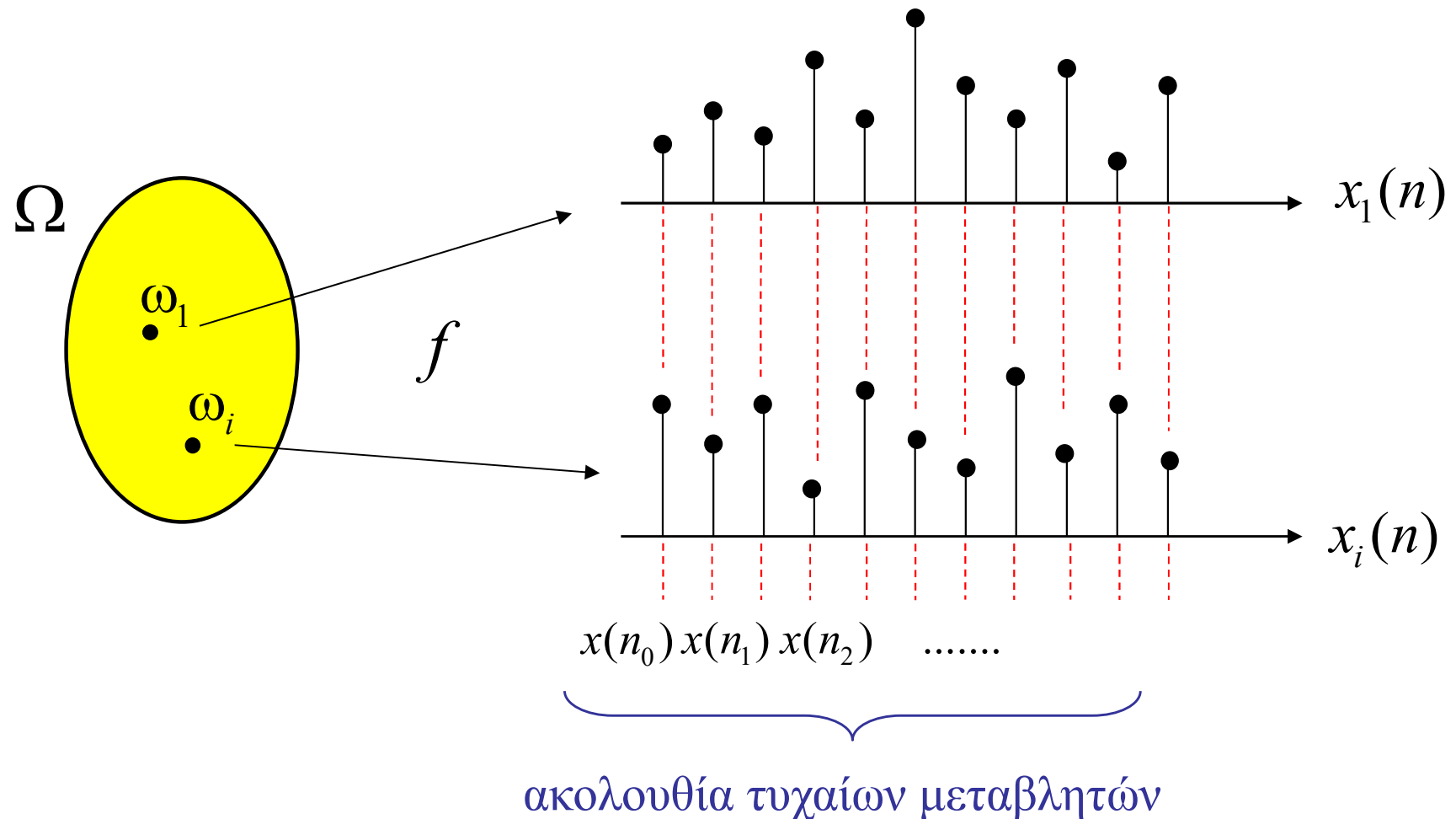
Τυχαίες Διαδικασίες: Άλλο παράδειγμα - το φώνημα «α»



```
>> x=audiorecorder(8000,8,1); record(x,10)  
>> s=getaudiodata(x);
```

Τυχαίες Διαδικασίες: Ορισμοί

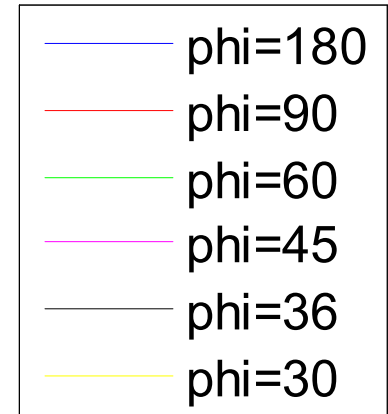
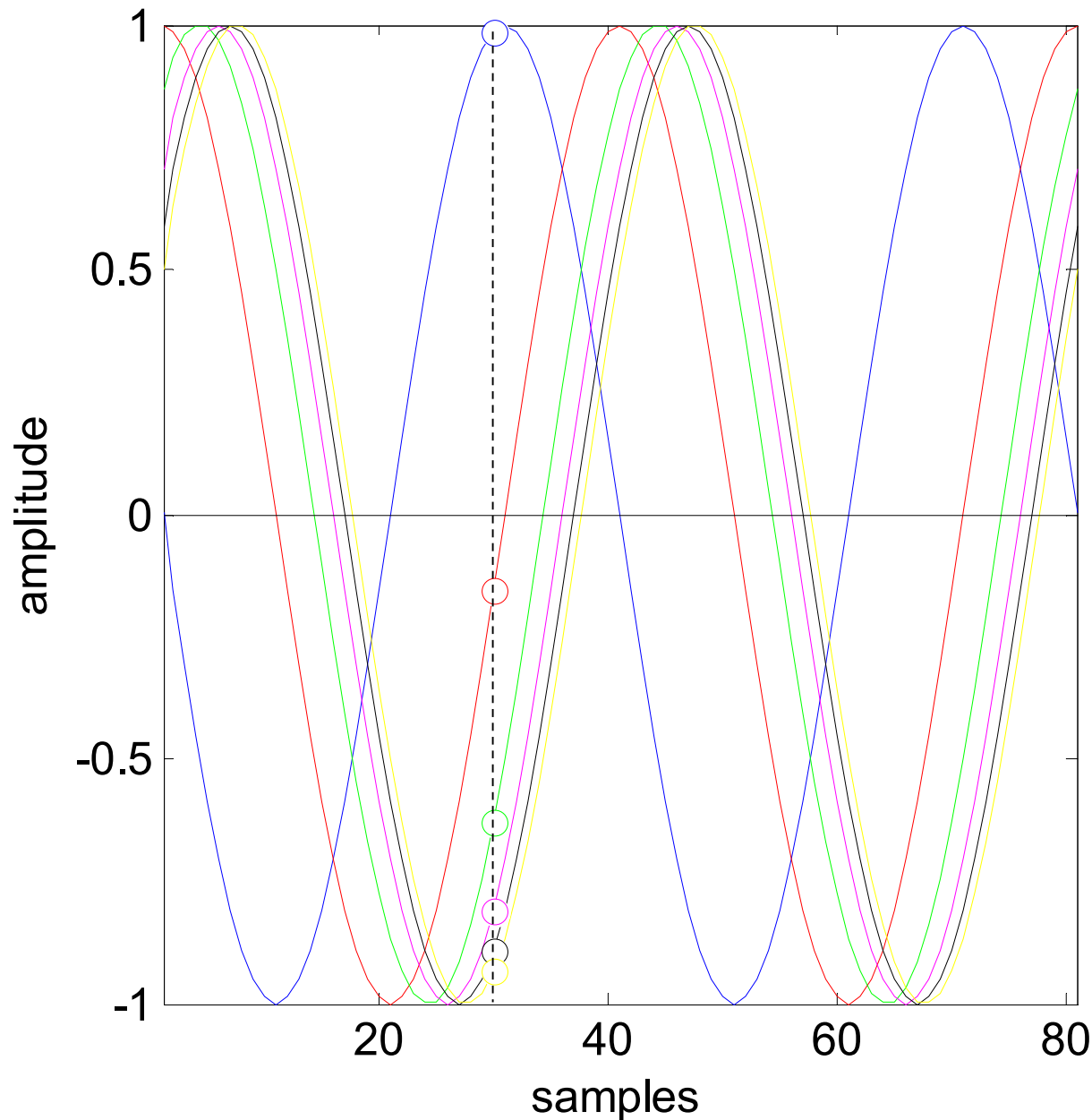
- Μια **διακριτή τυχαία διαδικασία** είναι μια **αντιστοίχιση** των στοιχείων ενός δειγματικού χώρου (εκβάσεις ενός πειράματος) σε μια συλλογή από σήματα διακριτού χρόνου (ακολουθίες διακριτών τυχαίων μεταβλητών).



