# Ψηφιακές Τηλεπικοινωνίες

## *Θεωρία Πληροφορίας:*

## *Χωρητικότητα Καναλιού*

# Χωρητικότητα Καναλιού

- Η θεωρία πληροφορίας περιλαμβάνει μεταξύ άλλων:
  - κωδικοποίηση πηγής
  - κωδικοποίηση καναλιού
- Κωδικοποίηση πηγής:
  - πόση πληροφορία έχει μια πηγή;
  - πόσο μπορώ να τη συμπιέσω;
  - τι παραμόρφωση εισάγεται κατά τη συμπίεση;
  - γιατί χρησιμοποιούνται κωδικοποιητές πηγής;
- Κωδικοποίηση καναλιού:
  - πόσο «καλό» είναι ένα κανάλι;
  - πόσο υποβαθμίζεται η πληροφορία που διέρχεται από αυτό;
  - ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης δεδομένων από ένα κανάλι;
  - γιατί χρησιμοποιούνται κωδικοποιητές καναλιού;

# Κωδικοποίηση Καναλιού

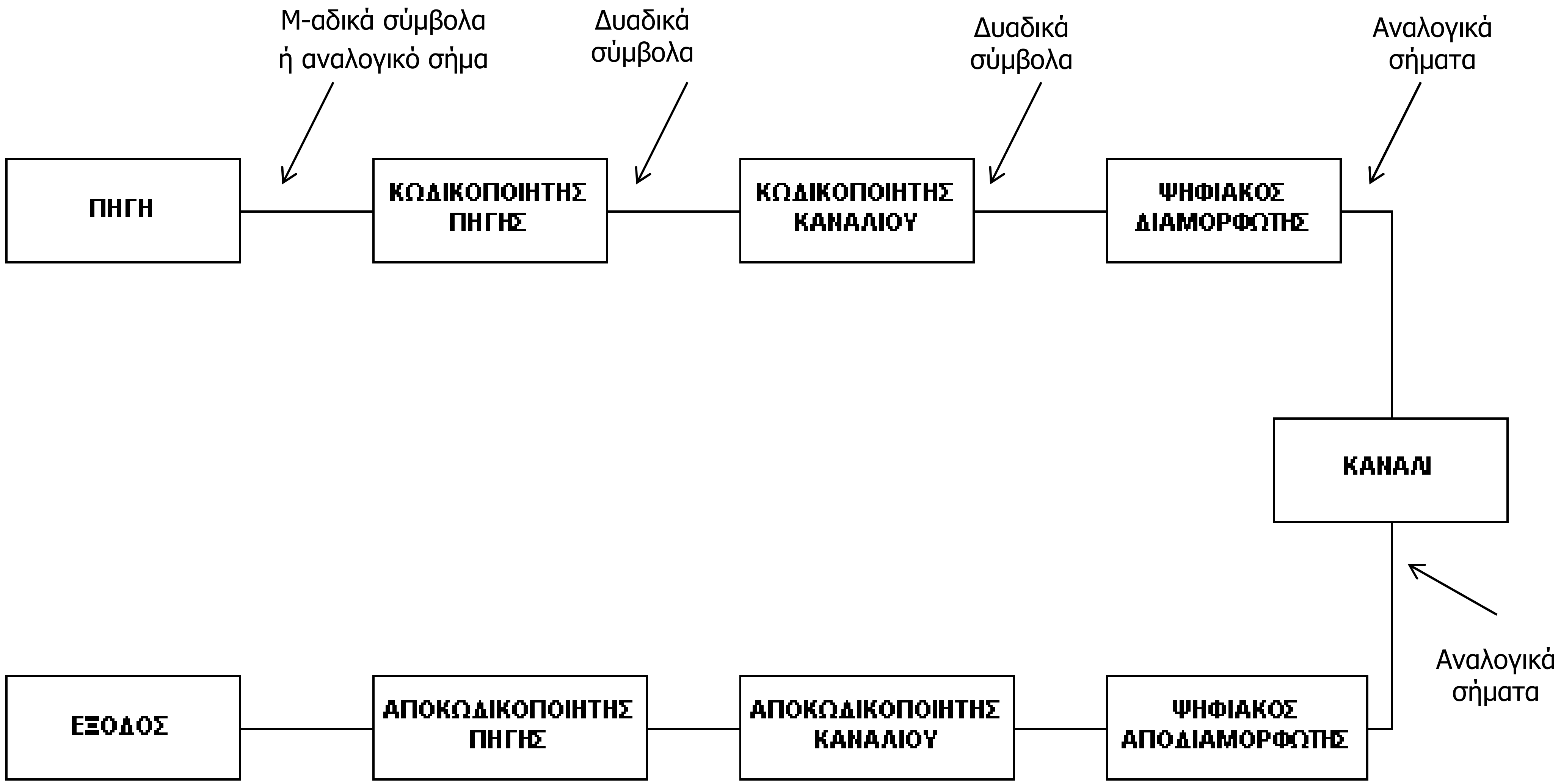
- Στόχος: η μετάδοση πληροφορίας μέσα από ένα κανάλι
  - με όσο το δυνατόν μεγαλύτερο ρυθμό
  - αλλά και αξιόπιστα


- Κάθε κανάλι εισάγει θόρυβο στο μεταδιδόμενο σήμα
- Αποτέλεσμα:
  - η μετάδοση μπορεί να περιέχει λάθη (λίγα ή πολλά)
  - θεμελιώδη όρια στο ρυθμό/ισχύ μετάδοσης και στην πιθανότητα σφάλματος
- Μπορεί να γίνει μετάδοση χωρίς λάθη όταν υπάρχει θόρυβος;

# Διάκριση Καναλιών

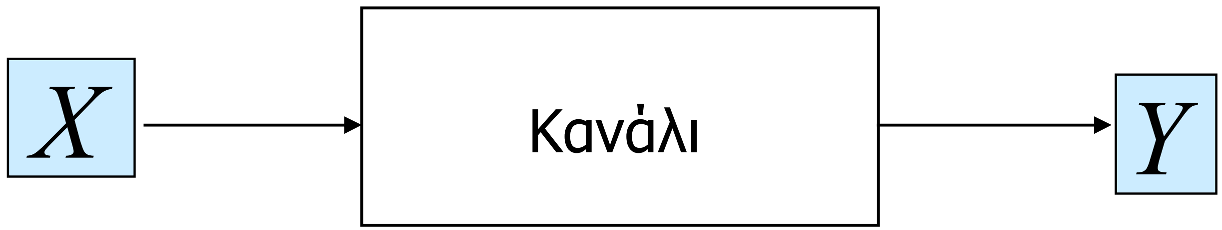
- Η κατηγοριοποίηση των καναλιών είναι αντίστοιχη της κατηγοριοποίησης των πηγών
- Ως προς το χρόνο:
  - συνεχούς χρόνου
  - διακριτού χρόνου
- Ως προς το αλφάβητο του μεταδιδόμενου σήματος:
  - συνεχούς αλφαβήτου (κυματομορφή)
  - διακριτού αλφαβήτου (π.χ. bits, σύμβολα)
- Το κανάλι συνεχούς χρόνου μπορεί να μετατραπεί σε διακριτού:
  - θα πρέπει όμως να είναι πεπερασμένου εύρους ζώνης
  - και να δειγματοληπτηθεί σύμφωνα με το όριο Nyquist
- **Εστιάζουμε σε κανάλια διακριτού χρόνου και διακριτού αλφαβήτου**
- Σημείωση: Το κανάλι Δ.Χ. εμπεριέχει ως μέρος του το κανάλι Σ.Χ. (που είναι το φυσικό μέσο)

# Βλ. Εισαγωγή: Βασική Δομή Ψ.Τ.Σ.



# Διακριτό Κανάλι Χωρίς Μνήμη

- Discrete Memoryless Channel (DMC)
- Είναι το απλούστερο αλλά και βασικότερο μοντέλο καναλιού