- Κάθε μια από τις συναρτήσεις $x(t; \omega_i)$ ονομάζεται **συνάρτηση δείγμα** (sample function) ή **πραγματοποίηση** (realization) της τυχαίας διαδικασίας.
- Για κάθε χρονική στιγμή t_0 , έχουμε N διαφορετικές **πιθανές** τιμές $x(t_0; \omega_i)$ όπου N το πλήθος των υλοποιήσεων της τ.δ. Οι τιμές αυτές συμβολίζονται ως $x(t_0)$ και αποτελούν στην ουσία μια **τυχαία μεταβλητή**. Δηλαδή, σε κάθε χρονική στιγμή, η τιμή μιας τυχαίας διαδικασίας είναι μια τυχαία μεταβλητή.
- Άρα, εναλλακτικά, μια τυχαία διαδικασία μπορεί να ερμηνευτεί ως μια συλλογή από τυχαίες μεταβλητές, $\{x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots\}$, και γενικά γράφουμε $\{x(t), t \in D\}$. Όταν αναφερόμαστε σε **τυχαίες διαδικασίες διακριτού χρόνου** το σύνολο D ταυτίζεται με το σύνολο των ακεραίων και γράφουμε $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Τυχαίες Διαδικασίες: Ορισμοί

$X(30)$



$$X(n) = A \sin(2\pi f_c n T_s + \phi)$$

$A = 1$; % amplitude (Volt)
 $f_c = 100$; % frequency (Hz)

- Σε κάθε τυχαία μεταβλητή της ακολουθίας αντιστοιχεί μια **συνάρτηση κατανομής πιθανότητας** και μια **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας**:

$$F_{x(n)}(a) = \Pr\{x(n) \leq a\}$$

$$f_{x(n)}(a) = \frac{d}{da} F_{x(n)}(a)$$

- Για να χαρακτηρίσουμε πλήρως την τυχαία διαδικασία χρειαζόμαστε:
- Την **από κοινού** συνάρτηση κατανομής (ή πυκνότητας) πιθανότητας:

$$F_{x(n_0), x(n_1), \dots, x(n_N)}(a_0, a_1, \dots, a_N) = \Pr\{x(n_0) \leq a_0, x(n_1) \leq a_1, \dots, x(n_N) \leq a_N\}$$

Μας δίνει πληροφορία για το πως οι τυχαίες μεταβλητές αλληλοεξαρτώνται.

- ❑ Ορίσαμε την τυχαία διαδικασία ως μια αριθμημένη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Συνεπώς, για κάθε n μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $x(n)$.

- ❑ Ορίζουμε ως **μέσο όρο** της τυχαίας διαδικασίας την **ντετερμινιστική** ακολουθία:

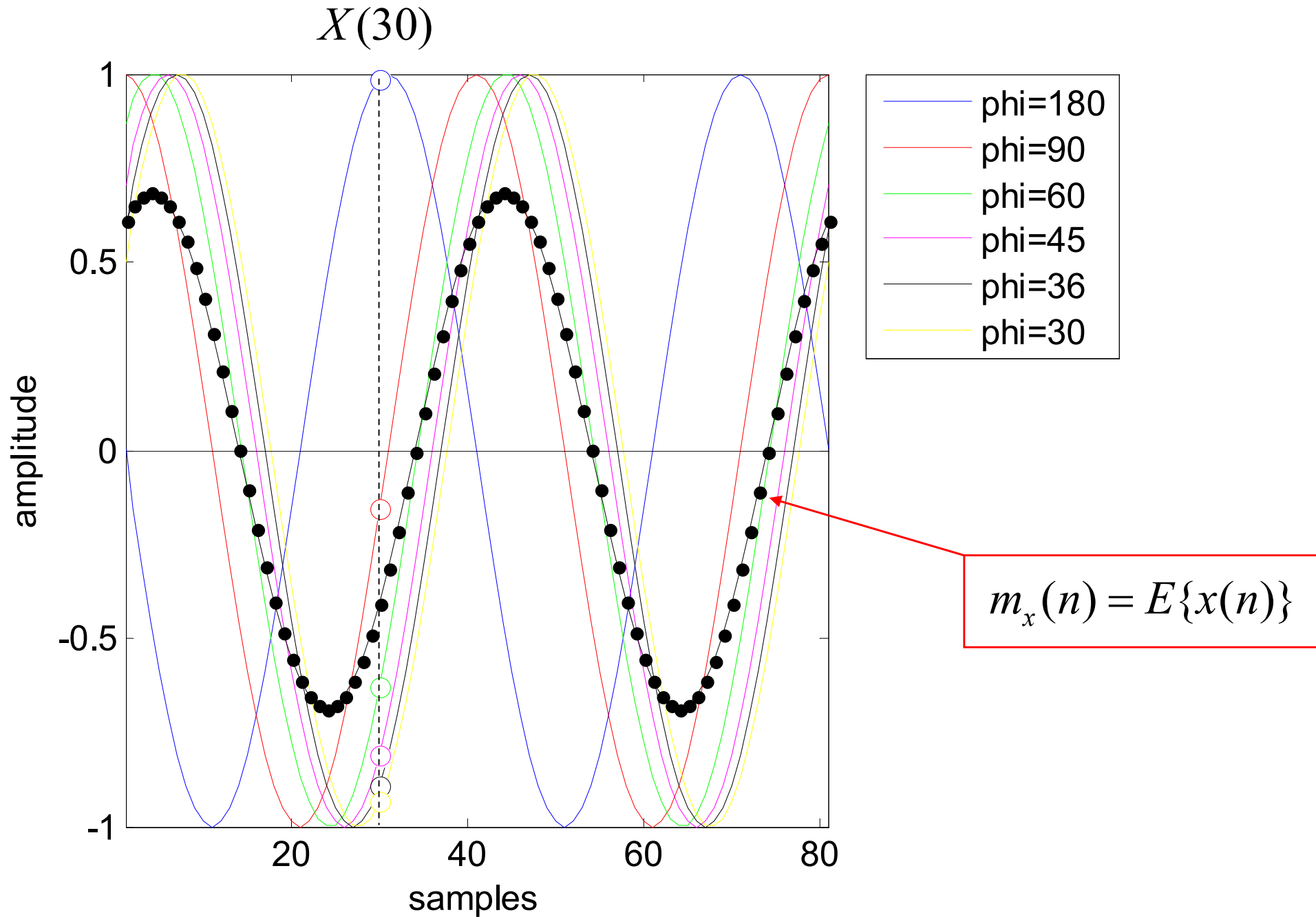
$$m_x(n) = E\{x(n)\}$$

- ❑ Ορίζουμε ως **διασπορά** της τυχαίας διαδικασίας την **ντετερμινιστική** ακολουθία:

$$\sigma_x^2(n) = E\{[x(n) - m_x(n)]^2\}$$

Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή και η διασπορά εξαρτώνται από το n .

Τυχαίες Διαδικασίες: Μέσοι όροι συνόλων

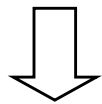


- Ορίζουμε τη συνάρτηση **αυτοσυσχέτισης** (autocorrelation) μιας τυχαίας διαδικασίας:

$$r_x(k, l) = E\{x(k)x^*(l)\}$$

- Ορίζουμε τη συνάρτηση **αυτοσυνδιασποράς** (autocovariance) μιας τυχαίας διαδικασίας:

$$c_x(k, l) = E\{[x(k) - m_x(k)][x(l) - m_x(l)]^*\}$$



$$\begin{aligned}c_x(k, l) &= E\{[x(k) - m_x(k)][x^*(l) - m_x^*(l)]\} \\&= E\{x(k)x^*(l) - x(k)m_x^*(l) - m_x(k)x^*(l) + m_x(k)m_x^*(l)\} \\&= E\{x(k)x^*(l)\} - E\{x(k)\}m_x^*(l) - m_x(k)E\{x^*(l)\} + m_x(k)m_x^*(l) \\&= r_x(k, l) - m_x(k)m_x^*(l)\end{aligned}$$

Αν $m_x(n) = 0$, τότε η αυτοσυνδιασπορά ισούται με την αυτοσυσχέτιση.

- Ορίζουμε τη συνάρτηση **ετεροσυσχέτισης** (cross-correlation) μεταξύ δύο τυχαίων διαδικασιών $x(n)$ και $y(n)$:

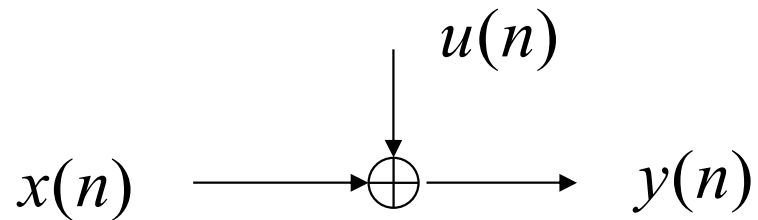
$$r_{xy}(k, l) = E\{x(k)y^*(l)\}$$

- Ορίζουμε τη συνάρτηση **ετεροσυνδιασποράς** (cross-covariance) μεταξύ δύο τυχαίων διαδικασιών $x(n)$ και $y(n)$:

$$c_{xy}(k, l) = E\{[x(k) - m_x(k)][y(l) - m_y(l)]^*\} = r_{xy}(k, l) - m_x(k)m_y^*(l)$$

- Όταν $c_{xy}(k, l) = 0$, δηλαδή $r_{xy}(k, l) = m_x(k)m_y^*(l)$ για κάθε k και l , τότε οι δύο τυχαίες διαδικασίες ονομάζονται **ασυσχέτιστες** (uncorrelated).
- Όταν $r_{xy}(k, l) = 0$ για κάθε k και l , τότε οι δύο τυχαίες διαδικασίες ονομάζονται **ορθογώνιες** (orthogonal).

Παράδειγμα :



- Θεωρούμε το σήμα $x(n)$ το οποίο παραμορφώνεται από προσθετικό θόρυβο $u(n)$. Γενικά, ο θόρυβος μοντελοποιείται ως μια τυχαία διαδικασία. Επίσης, θεωρούμε ότι ο θόρυβος έχει μηδενική μέση τιμή και ότι είναι ασυσχέτιστος με το σήμα εισόδου $x(n)$. Η έξοδος είναι $y(n) = x(n) + u(n)$.

$$\begin{aligned}
 r_y(k, l) &= E\{y(k)y^*(l)\} = E\{[x(k) + u(k)][x(l) + u(l)]^*\} \\
 &= E\{[x(k) + u(k)][x^*(l) + u^*(l)]\} \\
 &= E\{x(k)x^*(l) + x(k)u^*(l) + u(k)x^*(l) + u(k)u^*(l)\} \\
 &= \underbrace{E\{x(k)x^*(l)\}}_{r_x(k, l)} + \cancel{E\{x(k)u^*(l)\}} + \cancel{E\{u(k)x^*(l)\}} + \underbrace{E\{u(k)u^*(l)\}}_{r_u(k, l)} \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad r_{xu}(k, l) = m_x(k)m_u^*(l) = 0
 \end{aligned}$$