- Διακριτό:
  - διακριτού χρόνου
  - η είσοδος και η έξοδος ανήκουν σε διακριτά αλφάβητα
- Χωρίς Μνήμη: κάθε έξοδος εξαρτάται μόνο από την αντίστοιχη είσοδο και όχι από παλαιότερες

# Περιγραφή ενός DMC

- Αλφάβητο Εισόδου $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{J-1}\}$
- Αλφάβητο Εξόδου $Y = \{y_0, y_1, \ldots, y_{K-1}\}$
  - Το πλήθος των δύο αλφαβήτων δεν είναι απαραίτητα ίσο, ενδεχομένως $J>K$ ή $J<K$
  - Για ευκολία θα θεωρήσουμε στη συνέχεια $J=K$
  - Η είσοδος και η έξοδος είναι τυχαίες μεταβλητές

- Ποιες ποσότητες χαρακτηρίζουν το κανάλι;

- Πιθανότητες μετάβασης $p\left(y_k \mid x_j\right) = P\left(Y = y_k \mid X = x_j\right) \quad \forall k, j$
  - Φυσική Σημασία: η πιθανότητα να λάβω στην έξοδο του καναλιού $y_k$, αν έστειλα $x_j$ (υπό συνθήκη πιθανότητα)

# Βασικές Σχέσεις

1. Πιθανότητες μετάβασης: εφόσον πρόκειται για πιθανότητες

$$0 \le p\left(y_k \mid x_j\right) \le 1$$

*JxK πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης*

2. Κατά σύμβαση (συνήθως) θεωρούμε
   - $j=k$, σωστή μετάδοση συμβόλου $x_j$
   - $j \neq k$, λανθασμένη μετάδοση συμβόλου $x_j$

3. Άθροισμα ως προς τις εξόδους

$$\sum_{k=0}^{K-1} p\left(y_k \mid x_j\right) = 1$$

Οι δεσμευμένες πιθανότητες του αθροίσματος είναι τα στοιχεία μιας αντίστοιχης γραμμής του πίνακα μετάβασης ( j: δείκτης γραμμής)

Right stochastic matrix

   - Ερμηνεία: Αν στάλθηκε το $x_j$, τότε η έξοδος θα είναι σίγουρα κάποιο από τα $y_k$

# Βασικές Σχέσεις (2)

4. Από κοινού πιθανότητα (κανόνας Bayes)

$$p\left(x_j, y_k\right) = p\left(y_k \mid x_j\right) p\left(x_j\right) = p\left(x_j \mid y_k\right) p\left(y_k\right)$$

– *p*($x_j$): η (a-priori) πιθανότητα του συμβόλου $x_j$, δηλαδή η πιθανότητα εμφάνισης του συμβόλου $x_j$

5. Για τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων εξόδου ισχύει

$$\begin{aligned} p\left(y_k\right) &= p\left(x_0, y_k\right) + \ldots + p\left(x_{J-1}, y_k\right) \\ &= \sum_{j=0}^{J-1} p\left(x_j, y_k\right) = \sum_{j=0}^{J-1} p\left(y_k \mid x_j\right) p\left(x_j\right) \end{aligned}$$

# Βασικές Σχέσεις (3)

6. Πιθανότητα εσφαλμένης μετάδοσης:
   - το σφάλμα συμβαίνει όταν *j≠k (με $p(y_k|x_j)$ )*
   - για συγκεκριμένο $x_j$ η πιθανότητα λάθους είναι

$$\sum_{k \neq j} p\left(y_k \mid x_j\right)$$

   - Η μέση πιθανότητα λάθους είναι:
   - η μέση τιμή της για όλα τα $x_j$ δίνεται ως

$$P_e = \sum_{j=0}^{J-1} p\left(x_j\right) \sum_{k \neq j} p\left(y_k \mid x_j\right) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k \neq j} p\left(x_j, y_k\right)$$

   - η πιθανότητα σωστής μετάδοσης είναι

$$P_c = 1 - P_e$$

# Πότε ένα κανάλι είναι «καλό»;

- Ερωτήματα που – μεταξύ άλλων - θα απαντήσουμε:
  - Πόσο γρήγορα μπορώ να στείλω μέσα από ένα κανάλι;
  - Πότε ένα κανάλι δεν εισάγει πολλά σφάλματα;
  - Είναι δυνατόν να υπάρχει θόρυβος και παρόλα αυτά να μην έχουμε σφάλματα;

- **Παράδειγμα:**

  Έστω δυαδική πηγή (χωρίς μνήμη) που παράγει ισοπίθανα σύμβολα με ρυθμό 1000/sec τα οποία στη συνέχεια διέρχονται μέσα από ένα <u>δυαδικό συμμετρικό και χωρίς μνήμη κανάλι</u>. Η πιθανότητα σωστής μετάβασης μέσα από το κανάλι είναι 0.95. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβίβασης πληροφορίας;

# Πότε ένα κανάλι είναι «καλό»;

- Για να προχωρήσουμε θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα κάποιες βασικές έννοιες που σχετίζονται με την ποσοτικοποίηση της πληροφορίας

- Εντροπία *H(X)*:
  - η αβεβαιότητα που έχουμε για την τυχαία μεταβλητή *X*
  - στα προηγούμενα μαθήματα το *X* ήταν η πηγή
  - εδώ, η πηγή είναι πλέον η είσοδος του καναλιού δηλαδή η πληροφορία που θέλω να μεταδώσω
  - η *X* είναι άγνωστη στο δέκτη και έχει εντροπία:

$$\boxed{H(X) = -\sum_{j=0}^{J-1} p(x_j)\log_2 p(x_j)}$$

# Από Κοινού Εντροπία

- Αν συνδυάσω δύο πηγές *X* και *Y*, μπορώ να δημιουργήσω μία νέα πηγή *Z=(X,Y)*
- Η εντροπία της *Z* συνδέεται με τις από κοινού πιθανότητες εμφάνισης των δύο τ.μ.
- Από Κοινού (Συνδυασμένη) Εντροπία

$$H(X,Y) = -\sum_x \sum_y p(x,y) \log_2 p(x,y)$$

- Φυσική Σημασία: η αβεβαιότητα που έχω για το συνδυασμό των δύο τ.μ.  (της από κοινού εμφάνισης τους)
- Παράδειγμα:

  *X:* πόσες διαλέξεις του μαθήματος ΨΤ παρακολούθησα $\{x_0, x_1, x_2\}$=*{'λίγες', 'αρκετές', 'όλες'}*

  *Y:* βαθμός τελικής εξέτασης $\{y_0, y_1, y_2\}$=*{'<5','οριακός', 'καλός/πολύ καλός'}*

# Υπό Συνθήκη Εντροπία

- Τι γίνεται όταν γνωρίζω την τιμή της μίας εκ των δύο τ.μ.;
- Γνωρίζοντας το *Y*, αλλάζει η αβεβαιότητα για το *X*
- *Αν, π.χ., προκύψει στην έξοδο το $y_1$ τότε η μέση αβεβαιότητα για το X είναι:*

$$\boxed{H\left(X \mid Y = y_1\right) = -\sum_{j=0}^{J-1} p\left(x_j \middle| y_1\right) \log_2 p\left(x_j \middle| y_1\right)}$$

- Για κάθε τιμή $y_\kappa$ της τ.μ. *Y* έχουμε μία αντίστοιχη μεση αβεβαιότητα για την *X*, την $H(X|Y=y_\kappa)$
- Η μέση τιμή των παραπάνω ποσοτήτων είναι η υπό συνθήκη εντροπία

# Υπό Συνθήκη Εντροπία (2)

- Υπό Συνθήκη Εντροπία:

$$H(X|Y)=\sum_{k=0}^{K-1}H(X|y_k)\,p(y_k)$$
$$=-\sum_j\sum_k p(x_j|y_k)\,p(y_k)\log_2 p(x_j|y_k)$$
$$=-\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1}p(x_j,y_k)\log_2 p(x_j|y_k)$$

- Φυσική Σημασία: Πόση είναι η αβεβαιότητα για την *X*, αν γνωρίζω την τιμή (έκβαση) της *Y*. Εναλλακτικά, πόση είναι η πληροφορία που “απομένει” στην X δοθέντος ότι έχω παρατηρήσει την Y.