- Έστω ένα **διάνυσμα** από N (πραγματικές) τυχαίες μεταβλητές: $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$
- Το **διάνυσμα** \mathbf{x} ονομάζεται **Gaussian** τυχαίο διάνυσμα και οι τυχαίες μεταβλητές x_n ονομάζονται **από κοινού Gaussian** τυχαίες μεταβλητές, αν η **από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** είναι:

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{|\mathbf{C}_x|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_x)^T \mathbf{C}_x^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_x)}$$

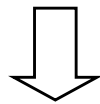
όπου $\mathbf{m} = [m_1, m_2, \dots, m_N]^T$ είναι το διάνυσμα με στοιχεία τη μέση τιμή των τυχαίων μεταβλητών x_n , \mathbf{C}_x είναι ένας συμμετρικός πίνακας θετικά ορισμένος με στοιχεία τις τιμές συνδιασποράς μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών x_n , δηλαδή $c_{i,j} = E\{(x_i - m_i)(x_j - m_j)\}$ και $|\mathbf{C}_x|$ είναι η ορίζουσα του πίνακα.

- Μια τυχαία διαδικασία διακριτού χρόνου ονομάζεται **Gaussian**, αν κάθε ακολουθία δειγμάτων $x(n)$ της τυχαίας διαδικασίας είναι **από κοινού Gaussian** τυχαίες μεταβλητές.

- Η έννοια της **στασιμότητας** μιας τυχαίας διαδικασίας συνδέεται με την έννοια της "**στατιστικής χρονικής σταθερότητας**", δηλαδή όταν οι στατιστικές ιδιότητες ή οι μέσοι όροι συνόλων της τυχαίας διαδικασίας είναι **ανεξάρτητες του χρόνου**.
- Όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{x(n)}(a)$ μιας τυχαίας διαδικασίας $x(n)$ είναι ανεξάρτητη του χρόνου, δηλαδή:

$$f_{x(n)}(a) = f_{x(n+k)}(a), \quad \forall k$$

τότε η διαδικασία ονομάζεται **στάσιμη** (stationary) διαδικασία **πρώτης τάξης**.



$$m_x(n) = m_x$$

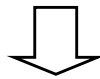
και

$$\sigma_x^2(n) = \sigma_x^2$$

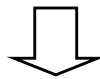
- Όταν η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{x(n_1),x(n_2)}(a_1,a_2)$ είναι ανεξάρτητη του χρόνου, δηλαδή:

$$f_{x(n_1),x(n_2)}(a_1,a_2) = f_{x(n_1+k),x(n_2+k)}(a_1,a_2), \quad \forall k$$

τότε η διαδικασία $x(n)$ ονομάζεται **στάσιμη** διαδικασία **δεύτερης τάξης**.



$$r_x(k,l) = r_x(k+n,l+n) \Rightarrow E\{x(k)x^*(l)\} = E\{x(k+n)x^*(l+n)\}$$



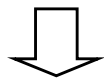
$$r_x(k,l) = r_x(n,n-(k-l)) \equiv r_x(k-l)$$

Δηλαδή, η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $k-l$, η οποία ονομάζεται **lag**.

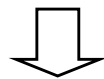
- Αν μία διαδικασία είναι στάσιμη δεύτερης τάξης, τότε είναι και πρώτης τάξης.

□ Παρατηρούμε ότι:

$$r_x(k, l) = r_x(k - l, 0) \equiv r_x(k - l)$$



$$\begin{aligned} c_x(k, l) &= r_x(k, l) - m_x(k)m_x^*(l) \\ &= r_x(k - l) - m_x(k)m_x^*(l) \\ &= r_x(k - l) - m_x m_x^* \\ &\equiv c_x(k - l) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} c_x(0) &= r_x(0) - m_x m_x^* = E\{x(n)x^*(n)\} - m_x m_x^* \\ &= E\{|x(n)|^2\} - |m_x|^2 = \sigma_x^2(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_x(k, l) &= r_x(k + n, l + n) \\ &= E\{x(k + n)x^*(l + n)\} \\ &= E\{x(n)x^*(n - (k - l))\} \\ &= r_x(k - l) \end{aligned}$$

← Η διαδικασία x είναι στάσιμη 2ης τάξης.

← Συνεπώς, είναι και στάσιμη 1ης τάξης.

← Άρα και η συνδιασπορά εξαρτάται μόνο από το lag.

- Γενικά, ορίζουμε ότι μια διαδικασία είναι **στάσιμη L τάξης** όταν

$$f_{x(n_1),x(n_2),\dots,x(n_L)}(a_1,a_2,\dots,a_L) = f_{x(n_1+k),x(n_2+k),\dots,x(n_L+k)}(a_1,a_2,\dots,a_L), \quad \forall k$$

- Μία διαδικασία που είναι στάσιμη για **όλες** τις τάξεις $L > 0$, ονομάζεται “**Αυστηρά Στάσιμη**” (Stationary in the Strict Sense).

Πολύ αυστηρή συνθήκη, που σπάνια συναντάται σε πρακτικά προβλήματα.

- Μία διαδικασία ονομάζεται “**Στάσιμη υπό την Ευρεία Έννοια**” (WSS: Wide Sense Stationary), αν ικανοποιούνται οι εξής τρεις συνθήκες:
 - Η μέση τιμή είναι μία σταθερά, ανεξάρτητη του χρόνου: $m_x(n) = m_x$
 - Η αυτοσυσχέτιση $r_x(k,l)$ εξαρτάται μόνο από τη χρονική διαφορά $k - l$
 - Η διασπορά είναι πεπερασμένη: $c_x(0) < \infty$

- Παρατηρείστε ότι οι παραπάνω συνθήκες αφορούν στατιστικά πρώτης και δεύτερης τάξης μόνο.

- Για Gaussian τυχαίες διαδικασίες, η στασιμότητα υπό την ευρεία έννοια είναι **ισοδύναμη** με την αυστηρή στασιμότητα.

- Δύο τυχαίες διαδικασίες x και y ονομάζονται **από κοινού WSS** αν κάθε μια είναι WSS και επιπλέον η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης $r_{xy}(k, l)$ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $k - l$ δηλαδή:

$$r_{xy}(k, l) = r_{xy}(k + n, l + n) \equiv r_{xy}(k - l)$$

- Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $r_x(k)$ μιας WSS διαδικασίας παρουσιάζει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Ιδιότητα 1: **Συμμετρία**

$$r_x(k) = r_x^*(-k)$$

- Ιδιότητα 2: **Μέση τετραγωνική τιμή**

$$r_x(0) = E\{|x(n)|^2\} \geq 0$$

- Ιδιότητα 3: **Μέγιστη τιμή**

$$|r_x(k)| \leq r_x(0)$$

- Ιδιότητα 4: **Περιοδικότητα**

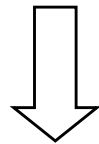
Αν ισχύει $r_x(k_0) = r_x(0)$ για κάποια τιμή k_0 , τότε η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι περιοδική με περίοδο k_0 .