- Ερώτηση 1: Αν γνωρίζω το *Y*, η αβεβαιότητα για το *X* αυξάνεται, μειώνεται, ή παραμένει σταθερή;
- Ερώτηση 2: Πότε είναι H(X/Y) = 0 και πότε H(X/Y)=H(X) ;

# Υπό Συνθήκη Εντροπία (3)

- Ιδιότητα 1: Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς και τις προηγούμενες ιδιότητες, μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\boxed{H(X,Y) = H(X|Y) + H(Y)}$$

- Ιδιότητα 2: Αν οι πηγές είναι ανεξάρτητες, τότε

$$\boxed{H(X,Y) = H(X) + H(Y)}$$

# Αμοιβαία Πληροφορία

- Εντροπία πηγής *H(X)*: η πληροφορία (αβεβαιότητα) της *X*
- Υπό Συνθήκη Εντροπία *H(X|Y)*: η αβεβαιότητα για την *X* αν ξέρω την τιμή της *Y*
- Η διαφορά των δύο μεγεθών:

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$

ονομάζεται Αμοιβαία Πληροφορία και είναι:

- η ποσότητα πληροφορίας που παρέχεται από την τυχαία μεταβλητή *Y* για την *X*, *ή ισοδύναμα:*
- *η ποσότητα της αβεβαιότητας που διαλύεται για την X όταν παρατηρώ την Y*

- Η αμοιβαία πληροφορία είναι ένα σημαντικό μέγεθος για
  - την κωδικοποίηση πηγής
  - την κωδικοποίηση καναλιού

# Αμοιβαία Πληροφορία και Κανάλι

- Ο δέκτης δε γνωρίζει την είσοδο του καναλιού (*X*),
  - αλλά βλέπει την έξοδό του (*Y*)
- Η *X* μεταφέρει ποσότητα πληροφορίας *H(X)*
- Αρχικά, ο δέκτης έχει αβεβαιότητα *H(X)* για την *X*
- Η *Y* είναι εξαρτημένη από την είσοδο του καναλιού
  - στην ουσία είναι μια ενθόρυβη έκδοση της *X*
- Η αβεβαιότητα του δέκτη μειώνεται σε $H(X|Y)$
- Ο δέκτης έμαθε πληροφορία $H(X)-H(X|Y)$

# Αμοιβαία Πληροφορία και Κανάλι (2)

- Η αμοιβαία πληροφορία είναι το ποσό της πληροφορίας που έμαθε ο δέκτης
  - για την είσοδο του καναλιού *X*
  - παρατηρώντας την έξοδο του καναλιού *Y*

- Όσο μεγαλύτερη είναι η αμοιβαία πληροφορία,
  - τόσο καλύτερο είναι το κανάλι (τουλάχιστον απέναντι στη X)
  - τόσο περισσότερα μας λέει η έξοδος *Y* για την είσοδο *X*

$$\boxed{I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)}$$

$$\boxed{I(X;Y) = \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p(x_j, y_k)\log_2\left[\frac{p(y_k / x_j)}{p(y_k)}\right]}$$

# Ιδιότητες Αμοιβαίας Πληροφορίας

1. Μη αρνητική: $I(X;Y) \geq 0$
   – πότε ισχύει η ισότητα;

2. Συμμετρία: $\boxed{I(X;Y) = I(Y;X)}$ TX → RX , RX → TX

3. $$\boxed{I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X)}$$

4. $$\boxed{I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)}$$

5. $$\boxed{I(X;Y) \leq \min\{H(X), H(Y)\}}$$

# Ιδιότητες Αμοιβαίας Πληροφορίας (ΟΧΙ)

6. Υπό συνθήκη αμοιβαία πληροφορία

$$\begin{aligned} I(X;Y|Z) &= \sum_z I(X;Y|z)\,p(z) \\ &= H(X|Z) - H(X|Y,Z) \end{aligned}$$

7. Κανόνας αλυσίδας για την αμοιβαία πληροφορία

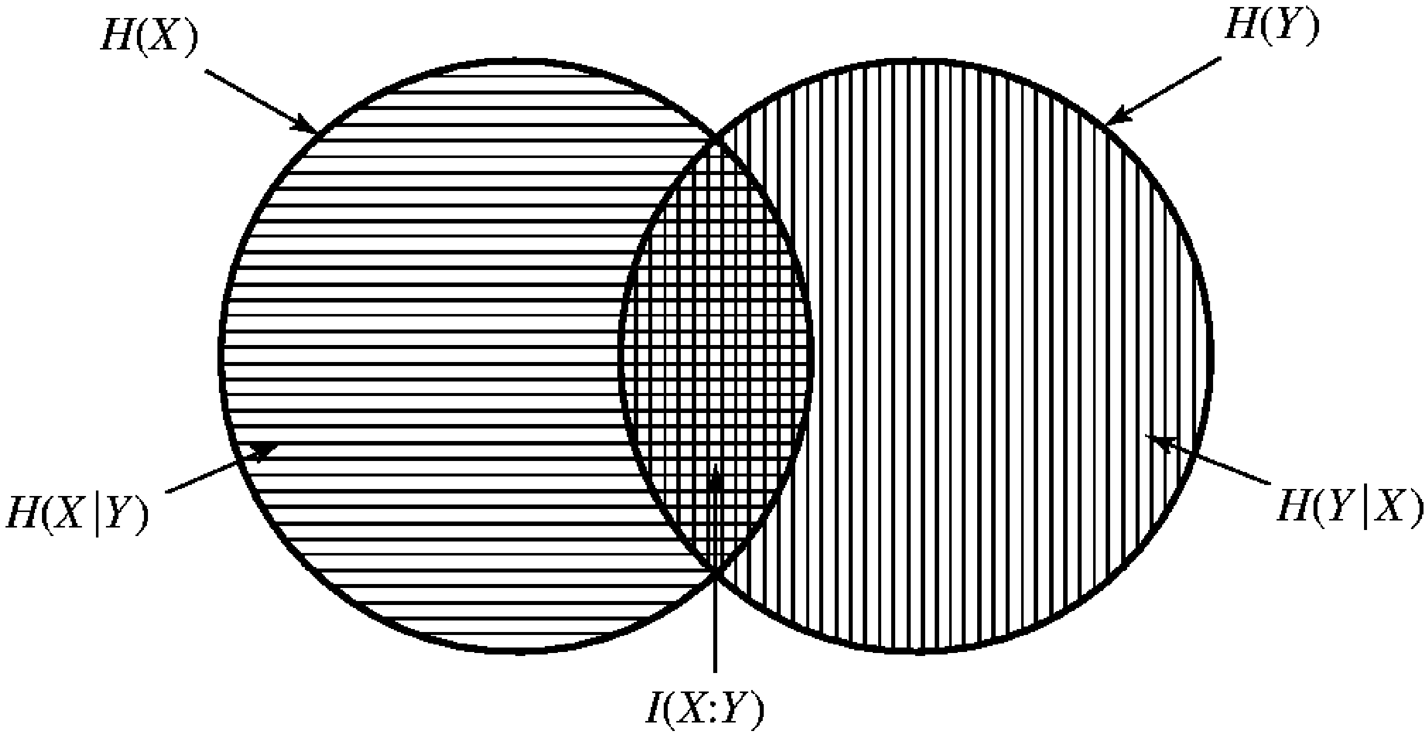
$$I(X,Y;Z) = I(X;Z) + I(Y;Z|X)$$

8. Γενίκευση κανόνα αλυσίδας

$$\begin{aligned} I(X_1,X_2,\ldots,X_n;Y) &= I(X_1;Y) + I(X_2;Y|X_1) \\ &+ \ldots + I(X_n;Y|X_1,X_2,\ldots,X_{n-1}) \end{aligned}$$

# Σχέση Ποσοτήτων

- Εντροπία – Υπό Συνθήκη Εντροπία – Αμοιβαία Πληροφορία




- Ερώτηση: Ποια ποσότητα είναι η ένωση όλων των γραμμοσκιασμένων περιοχών;
- Απάντηση: *H(X,Y)*

# Χωρητικότητα Καναλιού *C*

- Χωρητικότητα Καναλιού (Channel Capacity):
  - ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης από ένα κανάλι
  - εκφράζεται ανά χρήση του καναλιού (bits/channel use)
    channel use $\equiv$ symbol slot (χωρίς κωδικ. καναλιού)
  - Κάποιες φορές εκφράζεται σε bits/sec

- Χωρητικότητα Καναλιού και Αμοιβαία Πληροφορία
  - $I(X;Y)$ είναι το ποσό της πληροφορίας που έμαθε ο δέκτης για την είσοδο $X$ του καναλιού παρατηρώντας την έξοδο $Y$
  - Η χωρητικότητα $C$ είναι η μέγιστη πληροφορία που μπορεί να περάσει σωστά από το κανάλι

- Διαφορές:
  - η χωρητικότητα είναι ένα μέγεθος που χαρακτηρίζει το κανάλι αποκλειστικά
  - η αμοιβαία πληροφορία εξαρτάται από
    - » τις πιθανότητες μετάβασης $p(y_k|x_j)$ (κανάλι)
    - » τις πιθανότητες εμφάνισης $p(x_j)$ (πηγή)

# Χωρητικότητα Καναλιού (2)

- Παράδειγμα 1: δύο πηγές μεταδίδονται (όχι ταυτόχρονα) πάνω από το ίδιο κανάλι και παρατηρούνται οι αντίστοιχες έξοδοι

  $H(X_1)=1$, $H(X_1|Y_1)=0.8$, $I(X_1;Y_1)=0.2$

  $H(X_2)=1.5$, $H(X_2|Y_2)=0.3$, $I(X_2;Y_2)=1.2$

  – ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού;
  – σίγουρα είναι μεγαλύτερη από 1.2 (ή ίση)

- Παράδειγμα 2: μία πηγή μεταδίδεται μέσα από δύο κανάλια

  $H(X)=1$, $H_1(X|Y_1)=0.8$, $I_1(X;Y_1)=0.2$

  $H_2(X|Y_2)=0.5$, $I_2(X;Y_2)=0.5$

  – Ποιο κανάλι είναι καλύτερο;
  – το δεύτερο κανάλι «φέρθηκε» καλύτερα στην πηγή αυτή
  – ίσως όμως η πηγή αυτή ήταν καλύτερα προσαρμοσμένη να περάσει πάνω από το δεύτερο κανάλι
  – αυτό δεν σημαίνει ότι το πρώτο κανάλι είναι πάντοτε χειρότερο

# Ορισμός Χωρητικότητας

- Προκειμένου να μην εξαρτάται η χωρητικότητα από την εκάστοτε πηγή, ορίζουμε

> Χωρητικότητα ενός DMC είναι η μέγιστη τιμή της αμοιβαίας πληροφορίας *I(X;Y)* ως προς όλες τις δυνατές κατανομές του αλφαβήτου εισόδου *X*
>
> $$\boxed{C = \max_{\{p(x_j)\}} I(X;Y)}$$

- Η *C* είναι πλέον συνάρτηση μόνο των πιθανοτήτων μετάβασης του καναλιού και όχι και των a-priori πιθανοτήτων

- Σημείωση: ανατρέξτε στον ορισμό της συνάρτησης ρυθμού-παραμόρφωσης (βλ. επόμενο σετ διαφανειών) και συγκρίνετέ τον με αυτόν της χωρητικότητας

# Υπολογισμός Χωρητικότητας

- Για να υπολογίσουμε τη χωρητικότητα ενός καναλιού:
  - μεγιστοποιούμε την έκφραση που δίνει την $I(X;Y)$
  - ως προς τα $p(x_j)$
  - λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\boxed{0 \le p\left(x_j\right) \le 1} \qquad \boxed{\sum_{j=0}^{J-1} p\left(x_j\right) = 1}$$

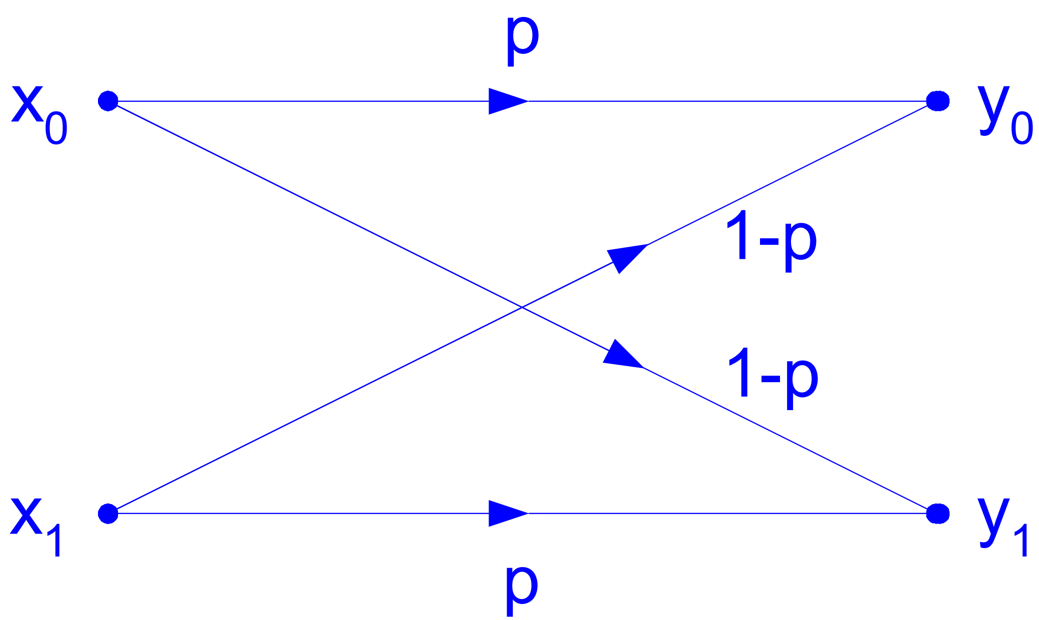
- Πρόκειται για ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης υπό συνθήκες *(constrained maximization)*

- Γενικά δεν είναι εύκολη η λύση του (ειδικά όταν εισάγονται τυχαίες παράμετροι)

- Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την απλή περίπτωση του δυαδικού συμμετρικού καναλιού

# Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι

- Binary Symmetric Channel (BSC)
- Το απλούστερο και βασικότερο μοντέλο καναλιού




  - Δυαδικό: δυαδικά αλφάβητα εισόδου & εξόδου *{0,1}*
  - Συμμετρικό: το κανάλι αντιμετωπίζει ισότιμα τα *'0'* και *'1'*
  - Χωρίς μνήμη
  - πιθανότητες εμφάνισης $\{p(x_0), 1\text{-}p(x_o)\}$
  - πιθανότητα σωστής μετάδοσης *p*

# Χωρητικότητα BSC

- Αποτέλεσμα 1: η αμοιβαία πληροφορία μεγιστοποιείται για ισοπίθανη είσοδο $p(x_0)=0.5$
  - δικαιολογείται διαισθητικά λόγω της δίκαιης συμπεριφοράς του καναλιού (συμμετρία)
  - θυμηθείτε ότι η ομοιόμορφη πηγή έχει μέγιστη εντροπία