- Έστω ένα σύνολο από παρατηρήσεις της τυχαίας διαδικασίας x , δηλαδή έστω ότι λαμβάνουμε τις $p+1$ τιμές: $x(0), x(1), \dots, x(p)$.
- Κατασκευάζουμε το διάνυσμα: $\mathbf{x} = [x(0) \quad x(1) \quad \dots \quad x(p)]^T$
- Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τον πίνακα: $\mathbf{x}\mathbf{x}^H$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\mathbf{x}^H &= \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(0) & x^*(1) & \dots & x^*(p) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x(0)x^*(0) & x(0)x^*(1) & \dots & x(0)x^*(p) \\ x(1)x^*(0) & x(1)x^*(1) & \dots & x(1)x^*(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(p)x^*(0) & x(p)x^*(1) & \dots & x(p)x^*(p) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- Θεωρούμε ότι η τυχαία διαδικασία x είναι **WSS**:

$$E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} = \begin{bmatrix} E\{x(0)x^*(0)\} & E\{x(0)x^*(1)\} & \dots & E\{x(0)x^*(p)\} \\ E\{x(1)x^*(0)\} & E\{x(1)x^*(1)\} & \dots & E\{x(1)x^*(p)\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\{x(p)x^*(0)\} & E\{x(p)x^*(1)\} & \dots & E\{x(p)x^*(p)\} \end{bmatrix}$$



$$E\{x(k)x^*(l)\} = r_x(k-l)$$

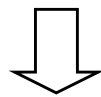
$$E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(-1) & \dots & r_x(-p) \\ r_x(1) & r_x(0) & \dots & r_x(1-p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(p) & r_x(p-1) & \dots & r_x(0) \end{bmatrix}$$

$$E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(-1) & \dots & r_x(-p) \\ r_x(1) & r_x(0) & \dots & r_x(1-p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(p) & r_x(p-1) & \dots & r_x(0) \end{bmatrix}$$

$$r_x(n) = r_x^*(-n) \rightarrow$$

$$r_x(-n) = r_x^*(n)$$

Ιδιότητα Hermitian συμμετρίας



$$E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\} = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x^*(1) & r_x^*(2) & \dots & r_x^*(p) \\ r_x(1) & r_x(0) & r_x^*(1) & \dots & r_x^*(p-1) \\ r_x(2) & r_x(1) & r_x(0) & \dots & r_x^*(p-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(p) & r_x(p-1) & r_x(p-2) & \dots & r_x(0) \end{bmatrix} = \mathbf{R}_x$$

- Ο πίνακας \mathbf{R}_x ονομάζεται πίνακας **αυτοσυσχέτισης** (autocorrelation matrix).

- Ομοίως ορίζουμε τον πίνακα **αυτοσυνδιασποράς** (autocovariance matrix).

$$\mathbf{C}_x = E\{(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^H\} = \mathbf{R}_x - \mathbf{m}_x \mathbf{m}_x^H$$

όπου \mathbf{m}_x είναι διάνυσμα $p+1$ θέσεων με στοιχεία τη μέση τιμή (σταθερά) της WSS διαδικασίας:

$$\mathbf{m}_x = \begin{bmatrix} m_x \\ m_x \\ \vdots \\ m_x \end{bmatrix}$$

- Όταν η διαδικασία έχει μηδενική μέση τιμή ισχύει:

$$\mathbf{C}_x = \mathbf{R}_x$$

Τυχαίες Διαδικασίες: Πίνακας αυτοσυσχέτισης

□ Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης μιας **WSS** διαδικασίας έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

□ **Ιδιότητα 1: ???? ?** Είναι Hermitian και Toeplitz.

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x^*(1) & \dots & r_x^*(p) \\ r_x(1) & r_x(0) & \dots & r_x^*(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(p) & r_x(p-1) & \dots & r_x(0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_x^H = \begin{bmatrix} (r_x(0))^* & (r_x(1))^* & \dots & (r_x(p))^* \\ (r_x^*(1))^* & (r_x(0))^* & \dots & (r_x(p-1))^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (r_x^*(p))^* & (r_x^*(p-1))^* & \dots & (r_x(0))^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x^*(1) & \dots & r_x^*(p) \\ r_x(1) & r_x(0) & \dots & r_x^*(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(p) & r_x(p-1) & \dots & r_x(0) \end{bmatrix} = \mathbf{R}_x$$

$r_x(0) = r_x^*(0)$

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x^*(1) & \dots & r_x^*(p-1) & r_x^*(p) \\ r_x(1) & r_x(0) & \dots & r_x^*(p-2) & r_x^*(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_x(p-1) & r_x(p-2) & \dots & r_x(0) & r_x^*(1) \\ r_x(p) & r_x(p-1) & \dots & r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{R}_x = \text{Toep}[r_x(0) \ r_x(1) \ \dots \ r_x(p)]$$

□ **Ιδιότητα 2:** Είναι μη αρνητικά ορισμένος: $\mathbf{R}_x \geq 0$

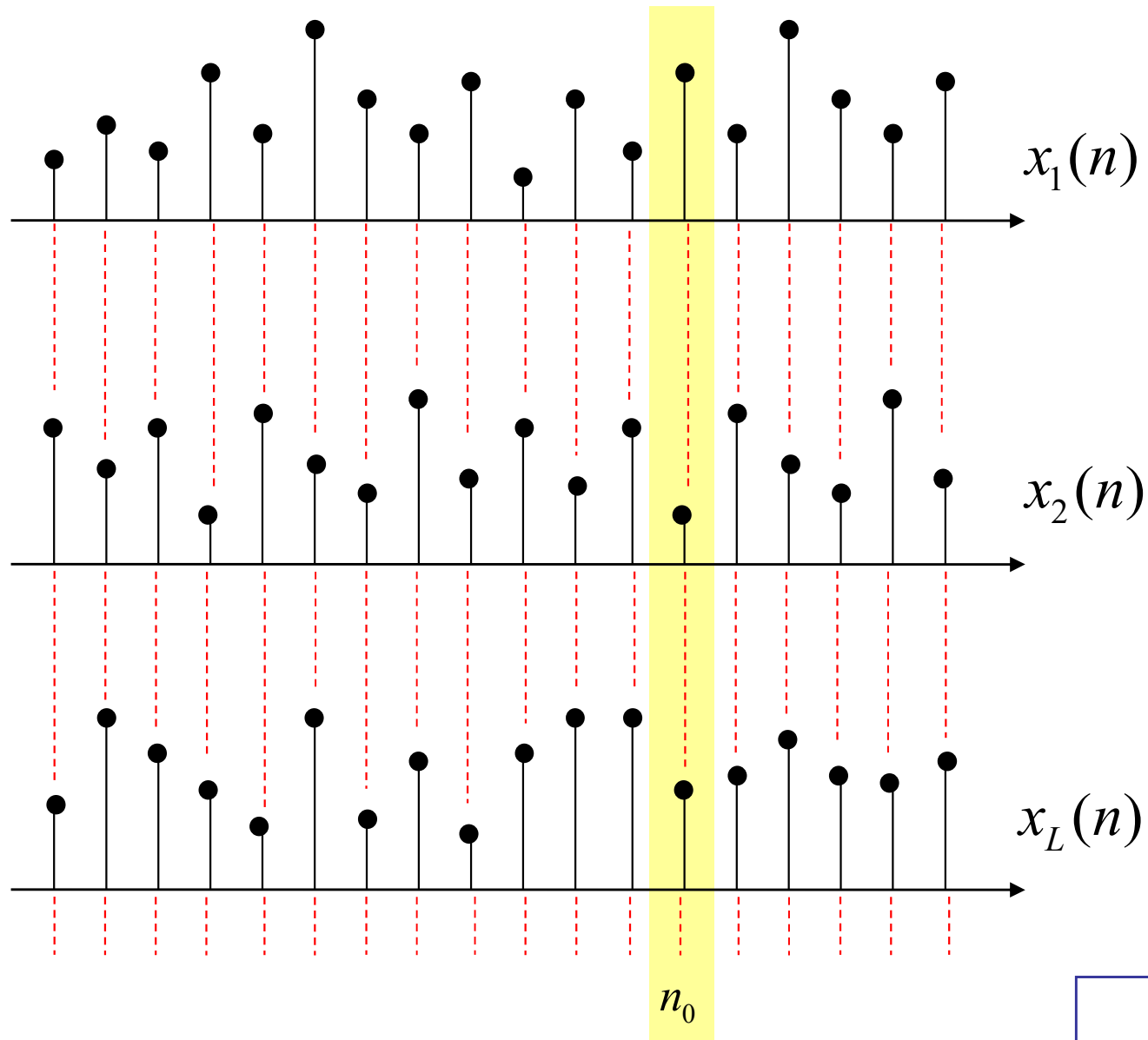
□ **Ιδιότητα 3:** Οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές και μη αρνητικές: $\lambda_k \geq 0$

- Η μέση τιμή και η αυτοσυσχέτιση μιας τυχαίας διαδικασίας αποτελούν στατιστικούς μέσους όρους που αναφέρονται σε **όλες** τις συναρτήσεις δείγματα (πραγματοποιήσεις) της διαδικασίας. Ωστόσο, συχνά στην πράξη έχουμε διαθέσιμες παρατηρήσεις από μία μόνο πραγματοποίηση της διαδικασίας, και από τις παρατηρήσεις αυτές καλούμαστε να εκτιμήσουμε τα παραπάνω μεγέθη.
- Έστω μια τυχαία διαδικασία για την οποία έχουμε μια συλλογή από L υλοποιήσεις, δηλαδή σήματα διακριτού χρόνου $x_i(n)$ για $i = 1, 2, \dots, L$. Στην περίπτωση αυτή θα μπορούσαμε να κάνουμε μια εκτίμηση της μέσης τιμής ως εξής:

$$\hat{m}_x(n) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L x_i(n)$$

← εξαρτάται από το n (και το L)

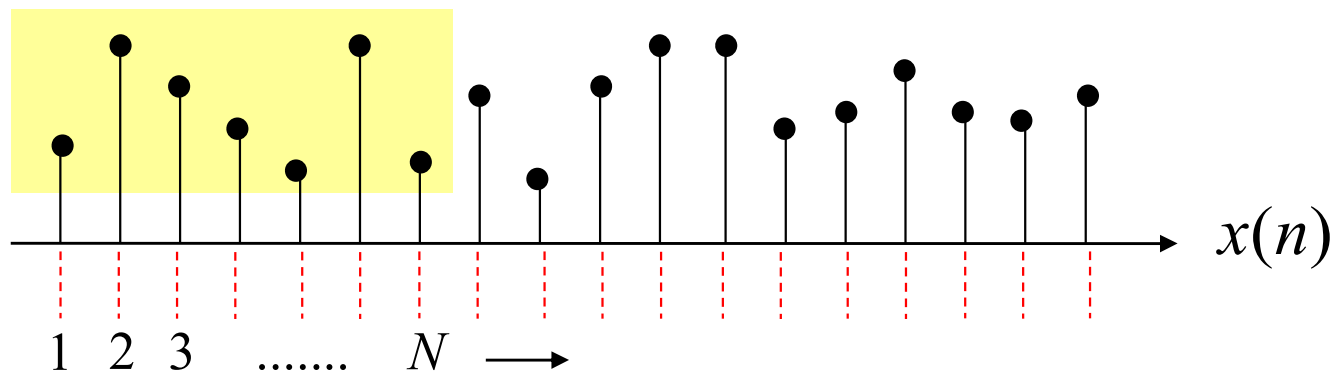
Τυχαίες Διαδικασίες: Εργοδικότητα



$$\hat{m}_x(n_0) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L x_i(n_0)$$

- Όταν όμως έχουμε διαθέσιμη μόνο μία πραγματοποίηση της τυχαίας διαδικασίας, η παραπάνω εκτίμηση δεν έχει νόημα. Επειδή, έχουμε διαθέσιμα N δείγματα της συγκεκριμένης πραγματοποίησης (υλοποίησης), μια εκτίμηση της μέσης τιμής θα μπορούσε να είναι η ακόλουθη:

$$\hat{m}_x(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n) \quad \leftarrow \text{εξαρτάται από το } N$$



- Για να έχει νόημα ο εκτιμητής $\hat{m}_x(N)$ θα πρέπει η μέση τιμή της διαδικασίας να μην εξαρτάται από το n . Για παράδειγμα, αν η διαδικασία είναι WSS, τότε είναι $m_x(n) = m_x$.

- Το ερώτημα που δημιουργείται είναι αν (και υπό ποιες συνθήκες) ο μέσος όρος $\hat{m}_x(N)$ συγκλίνει στην πραγματική μέση τιμή.
- Αν ο δειγματικός μέσος όρος $\hat{m}_x(N)$ μιας WSS διαδικασίας συγκλίνει στην πραγματική μέση τιμή **υπό την έννοια του μέσου τετραγώνου**, τότε η διαδικασία καλείται **εργοδική ως προς τη μέση τιμή** (ergodic in the mean).