- Αποτέλεσμα 2: η χωρητικότητα του BSC δίνεται ως

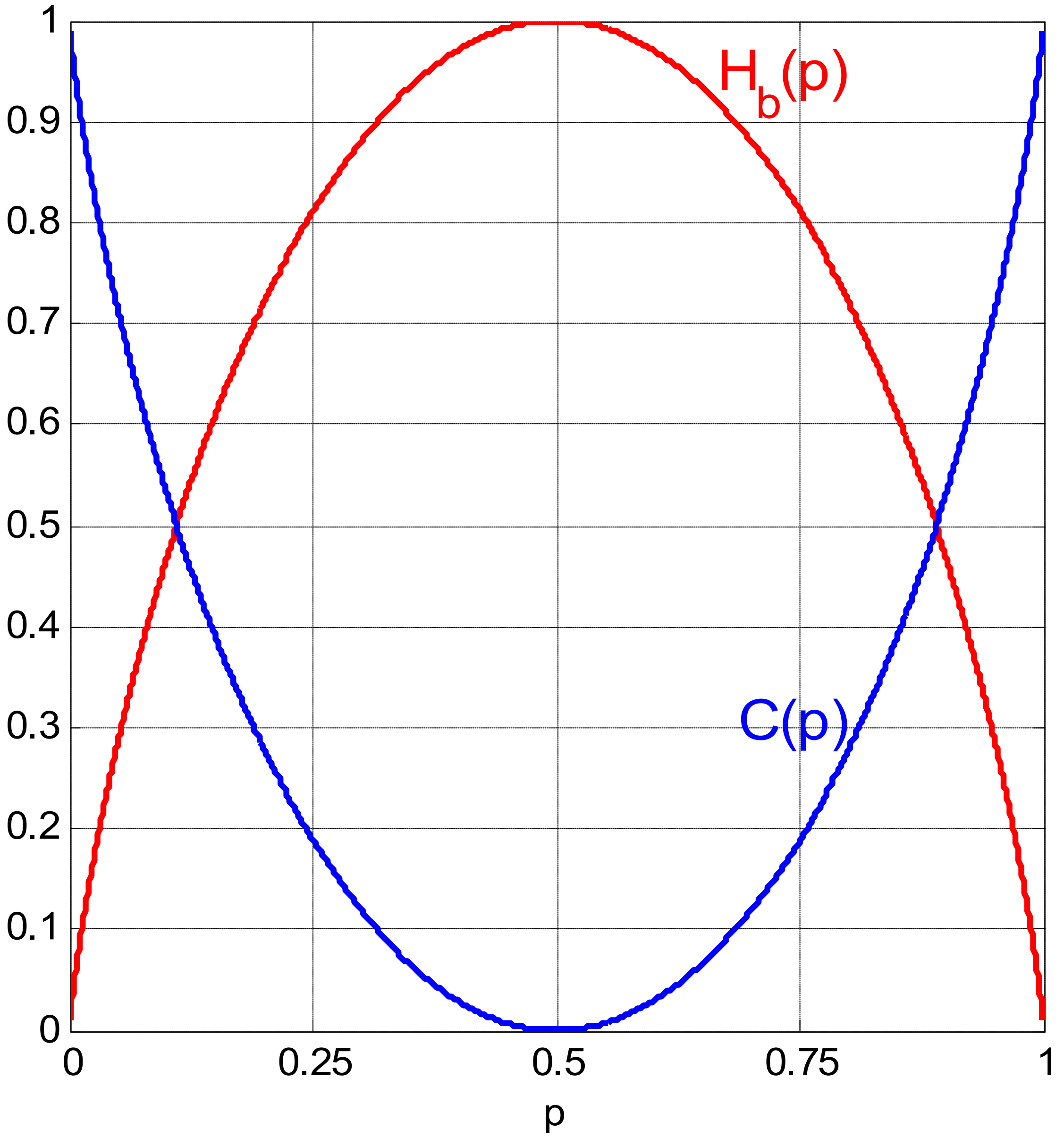
$$C(p)=1-\left(-p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p)\right)$$

$$\Rightarrow C(p)=1-H_b(p),$$

$$\text{όπου } H_b(p)=-p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p)$$

  - $H_b(p)$ η συνάρτηση δυαδικής εντροπίας

# Χωρητικότητα BSC (2)




- Σχολιάστε:
  - *C(0)*
  - *C(0.5)*
  - συμμετρία

Παρατηρούμε ότι η χωρητικότητα μεγιστοποιείται όχι μόνο για p=0 που είναι λογικό αλλά και για p=1. Γιατί;

# Θεώρημα Χωρητικότητας Καναλιού

- ή «Δεύτερο Θεώρημα του Shannon»
- Χρησιμότητα: ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός αξιόπιστης μετάδοσης μέσα από ένα ενθόρυβο κανάλι;

Θεώρημα: Έστω κανάλι με χωρητικότητα $C$, μέσα από το οποίο επιθυμούμε να μεταδώσουμε με ρυθμό $R$

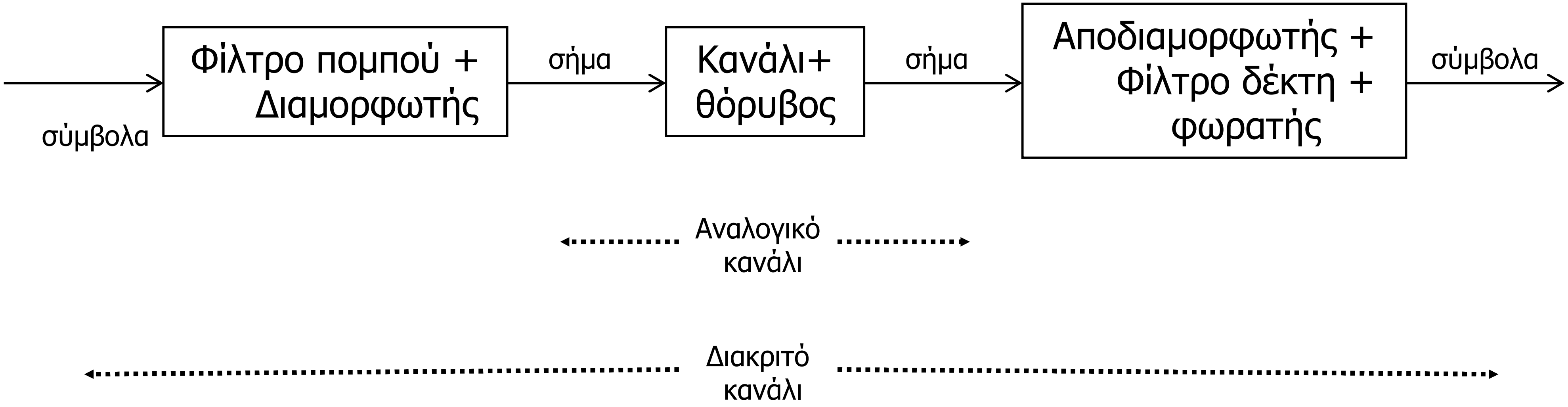
- Αν $R \leq C$, τότε για οσοδήποτε μικρό $\delta > 0$ υπάρχει κώδικας (κωδικοποιητής καναλιού) που να πετυχαίνει πιθανότητα σφάλματος μικρότερη του $\delta$
- Αν $R > C$, τότε όσο πολύπλοκος κι αν είναι ο κωδικοποιητής καναλιού, η πιθανότητα σφάλματος θα είναι μακριά από το 0

- Για να προσεγγίσουμε το όριο του $C$, θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν πολύπλοκοι κώδικες
- Το θεώρημα δεν προτείνει μεθοδολογία κατασκευής κωδικοποιητή καναλιού

# Αναλογικό Κανάλι

- Τα παραπάνω ισχύουν για την περίπτωση καναλιών
  - διακριτού χρόνου
  - και διακριτού αλφαβήτου

- Ποιο είναι όμως σε ένα πραγματικό σύστημα το διακριτό κανάλι;




- Ας δούμε τι γίνεται στην περίπτωση του αναλογικού καναλιού

# Αναλογικό Κανάλι

- Το αναλογικό τμήμα του όλου καναλιού
- Το συνολικό κανάλι είδαμε ότι περιγράφεται ως διακριτό κανάλι
- Τα προηγούμενα αποτελέσματα γενικεύονται στα κανάλια συνεχούς αλφαβήτου
- Επομένως αρκεί να μελετήσουμε την περίπτωση των καναλιών συνεχούς αλφαβήτου
- Άλλωστε ένα αναλογικό κανάλι μπορεί να δειγματοληπτηθεί κατάλληλα (η είσοδος και η έξοδός του),
  - και να μετατραπεί σε διακριτού χρόνου

# Διαφορική Εντροπία (ΟΧΙ)

- Έστω πηγή διακριτού χρόνου αλλά συνεχούς αλφάβητου
- Έξοδος πηγής: πραγματικός αριθμός → άπειρα bits για αναπαράσταση
- Δεν μπορεί να οριστεί η εντροπία
- Ορίζεται η λεγόμενη διαφορική εντροπία ως

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\log_2 f_X(x)\,dx$$

  - $f_X(x)$: η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $X$
  - Η $h(x)$ δεν έχει το διαισθητικό νόημα της εντροπίας
  - μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές

# Διαφορική Εντροπία Ομοιόμορφης (ΟΧΙ)

- *X* ομοιόμορφα κατανεμημένο στο συνεχές διάστημα *[0,a]*

$$f_X(x) = \frac{1}{a}, \quad 0 \le x \le a$$

- Διαφορική Εντροπία:

$$h(X) = -\int_0^a \frac{1}{a} \log_2 \frac{1}{a} dx = \log_2 a$$

- Για *a<1*, μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές

# Διαφορική Εντροπία Gaussian (ΟΧΙ)

- $X$ Gaussian κατανεμημένη $N(0,\sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

- Διαφορική Εντροπία:

$$h(X) = \frac{1}{2}\ln\left(2\pi e\sigma^2\right) \ \text{nats} = \frac{1}{2}\frac{\log_2\left(2\pi e\sigma^2\right)}{\log_2 e} \ \text{bits}$$

- Παρατήρηση:
  - Όπως η ομοιόμορφη κατανομή μεγιστοποιεί την εντροπία για τις πηγές διακριτού αλφαβήτου
  - Η Gaussian κατανομή μεγιστοποιεί τη διαφορική εντροπία για τις πηγές συνεχούς αλφαβήτου

# Κανάλια με Συνεχές Αλφάβητο (ΟΧΙ)

- Στις πηγές συνεχούς αλφαβήτου ορίστηκε η διαφορική εντροπία
- Αντίστοιχα για κανάλια συνεχούς αλφαβήτου ορίζονται:
- Από Κοινού Διαφορική Εντροπία

$$h(X,Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\log_2 f_{X,Y}(x,y)\,dxdy$$

- Υπό Συνθήκη Διαφορική Εντροπία

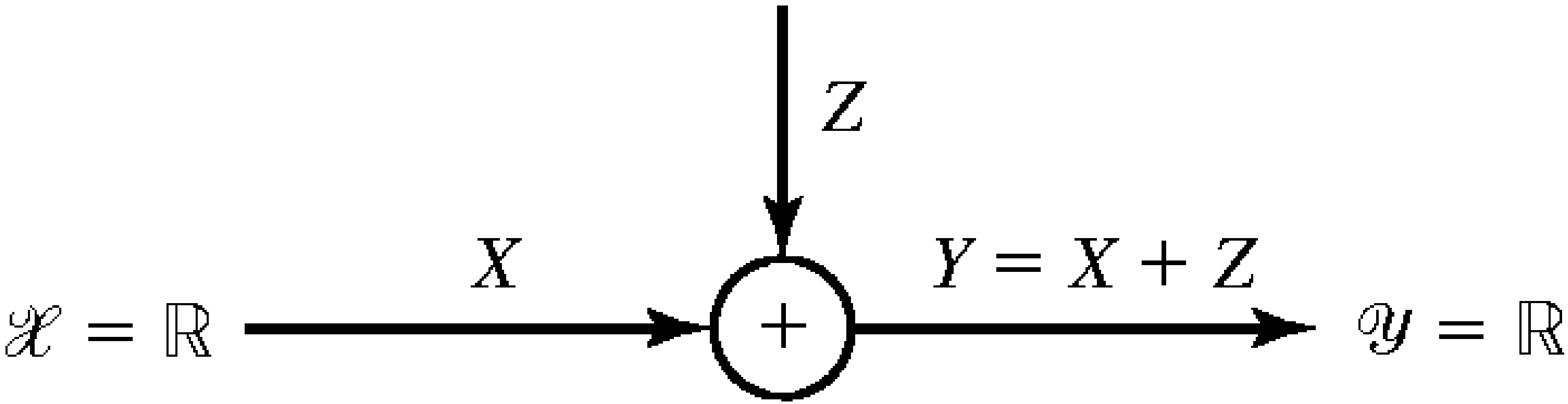
$$h(X|Y) = h(X,Y) - h(Y)$$

- Αμοιβαία Πληροφορία

$$I(X;Y) = h(X) - h(X|Y)$$

# Κανάλι AWGN

- Από τα κανάλια συνεχούς αλφαβήτου, το απλούστερο και βασικότερο είναι το κανάλι AWGN

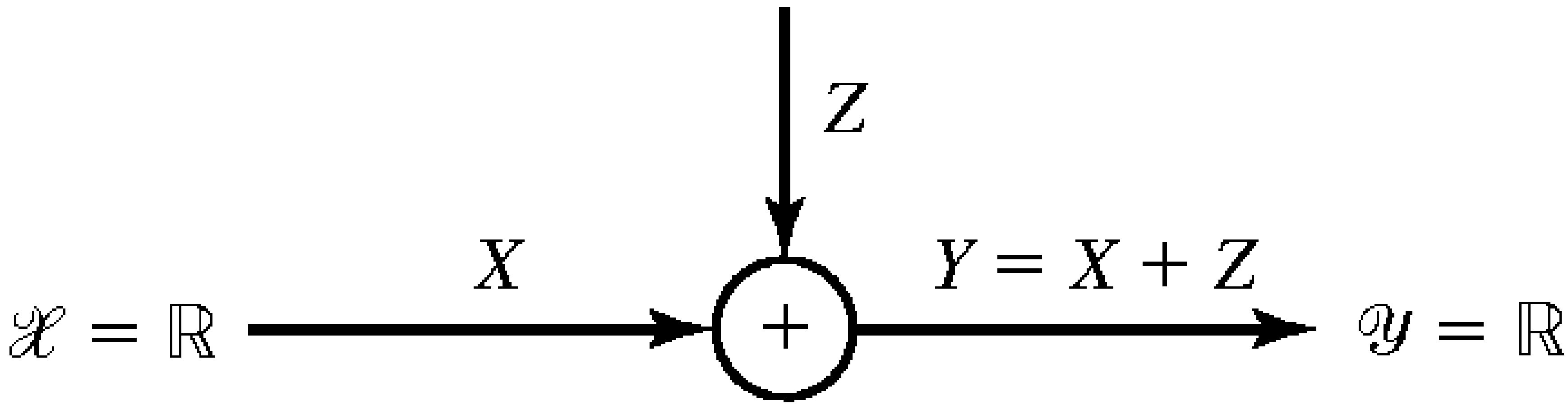



- Κανάλι Προσθετικού Λευκού Gaussian Θορύβου

  (Additive White Gaussian Noise (AWGN) Channel)

-- Θεωρούμε: Discrete-Time Memoryless Gaussian Channel

# Μοντέλο AWGN




1. Τα αλφάβητα εισόδου *X* και εξόδου *Y* είναι συνεχή
2. Στην είσοδο τίθεται περιορισμός μέσης ισχύος

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq P}$$

   – όπου *n* είναι το μέγεθος του μπλοκ κωδικοποίησης

3. Προστίθεται θόρυβος που είναι:
   – λευκός
   – και ακολουθεί Gaussian κατανομή $\mathcal{N}(0,N)$