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{|\hat{m}_x(N) - m_x|^2\} = 0$$



$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{m}_x(N) = m_x$$

- **Ικανές και αναγκαίες** συνθήκες για την ως άνω σύγκλιση (υπό την έννοια του μέσου τετραγώνου) είναι οι εξής (συνθήκες ενός “συνεπή εκτιμητή”):
 - Ο εκτιμητής να είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτος: $\lim_{N \rightarrow \infty} E\{\hat{m}_x(N)\} = m_x$
 - Η διασπορά της εκτίμησης να τείνει στο μηδέν καθώς $N \rightarrow \infty$:
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}(\hat{m}_x(N)) = 0$$

- Από τον ορισμό του εκτιμητή $\hat{m}_x(N)$ προκύπτει ότι ο εκτιμητής είναι αμερόληπτος (άρα και ασυμπτωτικά αμερόληπτος).

- Αποδεικνύεται ότι:
$$\text{var}(\hat{m}_x(N)) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) c_x(k)$$

Για να ισχύει και η δεύτερη συνθήκη αρκεί:
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) c_x(k) = 0$$

- **Θεώρημα 1:** Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η WSS τυχαία διαδικασία $x(n)$ με συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς $c_x(k)$ εργοδική ως προς τη μέση τιμή είναι:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_x(k) = 0$$

- **Θεώρημα 2:** Ικανές συνθήκες για να είναι η WSS τυχαία διαδικασία $x(n)$ με συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς $c_x(k)$ εργοδική ως προς τη μέση τιμή είναι:

$$c_x(0) < \infty \quad \text{και} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} c_x(k) = 0$$

- Αντίστοιχα, θέλουμε να εξετάσουμε την εκτίμηση της αυτοσυσχέτισης για μια WSS διαδικασία, $r_x(k) = E\{x(n)x^*(n-k)\}$. Θεωρούμε τον εκτιμητή:

$$\hat{r}_x(k, N) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n-k)$$

- Αν η εκτίμηση $\hat{r}_x(k, N)$ συγκλίνει στην πραγματική τιμή $r_x(k)$ **υπό την έννοια του μέσου τετραγώνου**, τότε η διαδικασία καλείται **εργοδική ως προς την αυτοσυσχέτιση** (autocorrelation ergodic).

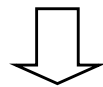
$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{|\hat{r}_x(k, N) - r_x(k)|^2\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{r}_x(k, N) = r_x(k)$$

- **Θεώρημα 3:** Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η WSS Gaussian τυχαία διαδικασία $x(n)$ με συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς $c_x(k)$ εργοδική ως προς την αυτοσυσχέτιση είναι:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_x^2(k) = 0$$

- Ονομάζουμε **φασματική πυκνότητα ισχύος** (power spectral density) ή **φάσμα ισχύος** (power spectrum) μιας WSS τυχαίας διαδικασίας $x(n)$ το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης:

$$P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_x(k) e^{-jk\omega}$$



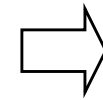
$$r_x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P_x(e^{j\omega}) e^{jk\omega} d\omega$$

Το φάσμα ισχύος εκφράζει την κατανομή της ισχύος της τυχαίας διαδικασίας στις διάφορες συχνότητες.

- Το φάσμα ισχύος μιας **WSS** διαδικασίας έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- **Ιδιότητα 1:** Συμμετρία.

$$P_x(e^{j\omega}) = P_x^*(e^{j\omega})$$



Το φάσμα έχει
πραγματικές τιμές.

- **Ιδιότητα 2:** Μη αρνητικές τιμές.

$$P_x(e^{j\omega}) \geq 0$$

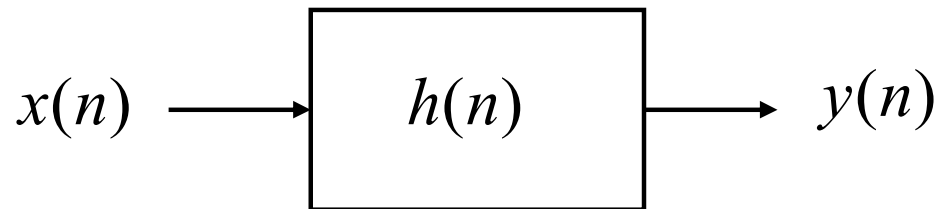
- **Ιδιότητα 3:** Συνολική ισχύς μιας WSS διαδικασίας μηδενικής μέσης τιμής.

$$E\{|x(n)|^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P_x(e^{j\omega}) d\omega$$

- **Ιδιότητα 4:** Οι **ιδιοτιμές του πίνακα αυτοσυσχέτισης** μιας WSS διαδικασίας μηδενικής μέσης τιμής φράσσονται άνω και κάτω από τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του φάσματος ισχύος:

$$\min_{\omega} P_x(e^{j\omega}) \leq \lambda_i \leq \max_{\omega} P_x(e^{j\omega})$$

- Έστω $x(n)$ μια τυχαία διαδικασία **WSS** με μέση τιμή m_x και αυτοσυσχέτιση $r_x(k)$. Το διακριτό σήμα $x(n)$ διέρχεται από ένα **ευσταθές ΓΧΑ** σύστημα με κρουστική απόκριση $h(n)$.



- Θέλουμε να μελετήσουμε τα στατιστικά χαρακτηριστικά (μέση τιμή, διασπορά, αυτοσυσχέτιση, φάσμα ισχύος) του σήματος εξόδου.
- Καταρχήν, είναι το σήμα εξόδου $y(n)$ **τυχαία διαδικασία**;
- ΝΑΙ διότι προκύπτει ως μία συνάρτηση της τυχαίας διαδικασίας $x(n)$:

$$y(n) = g[x(n)] = \underbrace{x(n) * h(n)}_{\text{συνέλιξη}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

- Υπολογίζουμε τη **μέση τιμή** της εξόδου:

$$E\{y(n)\} = E\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \underbrace{E\{x(n-k)\}}$$

WSS διαδικασία, άρα ανεξάρτητο του $n-k$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)m_x = m_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) = m_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \underbrace{e^{-jk0}}_{=1}$$

$$= m_x H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0}$$

Διαπιστώνουμε ότι, η μέση τιμή της εξόδου είναι **σταθερά** (ανεξάρτητη του n) και σχετίζεται με τη μέση τιμή της εισόδου μέσω ενός πολλαπλασιαστικού παράγοντα, ο οποίος είναι η απόκριση συχνότητας του συστήματος στη συχνότητα $\omega = 0$.