# Χωρητικότητα Καναλιού AWGN

Θεώρημα: Η χωρητικότητα ενός καναλιού AWGN με εύρος ζώνης *W* είναι

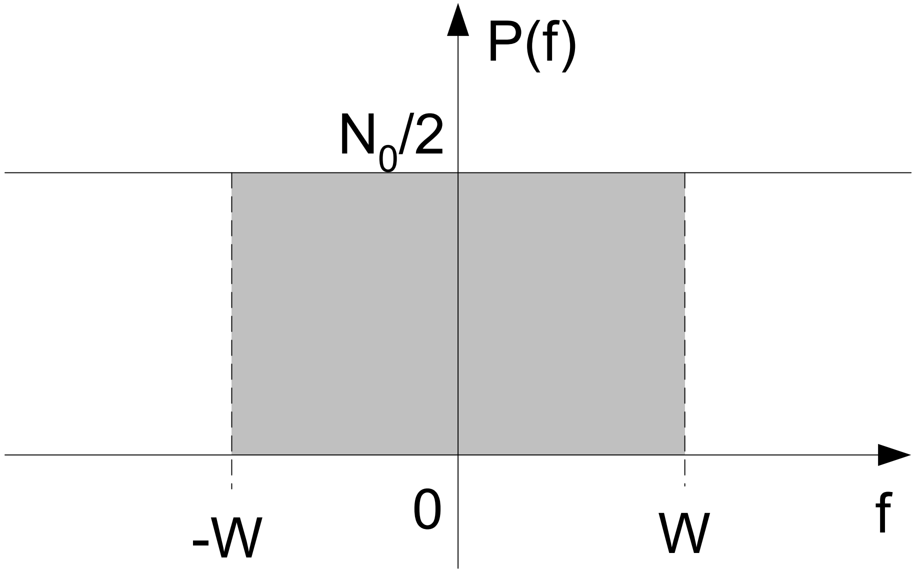
$$C = W \log_2\left(1 + \frac{P}{N}\right) \quad \text{(bits/sec)}$$

Πόρισμα: Η αμοιβαία πληροφορία ενός καναλιού AWGN μεγιστοποιείται όταν η είσοδος είναι επίσης Gaussian, $X \sim N(0,P)$

- Το παραπάνω θεώρημα είναι υποπερίπτωση του θεωρήματος χωρητικότητας του Shannon
- Είναι γνωστό ως Θεώρημα Shannon-Hartley
- Είναι το άνω όριο ρυθμού μετάδοσης για οποιοδήποτε τηλεπικοινωνιακό κανάλι. Δεν είναι εύκολο να επιτευχθεί.

# Shannon-Hartley + Ισχύς Θορύβου

- Αντί της μέσης ισχύος θορύβου *N*, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η πυκνότητα φάσματος ισχύος, $N_0/2$




- Επειδή το εύρος ζώνης κυμαίνεται και σε αρνητικές τιμές,

$$\boxed{N = \left(\frac{N_0}{2}\right)\left(2W\right) = N_0 W}$$

- Άλλη διατύπωση του Shannon-Hartley $\boxed{C = W \log_2\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right)}$

# Κωδικοποιητής Καναλιού

- Είδαμε ότι κατά τη μετάδοση πληροφορίας,
  - ο ρυθμός μετάδοσης δεν εξαρτάται μόνο από το ίδιο το κανάλι (χωρητικότητα καναλιού),
  - αλλά και από την πηγή που μεταδίδεται

- Για ένα συγκεκριμένο κανάλι, μπορούμε να βρούμε εκείνη την κατανομή εισόδου που να μεγιστοποιεί την αμοιβαία πληροφορία

- Ωστόσο, το σήμα που θέλουμε να μεταδώσουμε έχει προκαθορισμένα στατιστικά χαρακτηριστικά

- Ο κωδικοποιητής καναλιού αναλαμβάνει να μετατρέψει το σήμα προς μετάδοση σε μια τυχαία διαδικασία με στατιστικά «φιλικότερα» και προσαρμοσμένα στο συγκεκριμένο κανάλι

# Συνέπειες του Θεωρήματος S-H

1. Μας δίνει ένα ανώτατο όριο αξιόπιστης μετάδοσης δεδομένων μέσα από AWGN κανάλι.

2. Προσφέρει τη δυνατότητα για ανταλλαγή (trade-off) σήματος-προς-θόρυβο (SNR) με εύρος ζώνης

3. «Συμπίεση» εύρους ζώνης μεταδιδόμενου σήματος

# Συνέπειες του Θεωρήματος S-H

Παράδειγμα για τη 2η συνέπεια:

Έστω: R=10000bits/sec, W=3000Hz. Τι κανάλι απαιτείται;

Χρειαζόμαστε κανάλι με C >= R .

Θεώρημα S-H: C= $W log_2(1+\frac{P}{N})$

Θέτοντας C=R μπορούμε να βρούμε από S-H τον απαιτούμενο λόγο P/N

$$\frac{P}{N} = 2^{(\frac{C}{W})} - 1 = 2^{3,333} - 1 \approx 9$$

Για το ίδιο πρόβλημα, εάν W=10000Hz τότε $\frac{P}{N} = 1$

# Συνέπειες του Θεωρήματος S-H

Παράδειγμα για τη 3η συνέπεια:

Έστω αναλογικό σήμα με εύρος ζώνης 10KHz και κανάλι με εύρος ζώνης 5KHz και θόρυβο AWGN με μέση τιμή 0 και διασπορά $N_0/2 = 0{,}0005$. Ποιο είναι το rate και πώς θα το μεταδώσουμε;

Rate: Έστω δειγματοληψία με 20Ksampes/sec και κβάντιση με 8bits/sample → $R_b$ = 160Kbits/sec

Θεώρημα S-H: $C = W\log_2\left(1+\frac{P}{N}\right)$ $\acute{o}\pi o\upsilon$ $\mathrm{N} = \mathrm{N}_0 W = 0{,}001*5000 = 5$Watt

Θέτοντας $C=R_b$ και W=5000Hz μπορούμε να βρούμε από S-H την απαιτούμενη ισχύ P

$$P = \mathrm{N}\left(2^{\left(\frac{R_b}{W}\right)} - 1\right) = 5 * (2^{32} - 1) \approx 2{,}15 * 10^{10} Watt \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \left(\frac{\mathrm{P}}{N}\right)_{dB} \approx 96\text{dB}$$

# Όριο Shannon (1)

- Ποια είναι η χωρητικότητα ενός αθόρυβου καναλιού;
  Απάντηση: Άπειρη, βλ. τύπο Shannon-Hartley →

$$C = W\log_2\left(1+\frac{P}{N_0W}\right)$$

- Ποια είναι η χωρητικότητα ενός ενθόρυβου καναλιού με άπειρο εύρος ζώνης ;

  Απάντηση: Όταν υπάρχει θόρυβος και η ισχύς του μεταδιδόμενου σήματος είναι σταθερή τότε η χωρητικότητα του καναλιού τείνει σε ένα πεπερασμένο ανώτατο όριο καθώς το εύρος ζώνης τείνει στο ∞ .

$$C = W\log_2\left(1+\frac{P}{N_0W}\right) = \left(\frac{P}{N_0}\right)\left(\frac{N_0W}{P}\right)\log_2\left(1+\frac{P}{N_0W}\right) = \left(\frac{P}{N_0}\right)\log_2\left(1+\frac{P}{N_0W}\right)^{\left(\frac{N_0W}{P}\right)}$$

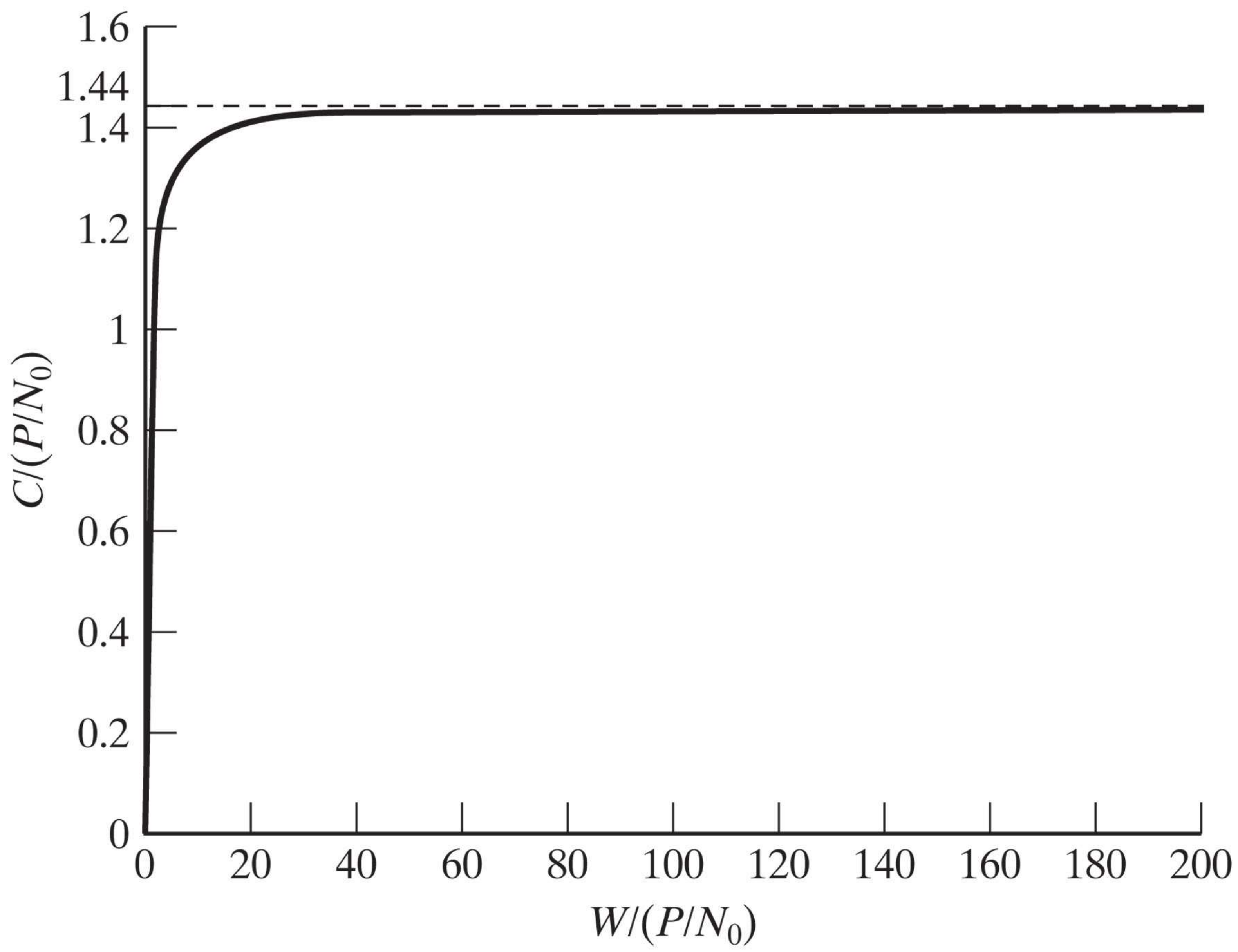
Επειδή όμως

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e$$

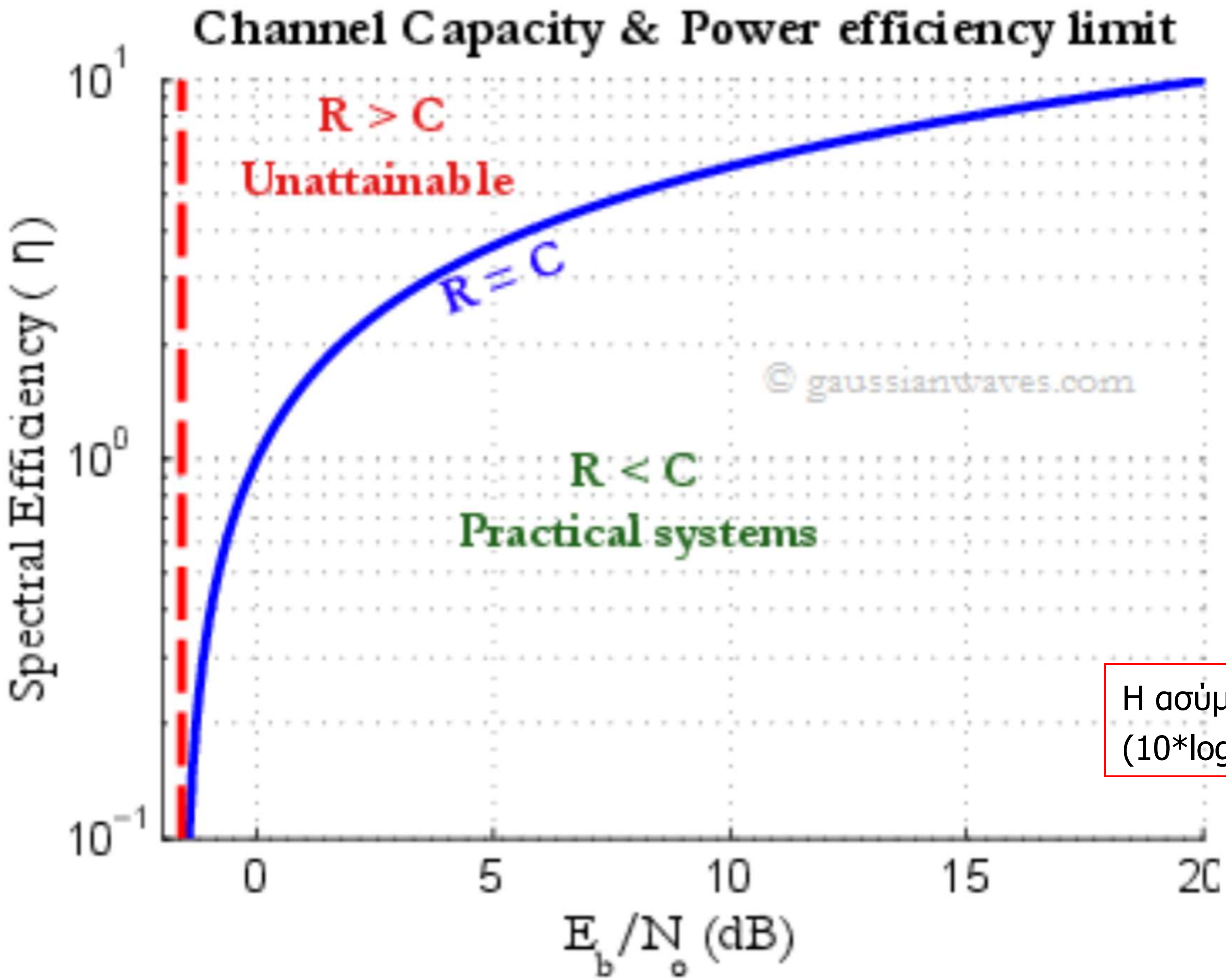
καταλήγουμε ότι:

$$\lim_{W\to\infty} C = \left(\frac{P}{N_0}\right)\log_2 e = 1.44\left(\frac{P}{N_0}\right)$$

# Όριο Shannon (2)



# Φασματική αποδοτικότητα




<u>Power efficiency</u>:
Ο λόγος $E_b/N_0$ που απαιτείται για συγκεκριμένο bit error rate.

<u>Spectral efficiency</u>:
η= C/W (in bits/seconds/Hz )

$$P = E_b R$$

Η ασύμπτωτη είναι στο -1.59dB
(10*log10(1/1.44)=-1.59)