- Υπολογίζουμε την **ετεροσυσχέτιση** μεταξύ εξόδου και εισόδου:

$$\begin{aligned} r_{yx}(k, l) &= E\{y(k)x^*(l)\} = E\left\{\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)x(k-m)\right]x^*(l)\right\} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) \underbrace{E\{x(k-m)x^*(l)\}}_{\text{WSS διαδικασία, άρα εξαρτάται από τη διαφορά } k-m-l} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)r_x(k-m-l) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)r_x(k-l-m) \end{aligned}$$

Διαπιστώνουμε ότι, η ετεροσυσχέτιση εξαρτάται από τη **διαφορά** $k-l$.

- Αν $k - l = n$, τότε:
$$r_{yx}(l+n, l) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)r_x(n-m) = h(n)*r_x(n)$$
$$r_{yx}(l+n, l) \equiv r_{yx}(n) = h(n)*r_x(n)$$

- Υπολογίζουμε την **αυτοσυσχέτιση** της εξόδου:

$$\begin{aligned} r_y(n+k, n) &= E\{y(n+k)y^*(n)\} = E\{y(n+k)\left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h^*(l)x^*(n-l)\right]\} \\ &= E\left\{\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h^*(l)y(n+k)x^*(n-l)\right\} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h^*(l) \underbrace{E\{y(n+k)x^*(n-l)\}}_{\text{Δείξαμε ότι εξαρτάται από το lag}} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h^*(l)r_{yx}(k+l) \\ &= h^*(k) * r_{yx}(-k) = h^*(-k) * r_{yx}(k) \end{aligned}$$

Διαπιστώνουμε ότι η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται από το **lag** k .



$$r_y(n+k, n) \equiv r_y(k) = h^*(-k) * h(k) * r_x(k)$$

- Δείξαμε ότι για την τυχαία διαδικασία $y(n)$ ισχύει:

1. Η μέση τιμή της εξόδου είναι σταθερή, ανεξάρτητη του χρόνου: $m_y(n) = m_y$
2. Η αυτοσυσχέτιση εξαρτάται μόνο από το lag: $r_y(n+k, n) \equiv r_y(k)$

- Επιπλέον:

- Αφού η διαδικασία $x(n)$ είναι WSS, δηλαδή $\sigma_x^2 < \infty$, σημαίνει ότι η είσοδος είναι φραγμένη: $|x(n)| < \infty$
- Αφού το σύστημα $h(n)$ είναι ευσταθές, και η έξοδος είναι φραγμένη: $|y(n)| < \infty$

3. Άρα, η διασπορά της εξόδου είναι φραγμένη: $c_y(0) < \infty$

- Από 1,2,3 συμπεραίνουμε ότι η έξοδος $y(n)$ είναι **WSS** τυχαία διαδικασία.
- Επιπλέον, αφού η είσοδος $x(n)$ και η έξοδος $y(n)$ είναι WSS τυχαίες διαδικασίες και η ετεροσυσχέτιση r_{yx} εξαρτάται από το lag $r_{yx}(n+k, n) \equiv r_{yx}(k)$ είναι και **από κοινού WSS** τυχαίες διαδικασίες.

- Υπολογίζουμε τη **διασπορά** της εξόδου:

$$\begin{aligned}
 \sigma_y^2(n) &= E\{y(n)y^*(n)\} - m_y(n)m_y^*(n) \\
 &= E\{y(n+0)y^*(n)\} - \underbrace{m_y(n+0)m_y^*(n)}_{\text{ανεξάρτητο του } n} \\
 &= r_y(0) - m_y m_y^* = c_y(0)
 \end{aligned}$$

όπου:

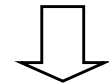
$$\begin{aligned}
 r_y(0) &= h^*(-k) * h(k) * r_x(k) \Big|_{k=0} = h^*(-k) * \left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)r_x(k-l) \right] \Big|_{k=0} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)r_x(m-l) \right] h^*(k+m) \Big|_{k=0} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)r_x(m-l)h^*(m)
 \end{aligned}$$

- Έστω ότι το σύστημα έχει πεπερασμένη κρουστική απόκριση:

$$\mathbf{h} = [h(0) \ h(1) \ \dots \ h(N-1)]^T$$

- Η ισχύς εξόδου είναι:

$$\begin{aligned} E\{|y(n)|^2\} &= E\{y(n)y^*(n)\} = r_y(\mathbf{0}) = \sum_{m=0}^{N-1} h^*(m) \underbrace{\sum_{l=0}^{N-1} h(l)r_x(m-l)}_{u(m)} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} h^*(m)u(m) = \mathbf{h}^H \mathbf{u} \end{aligned}$$



$$\mathbf{h}^H \mathbf{u} = [h^*(0) \ h^*(1) \ \dots \ h^*(N-1)]^T \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix}$$

\mathbf{u}

□ ...συνέχεια:

$$u(m) = \mathbf{h}^T \mathbf{r}_x(m) = \mathbf{r}_x^T(m) \mathbf{h} \quad \Rightarrow \quad u(m) = \underbrace{\left[r_x(m) \quad r_x(m-1) \quad \dots \quad r_x(m-N+1) \right]^T}_{\mathbf{r}_x^T(m)} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N-1) \end{bmatrix}$$

□ Τελικά:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{|y(n)|^2\} &= \mathbf{h}^H \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix} = \mathbf{h}^H \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(-1) & \dots & r_x(-N+1) \\ r_x(1) & r_x(0) & \dots & r_x(-N+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(N-1) & r_x(N-2) & \dots & r_x(0) \end{bmatrix} \mathbf{h} \\ &= \mathbf{h}^H \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x^*(1) & \dots & r_x^*(N-1) \\ r_x(1) & r_x(0) & \dots & r_x^*(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(N-1) & r_x(N-2) & \dots & r_x(0) \end{bmatrix} \mathbf{h} = \mathbf{h}^H \mathbf{R}_x \mathbf{h} \end{aligned}$$

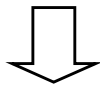
- Υπολογίζουμε το **φάσμα** εξόδου:

$$P_y(e^{j\omega}) = P_x(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2$$

Διαπιστώνουμε ότι το φάσμα εξόδου ισούται με το φάσμα εισόδου πολλαπλασιασμένο με το τετράγωνο του μέτρου της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

- Μια WSS διαδικασία $u(n)$ ονομάζεται **λευκός θόρυβος** (white noise) με μέση τιμή m_u και διασπορά σ_u^2 αν η αυτοσυσχέτιση είναι μηδενική για όλα τα lag εκτός από μηδέν:

$$r_u(k) = \sigma_u^2 \delta(k)$$



$$P_u(e^{j\omega}) = \sigma_u^2 \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$